

训练3 函数的和、差、积、商的导数

一、选择题

1. 设函数 $f(x) = \frac{1}{2}(\sin x - \cos x)$ 的导函数为 $f'(x)$, 则下列结论正确的是()

A. $f'(x) + f(x) = -\sin x$

B. $f'(x) + f(x) = -\cos x$

C. $f'(x) - f(x) = \sin x$

D. $f'(x) - f(x) = \cos x$

答案 D

解析 易得 $f'(x) = \frac{1}{2}(\cos x + \sin x)$, 所以 $f'(x) + f(x) = \sin x$, $f'(x) - f(x) = \cos x$, 故选 D.

2. 函数 $f(x) = x^m + nx$ ($m, n \in \mathbf{R}$) 的导函数 $f'(x) = 3x^2 - 1$, 则 $m - n$ 等于()

A. 2 B. -2 C. 4 D. -4

答案 C

解析 由 $f(x) = x^m + nx$, 则 $f'(x) = mx^{m-1} + n$,

又 $f'(x) = 3x^2 - 1$, 所以 $m = 3$, $n = -1$, 从而 $m - n = 4$.

3. 若函数 $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ 满足 $f'(1) = 2$, 则 $f'(-1)$ 等于()

A. -1 B. -2 C. 2 D. 0

答案 B

解析 $\because f'(x) = 4ax^3 + 2bx$, $\therefore f'(x)$ 为奇函数, $\therefore f'(-1) = -f'(1) = -2$.

4. 函数 $f(x) = e^x \cos x$ 的图象在点 $(0, f(0))$ 处的切线的倾斜角为()

A. 0 B. $\frac{\pi}{4}$ C. 1 D. $\frac{\pi}{2}$

答案 B

解析 对函数求导得 $f'(x) = e^x(\cos x - \sin x)$, $\therefore f'(0) = 1$,

$\therefore$ 函数 $f(x) = e^x \cos x$ 的图象在点 $(0, f(0))$ 处的切线的倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$.

5. 已知曲线 $f(x) = \frac{x^2 + a}{x + 1}$ 在点 $(1, f(1))$ 处切线的倾斜角为 $\frac{3\pi}{4}$, 则实数 a 等于()

A. 1 B. -1 C. 7 D. -7

答案 C

解析 $\because f'(x) = \frac{2x(x+1) - (x^2+a)}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x - a}{(x+1)^2}$,

又 $f'(1) = \tan \frac{3\pi}{4} = -1$, $\therefore a = 7$.

二、填空题

6. 已知 $f(x)=x^3+3^x+\ln 3$, 则 $f'(x)=$ _____.

答案 $3x^2+3^x\ln 3$

解析 $f'(x)=(x^3+3^x+\ln 3)'=3x^2+3^x\ln 3$.

7. 曲线 $f(x)=-5e^x+3$ 在点 $(0, -2)$ 处的切线方程为_____.

答案 $5x+y+2=0$

解析 由 $f(x)=-5e^x+3$, 得 $f'(x)=-5e^x$,

所以切线的斜率 $k=f'(0)=-5$,

所以切线方程为 $y+2=-5(x-0)$,

即 $5x+y+2=0$.

8. 若曲线 $y=x^\alpha+1(\alpha\in\mathbf{R})$ 在点 $(1, 2)$ 处的切线经过坐标原点, 则 $\alpha=$ _____.

答案 2

解析 由题意 $y'=ax^{a-1}$ 在点 $(1, 2)$ 处的切线的斜率为 $k=\alpha$,

又切线过坐标原点, 所以 $\alpha=\frac{2-0}{1-0}=2$.

9. 已知函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$, 且满足 $f(x)=2xf'(1)+\ln x$, 则 $f'(1)=$ _____.

答案 -1

解析 由 $f(x)=2xf'(1)+\ln x$,

得 $f'(x)=2f'(1)+\frac{1}{x}$,

所以 $f'(1)=2f'(1)+1$,

则 $f'(1)=-1$.

10. 点 P 是曲线 $y=x^2-\ln x$ 上的任意一点, 则点 P 到直线 $y=x-2$ 的距离的最小值是_____.

答案 $\sqrt{2}$

解析 由题意知直线 $y=x-2$ 与 $y=x^2-\ln x$ 无交点, 又 $y=x^2-\ln x$ 的导数 $y'=2x-\frac{1}{x}(x>0)$,

由 $y'=1$, 得 $2x-\frac{1}{x}=1$, 解得 $x=1$ (舍负), 所以与 $y=x-2$ 平行的曲线的切线切点为 $(1, 1)$,

所以点 P 到 $y=x-2$ 的最小距离为 $\sqrt{2}$.

三、解答题

11. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+ax(x\in\mathbf{R}, a\in\mathbf{R})$, 在曲线 $y=f(x)$ 的所有切线中, 有且仅有一条切线 l 与直线 $y=x$ 垂直. 求 a 的值和切线 l 的方程.

解 $\because f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+ax$,

$\therefore f'(x)=x^2-4x+a$.

由题意可知，方程 $f'(x)=x^2-4x+a=-1$ 有两个相等的实根.

$$\therefore \Delta=16-4(a+1)=0, \therefore a=3.$$

$$\therefore f'(x)=x^2-4x+3=-1.$$

$$\text{化为 } x^2-4x+4=0.$$

解得切点横坐标为 $x=2$.

$$\therefore f(2)=\frac{1}{3}\times 8-2\times 4+2\times 3=\frac{2}{3}.$$

$$\therefore \text{切线 } l \text{ 的方程为 } y-\frac{2}{3}=(-1)(x-2),$$

$$\text{即 } 3x+3y-8=0.$$

$$\therefore a=3, \text{ 切线 } l \text{ 的方程为 } 3x+3y-8=0.$$