

基于核心素养的大单元设计：不等式章节复习*

陈华云， 王万里

(温州市第二外国语学校,浙江 温州 325015)

摘 要:大单元设计建议介入真实情景来串接章节知识,以任务驱动活动,以活动生成问题.文章以糖水不等式、基本不等式作为构建课堂的桥梁,借用已掌握的章节知识、方法,寻找、验证二者推广的不等式形式,从而使整个章节得到新内容的升华,实现复习课知新的目标.

关键词:核心素养;大单元;不等式

中图分类号:012 **文献标识码:**A **文章编号:**1003-6407(2021)09-0023-04

1 授课背景

本节课是笔者参加学校“促有效学习”,探究“大单元设计”课堂变革的一节复习型展示课.“大单元设计”建议介入真实情景来串接章节知识,以任务驱动活动,以活动生成问题.因此,本节课在内容择取上尝试用天平作为情境,“温故”章节核心知识的前提下,以糖水不等式、基本不等式作为构建课堂的桥梁,借用已掌握的章节知识、方法,寻找、验证二者推广的不等式形式,从而使整个章节得到新内容的升华,实现复习课知新的目标.本文将教学过程做一整理,请各位专家同行指正.

2 教学目标及重点、难点

2.1 教学目标

- 1)感受数学与生活的紧密联系,通过观察天平称重,从具体情境中抽象概括出对应的不等关系^[1];
- 2)尝试数学探究验证的方法,由糖水不等式与基本不等式形式的推广,领悟转化与化归、数形结合、特殊到一般等数学思想;
- 3)初步应用糖水不等式、基本不等式的推广形式,培养发散的思维习惯,提升学生数学抽象、逻辑推理、数学建模、数学运算等核心素养.

2.2 教学重难点

- 1)重点:不等关系、不等式基本性质、糖水不等式、基本不等式的知识梳理;
- 2)难点:糖水不等式、基本不等式形式的推广.

3 教学实录

3.1 引入情景,生成联系

课前准备:教师介绍天平的用途,并用图像对其工作原理作简化(如图1),其中 l_1, l_2 是力臂, G_1, G_2 是物体,当天平横梁处于水平状态时,有 $G_1 \cdot l_1 = G_2 \cdot l_2$.

问题 1 在生活中,如何用天平去判断两个不同物体 a, b 的轻重?

生(众):观察天平两侧托盘的高低,低的一侧物体重量大.

师:可否用数学符号表示 a, b 的大小关系?

生1: a, b 的大小关系可能有3种,即 $a > b, a = b, a < b$.

师:在数学中,我们常用什么方法比较 a, b 的大小关系?

生2:作差与0比大小或作商与1比大小.

师:除了不等关系外,本章节我们还学习了哪些不等式的基本性质?

全体学生口答,教师用PPT展示如下:

- 1)对称性:若 $a > b$,则 $a < b$.
- 2)传递性:若 $a > b, b > c$,则 $a > b > c$.
- 3)加法性质:若 $a > b$,则 $a + m > b + m$.

推论 1 若 $a > b, c > b$,则 $a + c > b + d$.

4)乘法性质:若 $a > b, c > 0$,则 $a \cdot c > b \cdot c$;若 $a > b, c < 0$,则 $a \cdot c < b \cdot c$.

推论 2 若 $a > b > 0, c > d > 0$,则 $a \cdot c > b \cdot d$.

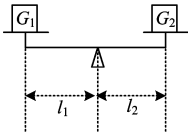


图 1

* 收文日期:2021-03-16;修订日期:2021-04-17

作者简介:陈华云(1975—),男,浙江永嘉人,中学高级教师.研究方向:数学教育.

- 5)乘方性质:若 $a>b>0, n \in \mathbf{N}^*$, 则 $a^n>b^n$ (其中 $n \geq 2$).
- 6)开方性质:若 $a>b>0, n \in \mathbf{N}^*$, 则 $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$ (其中 $n \geq 2$).

师:同学们总结的性质非常全面,上述哪些性质我们可以借用天平称重来反映呢?

生3:对称性,就是把天平两侧托盘上的物体 a, b 调换一下位置.

生4:加法性,就是在天平两侧托盘上都放上一个重量相同的物体 m .

设计意图 选择天平作为整堂课的情景,通过天平称重,可直观地反映数量的不等关系、不等式基本性质,体现本章内容的核心“不等关系”,从而让学生体会到知识与生活的联系,激发学生通过天平继续发现已学知识的热情.

3.2 演示情景,探究联系

问题2 现天平两侧托盘上已放置不同重量的物体 a, b , 再在两侧托盘放上等量的物体 m , 天平横梁的倾斜程度会如何变化?

生(众):横梁的倾斜程度会变缓.

师:透过现象看本质,这就是我们曾经学过的哪个知识?

生5(大声喊出):糖水不等式!

众生哗然.

师:生5的反应非常快,请你说一下糖水不等式的具体内容.

生5:已知 $a<b$, 则 $\frac{a+m}{b+m}>\frac{a}{b}$.

师:看看要不要作补充?

生5(思考片刻后):物体都有重量,因此 a, b, m 均为正数.

师:非常好!生5没有忽略掉糖水不等式的注意细节.那么,若 $a>b$, 则糖水不等式的形式有何变化呢?

生(众):若 $a>b$, 则 $\frac{a+m}{b+m}<\frac{a}{b}$.

师:如何解释不等关系 $\frac{7}{8}<\frac{8}{9}$?

生6:可以两边通分得到 $\frac{63}{72}<\frac{64}{72}$, 也可以交叉相乘得到 $7 \times 9 < 8 \times 8$.

生7:可以用糖水不等式 $\frac{7}{8}<\frac{7+1}{8+1}=\frac{8}{9}$ 来解释.

师:生6和生7的思路都很好!

设计意图 由天平称重构建不等式性质中加法性质与糖水不等式的联系,内化二者间关系的同时,也提高了学生对糖水不等式的认知与理解.

例1 若 $\frac{7}{8}<\frac{q}{p}<\frac{8}{9}$, 其中 p, q 是正整数, 则求 p, q 的最小值.

生6:还是两边通分得到 $\frac{126}{144}<\frac{128}{144}$, 因此 p, q 分别是 127, 144.

师:谁有不同的看法?

生7:用糖水不等式可以得到值更小的 p, q .

$$\frac{7}{8} = \frac{14}{16} < \frac{14+1}{16+1} = \frac{15}{17} < \frac{15+1}{17+1} = \frac{8}{9},$$

因此 p, q 的值分别是 15, 17.

师:很显然,生7得到的数值更小,那么他得到的数值与问题中不等式两边的分数有何关系呢?

生(众):这里的 p, q 刚好是左、右两式中分子、分母之和.

师:你可以用一般的不等关系式表示上述的发现吗?

生8:如果两个分数满足 $0<\frac{a}{b}<\frac{c}{d}<1$, 则

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}.$$

师:可以用什么方法证明你发现的结论?

生8:可以先通分后,作差去证明,也可以交叉相乘后作差比大小.

师:除了用数学方法证明这个结论,生活中能否找到实例去解释这个结论呢?

众生安静,教师给出如下情景(见表1).

表1 各种糖水的“味道”

较淡的糖水		混合的糖水		较浓的糖水	
糖	糖水	糖	糖水	糖	糖水
a	b	$a+c$	$b+d$	c	d
“味道”为 $\frac{a}{b}$		“味道”为 $\frac{a+c}{b+d}$		“味道”为 $\frac{c}{d}$	

生9:老师,我看出来了,把较淡的糖水与较浓的糖水混在一起,糖水的浓度会位于二者之间.

师:这样的解释非常巧妙!其实数学中很多问题都可以在生活中找到答案.不等式 $\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$ 是糖水不等式的一种推广形式.

生 10:老师,这里我们只找到了 p, q 的值可以取 15, 17, 但怎么解释最小呢?

师:这个问题非常关键,要寻找 p, q 的最小值,就要寻找出它们的范围. 根据已知不等关系,谁能想到方法分别转换出 p, q 的范围?

生 11:由 $\frac{7}{8} < \frac{q}{p}$ 可以得到 $7q < 8q$. 因为 p, q 都是正整数,所以

$$7p+1 \leqslant 8q.$$

同理由 $\frac{q}{p} < \frac{8}{9}$ 可以得到 $9q \leqslant 8p-1$, 消去中间的 q , 得

$$63p+9 \leqslant 64q-8,$$

解得 $p \geqslant 17$.

众生鼓掌.

师:非常棒! 我们求变量范围, 往往要找到单元变量的不等关系, 生 11 很好地展示了在二元一次不等式中, 如何利用数量关系去构造一元一次不等式的方法.

设计意图 由混合糖水推广糖水不等式的形式, 在增加课堂趣味性的同时, 也体现了数学核心素养中的直观想象以及转化化归的数学方法. 而具体不等式的问题求解, 即是理论到实践的应用, 也是学生数学运算的培养.

3.3 剖析情景, 推广联系

问题 3 商店有一架两臂不等长的天平, 店员在为顾客购买的物品称重时, 采用如下的称重方式: 先后将物品放在天平左右两侧, 分别称出重量后, 取两次重量的平均数作为物品的实际重量. 你认为这样的称重方法对顾客公平吗?

生 12:不公平!

师:如何从数学的角度解释不公平的原因?

生 12:假设先后两次称重为 m_1, m_2 , 按店员的方法, 物体的重量为 $\frac{m_1+m_2}{2}$. 而物体的实际重量应该这样去算(画出先后称重的两种情景, 如图 2 和图 3 所示):

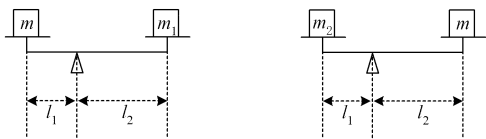


图 2

图 3

当被测物体放在左盘, 天平平衡时,

$$m \cdot l_1 = m_1 \cdot l_2,$$

万方数据

当被测物体放在右盘, 天平平衡时,

$$m_2 \cdot l_1 = m \cdot l_2,$$

整理得

$$m = \sqrt{m_1 \cdot m_2},$$

由基本不等式可知 $\sqrt{m_1 \cdot m_2} \leqslant \frac{m_1+m_2}{2}$,

因此实际重量会偏轻.

众生鼓掌.

师:解释得非常清晰到位! 除了基本不等式, 我们还拓展过一条基本不等式链, 谁能说说它的具体内容?

生 13:若 $a > 0, b > 0$, 则

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leqslant \sqrt{a \cdot b} \leqslant \frac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}},$$

当且仅当 $a=b$ 时, 等号成立.

设计意图 用天平情景串接基本不等式的知识要点, 使本章节的知识要点情景统一化, 同时又能培养学生用数学建模来解决具体情景问题的数学素养.

例 2^[2] 如图 4 所示的梯形①~④中, 与上下底平行的线段分别对应基本不等式链中哪个平均数?

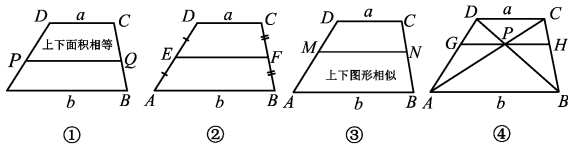


图 4

生 14:②是算术平均数 $\frac{a+b}{2}$, ③可以用上下两梯形相似得到是几何平均数 $\sqrt{ab}$.

生 15:④是调和平均数 $\frac{2ab}{a+b}$, 可通过 $\triangle DGP \sim \triangle DAB$ 推出 $GP = \frac{ab}{a+b}$, 同理可得 $PN = \frac{ab}{a+b}$, 从而 $GN = \frac{2ab}{a+b}$.

师:两位同学平面几何的数学基本功非常扎实, 那么①是不是平方平均数呢?

生 14:老师,我想到了.

在①中可以过点 D 作 BC 的平行线, 把梯形分割成三角形与平行四边形去算(如图 5).

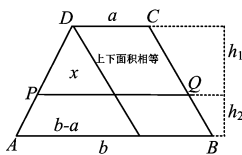


图 5

师:请展示你的过程.

众生期待,教师用投影展示:

$$\frac{x+a+a}{2} \cdot h_1 = \frac{x+a+b}{2} \cdot h_2,$$

即

$$\frac{x+2a}{x+a+b} + 1 = \frac{h_2}{h_1} + 1 = \frac{h_1+h_2}{h_1}.$$

因为 $\frac{b-a}{x} = \frac{AD}{PD} = \frac{h_1+h_2}{h_1}$, 所以

$$\frac{x+2a}{x+a+b} + 1 = \frac{b-a}{x},$$

解得

$$PQ = x+a = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

师:太精彩了!从表象上看,基本不等式链体现了数量间的大小关系;从深层次的图像上看,又体现了不同线段的长短.二者看似无关,实则紧密联系.

设计意图 数形结合是学习数学必备的素养之一,用图形进一步认识基本不等式链、加深知识印象的同时,也增加了基本不等式的维度.

例3 填写基本不等式链: $\sqrt{ab} \leq (\quad) \leq \frac{a+b}{2}$, 其中 $a>0, b>0$.

生16:两数的平均数位于两数之间,可得

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+2\sqrt{ab}+b}{4} \leq \frac{a+b}{2}.$$

生17:由糖水不等式的推论,可得

$$\frac{\sqrt{ab}}{1} \leq \frac{a+\sqrt{ab}+b}{3} \leq \frac{a+b}{2}.$$

师:两位同学给出了中间数的两种形式.其中

$\sqrt{ab} \leq \frac{a+\sqrt{ab}+b}{3} \leq \frac{a+b}{2}$ 可视为基本不等式链的一

种推广形式,其中 $\frac{a+\sqrt{ab}+b}{3}$ 叫做希罗平均数.可否在上面的梯形中,画出它表示的线段呢?

学生们思考,教师引导学生寻找:如图6,作 $\square JSFK$,

$MN \parallel EF$, M, N 分别为 JE, KF 的三等分点,则

$$|SF| = |TN| = |JK| = \sqrt{ab},$$

$$|ES| = \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab},$$

万方数据

$$\text{从而 } \frac{a+\sqrt{ab}+b}{3} = \frac{2}{3} \left(\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \right) + \sqrt{ab} = \frac{2}{3} |ES| + |TN| = |MN|.$$

设计意图 将糖水不等式的推广形式融入到的新的基本不等式链中,使得本节课能够探究发现的新内容,在知识结构上具有统一性.此外,虽然寻找希罗平均数的几何意义有一定难度,但对训练学生的类比思维很有帮助.

3.4 归纳联系,发散思考

师:通过本节课的学习,你复习了哪些旧知识,又得到了哪些新结论?

生(众):我们复习了不等关系、不等式的基本性质、糖水不等式及基本不等式链,得到了糖水不等式与基本不等式链的推广形式.

师:以下两个问题留给同学们课后思考.

练习1 设 $a, b \in \mathbf{R}^+$, $a+b=1$, 你能给出几个含有字母 a 和 b 的不等式.

练习2 当 $a>0, b>0$ 时, 比较 $\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}$, $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} - \frac{a+b}{2}$, $\sqrt{ab} - \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$ 的大小关系.

设计意图 引导学生梳理本节课的探究流程,并用开放性的问题,让学生自我归纳、构建新旧知识间的联系.

4 教学反思

1) 用天平情景串接不等式单元中的不等关系、不等式的性质、糖水不等式、基本不等式等知识,使问题的由来具有统一性.

2) 避开常规复习课课题做题的套路,用新的知识内容串联已学知识,形成更完整的知识脉络,让旧课有新意^[3].

参考文献

- [1] 崔允漷. 如何开展指向学科核心素养的大单元设计[J]. 思想理论教育导刊, 2019(2): 13.
- [2] 张云飞. 几个平均数的一个新不等式链[J]. 数学通报, 2014(1): 30-31.
- [3] 朱爱红. 浅议高中数学复习课的教学设计[J]. 高中数学教与学, 2018(7): 39.

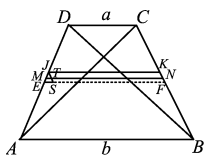


图6