

江苏省仪征中学 2020-2021 学年度第一学期

高二数学热身综合练 (1)

班级: _____ 姓名: _____ 学号: _____

一、选择题 (本大题共 4 小题, 共 20 分)

1、在等差数列 $\{a_n\}$ 中, a_3, a_{15} 是方程 $x^2 - 6x + 8 = 0$ 的两个根, 则 $a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11}$ 为 ()

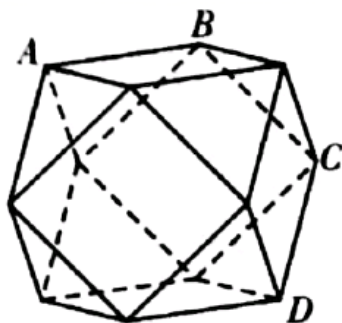
- A. 12 B. 13 C. 14 D. 15

2、已知椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{m^2} = 1$ ($m > 0$) 的焦距为 8, 则 m 的值为 ()

- A. 3 或 $\sqrt{41}$ B. 3 C. $\sqrt{41}$ D. ± 3 或 $\pm \sqrt{41}$

3、“阿基米德多面体”也称为半正多面体, 是由边数不全相同的正多边形为面围成的多面体, 它体现了数学的对称美。如图, 将正方体沿交于一顶点的三条棱的中点截去一个三棱锥, 共可截去八个三棱锥, 得到八个面为正三角形, 六个面为正方形的“阿基米德多面体”, 则异面直线 AB 与 CD 所成角的大小是 ()

- A. 30° B. 45° C. 60° D. 120°



4、(多选) 已知 a, b 是不同直线, α, β 是不同平面, 且 $a \perp \alpha$, $b \parallel \beta$, 则下列四个命题中正确的是

- A 若 $a \perp b$, 则 $\alpha \parallel \beta$ B. 若 $a \parallel b$, 则 $\alpha \perp \beta$
C. 若 $\alpha \perp \beta$, 则 $a \parallel b$ D. 若 $\alpha \parallel \beta$, 则 $a \perp b$

二、填空题 (本大题共 4 小题, 共 20 分)

5、已知 F_1, F_2 是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的两个焦点, 过点 F_1 的直线与椭圆

交于 A, B 两点, $\triangle ABF_2$ 的周长为 12, 椭圆 C 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{3}$, 则椭圆 C 的方程为_____.

6、在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $\frac{a_{11}}{a_{10}} < -1$, 若它的前 n 项和 S_n 有最大值, 则使 S_n 取得最小正数的 $n =$ _____.

7、若不等式 $ax^2 + ax - 1 > 0$ 的解集为 $\emptyset$, 则实数 a 的取值范围是_____.

8、已知数列 $\left\{ \frac{1}{(2n-1)(2n+3)} \right\}$ 的前 n 项和为 T_n ，若对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$ ，不等式 $6T_n < a^2 - a$

恒成立，则实数 a 的取值范围是_____.

三、解答题（本大题共 3 小题，共 36 分）

9、已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和是 A_n ，数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和是 B_n ，若 $A_3 = 14$ ， $a_{n+1} = 2a_n$ ，

$n \in \mathbf{N}^*$ ．再从三个条件： ① $B_n = -n^2 + 21n$ ； ② $B_{n+1} + 2 = B_n + b_n$ ， $b_1 = 20$ ；

③ $b_n = 22 - 2\log_2 a_n$ ，中任选一组作为已知条件，完成下面问题的解答（如果选择多组条件解答，则以选择第一组解答记分）.

（1）求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式；

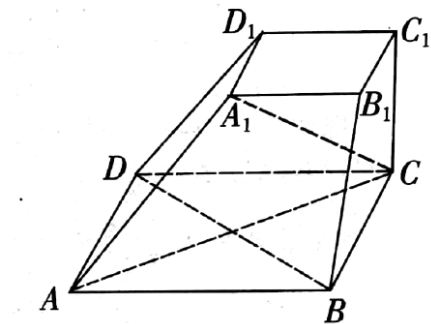
（2）定义： $a * b = \begin{cases} a, & a \leq b \\ b, & a > b \end{cases}$ ．记 $c_n = a_n * b_n$ ，求数列 $\{c_n\}$ 的前 100 项的和 T_{100} ．

10、在四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形，

$\angle DAB = \frac{\pi}{3}$ ， $\angle A_1AD = \angle A_1AB$ ， $A_1B_1 = 1$ ， $AA_1 = 2$ ， $\angle A_1AC = \frac{\pi}{6}$.

(1) 证明： $BD \perp$ 平面 ACA_1 ；

(2) 求二面角 C_1-BB_1-A 的余弦值.



11、已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 过点 $P\left(-1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, 短轴的一个端点到焦点的距离为 2.

(1) 求椭圆 E 的方程;

(2) 定义 k_{PQ} 为 P, Q 两点所在直线的斜率, 若四边形 $ABCD$ 为椭圆的内接四边形, 且

AC, BD 相交于原点 O , 且 $k_{AC} = \frac{1}{4k_{BD}}$, 试判断 k_{AB} 与 k_{BC} 的和是否为定值. 若为定值,

求出此定值; 若不为定值, 请说明理由.

江苏省仪征中学 2020-2021 学年度第一学期

高二数学热身综合练 (1) 参考答案

1、D 2、A 3、C 4、BD

$$5、\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{7} = 1 \quad 6、19 \quad 7、[-4, 0] \quad 8、(-\infty, -1] \cup [2, +\infty)$$

9、(1) 由已知得, $\{a_n\}$ 为等比数列, 公比为 $q=2$,

$$\text{则 } a_1 + 2a_1 + 2^2a_1 = 14 \quad \therefore a_1 = 2 \quad \therefore a_n = 2^n$$

选择①当 $n=1$ 时, $b_1 = B_1 = 20$,

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } b_n = B_n - B_{n-1} = 22 - 2n, \quad \therefore b_n = 22 - 2n.$$

选择② $B_{n+1} - B_n = b_n - 2$,

即 $b_{n+1} = b_n - 2$, 所以 $\{b_n\}$ 是首项为 20, 公差 -2 的等差数列, $\therefore b_n = 22 - 2n$.

选择③ $b_n = 22 - 2\log_2 2^n = 22 - 2n$.

$$(2) \text{ 由 (1) 知: } c_n = a_n * b_n = \begin{cases} 2^n, 1 \leq n \leq 3 \\ 22 - 2n, n \geq 4 \end{cases} (n \in \mathbb{N}^*)$$

所以, $T_{100} = a_1 + a_2 + a_3 + b_4 + b_5 + b_6 + \dots + b_{100}$

$$= \frac{a_1(1-q^3)}{1-q} + \frac{97(b_4 + b_{100})}{2} = \frac{2(1-2^3)}{1-2} + \frac{97(14-178)}{2} = 2^4 - 2 - 7954 = -7940.$$

11、(1) 因为椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 过点 $P\left(-1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, 所以 $\frac{1}{a^2} + \frac{3}{4b^2} = 1$, 又由题意知,

短轴的一个端点到焦点的距离为 2, 即 $a = 2$

$$\text{联立方程 } \begin{cases} \frac{1}{a^2} + \frac{3}{4b^2} = 1 \\ a = 2 \end{cases} \text{ 解得 } a^2 = 4, b^2 = 1, \text{ 所以椭圆 } E \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{4} + y^2 = 1.$$

(2) 证明: 设直线 AB 的方程为 $y = kx + m$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$,

$$\text{联立 } \begin{cases} y = kx + m \\ x^2 + 4y^2 = 4 \end{cases}, \text{ 得 } (1 + 4k^2)x^2 + 8kmx + 4(m^2 - 1) = 0,$$

$$\therefore \Delta = (8km)^2 - 4(4k^2 + 1) \times 4(m^2 - 1) = 16(4k^2 - m^2 + 1) \geq 0, \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-8km}{1 + 4k^2} \\ x_1 x_2 = \frac{4(m^2 - 1)}{1 + 4k^2} \end{cases},$$

因为 $k_{AC} = \frac{1}{4k_{BD}}$, 所以 $k_{OA}k_{OB} = \frac{1}{4}$, 所以 $4y_1y_2 = x_1x_2$,

$$\text{又 } y_1y_2 = (kx_1 + m)(kx_2 + m) = k^2x_1x_2 + km(x_1 + x_2) + m^2,$$

$$\therefore (4k^2 - 1)x_1x_2 + 4km(x_1 + x_2) + 4m^2 = 0.$$

$$\therefore (4k^2 - 1) \frac{4(m^2 - 1)}{1 + 4k^2} + 4km \frac{-8km}{1 + 4k^2} + 4m^2 = 0. \text{ 整理得 } 4k^2 = 1, \therefore k = \pm \frac{1}{2},$$

$\because A, B, C, D$ 可以轮换 $\therefore AB, BC$ 的斜率一个是 $\frac{1}{2}$, 另一个就是 $-\frac{1}{2}$,

$$\therefore k_{AB} + k_{BC} = 0.$$

10、

(1) 证明: 连接 A_1B, A_1D , 设 AC 与 BD 相交于点 O ,

因为 $AB = AD, \angle A_1AD = \angle A_1AB$,

所以 $\triangle A_1AD \cong \triangle A_1AB$,

所以 $A_1D = A_1B$, 2 分

连接 A_1O , 因为 O 为 BD 的中点,

所以 $A_1O \perp BD$.

又因为四边形 $ABCD$ 是菱形, 所以 $AC \perp BD$,

因为 $A_1O \cap AC = O$, 所以 $BD \perp$ 平面 ACA_1 4 分

(2) 解: 在 $\triangle A_1AO$ 中, $A_1O^2 = 4 + 3 - 2 \times 2 \times \sqrt{3} \times \cos \frac{\pi}{6} = 1$, 所以 $A_1O = 1$,

因为 $A_1O^2 + AO^2 = 4 = AA_1^2$, 所以 $A_1O \perp AC$,

因为 $A_1O \perp BD, AC \cap BD = O$,

所以 $A_1O \perp$ 平面 $ABCD$ 6 分

以 O 为坐标原点, OA, OB, OA_1 所在直线分别为 x 轴, y 轴, z 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系, 则

$C_1(-\sqrt{3}, 0, 1), B_1(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 1), B(0, 1, 0), A(\sqrt{3}, 0, 0)$.

设平面 C_1B_1B 的法向量 $\mathbf{n}_1 = (x_1, y_1, z_1)$,

$$\overrightarrow{C_1B_1} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right), \overrightarrow{B_1B} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, -1\right),$$

$$\text{由 } \begin{cases} \mathbf{n}_1 \cdot \overrightarrow{C_1B_1} = 0 \\ \mathbf{n}_1 \cdot \overrightarrow{B_1B} = 0 \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2}x_1 + \frac{1}{2}y_1 = 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}x_1 + \frac{1}{2}y_1 - z_1 = 0 \end{cases},$$

取 $x_1 = 1$, 则 $y_1 = -\sqrt{3}, z_1 = 0$, 所以 $\mathbf{n}_1 = (1, -\sqrt{3}, 0)$, 8 分

设平面 ABB_1 的法向量 $\mathbf{n}_2 = (x_2, y_2, z_2)$, $\overrightarrow{AB} = (-\sqrt{3}, 1, 0), \overrightarrow{B_1B} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, -1\right)$,

$$\text{由 } \begin{cases} \mathbf{n}_2 \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ \mathbf{n}_2 \cdot \overrightarrow{B_1B} = 0 \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} -\sqrt{3}x_2 + y_2 = 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}x_2 + \frac{1}{2}y_2 - z_2 = 0 \end{cases},$$

取 $x_2 = 1$, 则 $y_2 = \sqrt{3}, z_2 = \sqrt{3}$, 所以 $\mathbf{n}_2 = (1, \sqrt{3}, \sqrt{3})$, 10 分

$$\text{所以 } \cos \langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \rangle = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2|} = \frac{-2}{2 \times \sqrt{7}} = -\frac{\sqrt{7}}{7},$$

由图知二面角 $C_1 - BB_1 - A$ 是钝角, 所以二面角 $C_1 - BB_1 - A$ 的余弦值是 $-\frac{\sqrt{7}}{7}$ 12 分

