通过直观想象培育学生的核心素养①

——一元二次方程的解法“数学实验室”栏目教学为例

程　花

（徐州市第三十四中学　221008）

直观想象是指借助空间想象感知事物的形态与变化，利用几何图形理解和解决数学问题. 主要包括：可以通过图形描述数学问题，建立几何图形与数与代数的联系，构建直观的数学模型，探索解决问题的思路. 就学科素养而言，数、形是数学研究和学习的基本对象. 直观想象是重要的数学核心素养内容之一. “数学实验室”栏目教学突出在“做数学”中“学数学”，引导学生通过“做”感受数学、探索知识和结论，应用所学知识解决简单问题. “数学实验室”栏目教学是培养学生直观想象的重要载体，是课堂教学中培养学生直观想象核心素养的重要阵地.

《义务教育数学课程标准（2011 年版）》指出，空间观念主要是指根据物体特征抽象出几何图形，根据几何图像想象出所描述的实际物体；几何直观是指利用图形描述和分析问题. 几何直观和空间观念是紧密相连的，直观想象是几何直观和空间想象观念的的发展和融合.

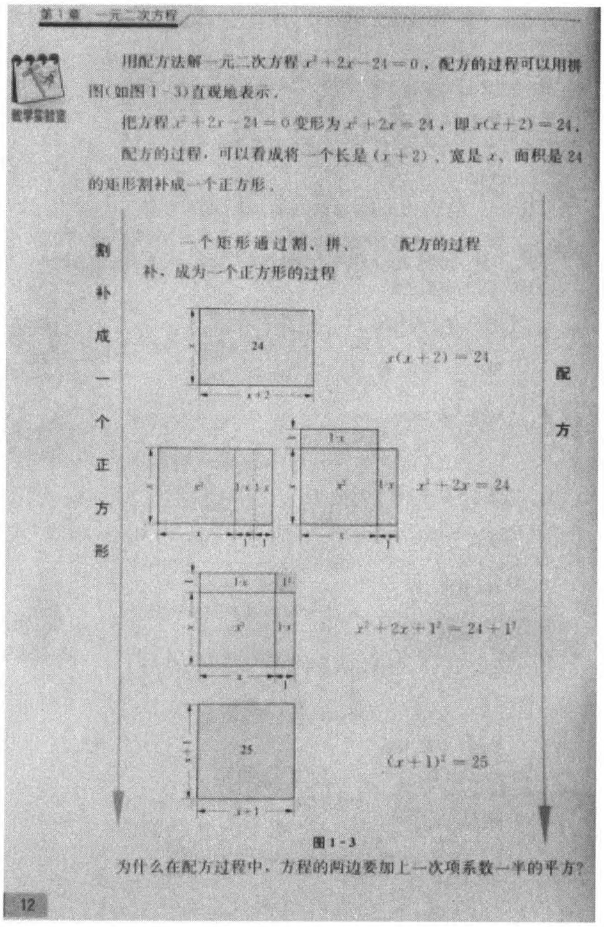
1　案例分析

在苏科版数学教材设置中，以“生活 数学”、“活动 思考”为主线，设置了“做”数学栏目：“数学实验室”. 栏目教学旨在引导学生通过“做”感受数学知识的生成过程，在体验中探索知识和结论，应用所学知识建立解决问题的数学模型，寻找探索解决问题的路径. 苏科版数学九年级上册第一章一元二次方程的解法，教材中“数学实验室”栏目：“矩形通过割、拼、补成为一个正方形”，教材旨在引导学生用图形描述数学问题，从而利用图形理解代数问题；学生通过图形的几何直觉分析问题解决问题，形成化抽象为直观的形象思维，实现帮助学生在“做数学”中“学数学”，在直观操作中感知事物的形态与变化的可能，在体验中实现帮助学生借助空间想象构建描述问题的直观数学模型，利用图形探索解决数学问题的思路.

我们先来看看教材给出的“数学实验室”栏目内容：

教材内容中，一元二次方程的解法第一课时直接开平方法解方程，学生对于一元二次方程的解法已经有了宏观的认识，明确了解一元二次方程的根本思路就是“化二次为一次”的“降次”思想，学生也在思想上会思考“任意一个一元二次方程都能用直接开平方法求解吗”，为第二课时配方法解一元二次方程做了思维上的铺垫与预设. 本节课是第二课时，从设问“如何解方程 $x^2+6x+4=0$?”，引导学生思考能否转化成“$(x+h)^2=k$”的形式，进而直接开平方. 教材中教学思路的引领，符合学生“化未知为已知”的认知规律. 教材中“数学实验室”栏目教学安排在例题讲解之后，引导学生通过拼图的方式描述配方的过程，帮助学生从直观面积平方到代数的配方，感受“几何图形”与“数与代数”的联系. 在实际教学中，我们可以让学生课前准备好实验材料，自己制作一个“长比宽多 2 的矩形”纸片，以增强直观印象和空间体验，感受建立几何直观模型的过程，实现“数”到“形”的直观转变，“形”到“数”的抽象推理.

① 本文是江苏省教育科学“十三五”规划 2018 年度重点资助课题“核心素养视角下的苏科版“数学实验室”栏目教学研究”（编号：B－a/2018/02/06）阶段性研究成果.


第1章 一元二次方程

数学实验室

用配方法解一元二次方程 $x^2+2x-24=0$，配方的过程可以用拼图(如图 1-3)直观地表示.

把方程 $x^2+2x-24=0$ 变形为 $x^2+2x=24$，即 $x(x+2)=24$.

配方的过程，可以看成将一个长是 $(x+2)$，宽是 x，面积是 24 的矩形割补成一个正方形.

图 1-3

为什么在配方过程中，方程的两边要加上一次项系数一半的平方?

12

2 教学过程

师:用直接开平方法解的一元二次方程具有怎样的形式?

生:$(x+h)^2=k$

师:配方法解一元二次方程与直接开平方法解一元二次方程之间有什么联系?

生:只要先把一个一元二次方程变形为 $(x+h)^2=k$ 的形式，就可以通过直接开平方法求出方程的解.

师:配方法解一元二次方程的关键步骤在哪里?

生:把一个一元二次方程变形为 $(x+h)^2=k$ 的形式.

师:配方时，方程两边同时加上的常数是如何确定的?

生:一次项系数的一半的平方.

师:为什么在配方过程中，方程的两边总是加上一次项系数一半的平方?

生:完全平方公式形式决定了.

师:很好！大家对完全平方公式掌握熟练，在多项式的变形过程中也就水到渠成.那么，从几何图形的角度，完全平方表示什么呢?

生:表示正方形的面积.

师:非常好！之前我们尝试过用面积证明公式，大家能不能思考，用几何图形的面积描述配方法解一元二次方程?

师:用面积法描述公式的本质是什么?

生:一个几何图形，用不同的方式分割或拼补，面积表达形式不同但本质相同，所以是恒等式.

师:是的，图形的拼补形式不同，但拼补前后的图形面积是相等的.同学们试一试，用配方法解一元二次方程 $x^2+2x-24=0$，能不能用图形的面积描述配方的过程，进而验证配方法解一元二次方程的几何意义.

师:如何转化方程的形式，表达面积?

生:$x^2+2x-24=0$ 变形为 $x(x+2)=24$，一个长为 $(x+2)$，宽为 x，面积是 24 的矩形.

师:拼、补的目的是什么?

生:变成正方形的面积.

师:非常好！同学们可以开动脑筋，分组实验了.

学生积极思考，踊跃做着各种尝试，小组活动气氛活跃，同学们在操作中思考，在思考中尝试，在“做数学”中“学数学”，在拼补中尝试构建几何模型解决问题.

师:通过拼补操作，同学们是如何思考将长方形转化为正方形的?

生:长为 $(x+2)$，宽为 x 的矩形，要拼接为正方形，首先找到边长为 x 的正方形，因此，需要剪下长为 2，宽为 x 的矩形.剪下的矩形一边长是 x，可以与边长为 x 的正方形拼接，所以将其均分为长为 1，宽为 x 的矩形.拼接后发现，恰好需要一个边长为 1 的正方形，就可以拼成一个正方形.所以需要添加一个面积为 1 的正方形，即方程的两边都 $+1^2$.至此，$x^2+2x+1^2=24+1^2$，即 $(x+1)^2=25$.

师:同学们试想一下，如何用拼图描述方程 $x^2+6x=15$ 的配方过程?又该添加面积是多少的小正方形呢?

(学生边操作，边讨论，边思考)

生:添加面积为 9 的小正方形.

师：用拼图描述方程 $x^2+5x=10$ 的配方过程？又该添加面积是多少的小正方形呢？

（学生思考的时间明显缩短）

生：添加面积为 $\left(\frac{5}{2}\right)^2$ 的小正方形.

师：你发现了什么规律？

生：拼图时，添加小正方形的面积是一次项系数一半的平方.

师：为什么？

生：第一次找正方形，剪下的矩形一边是一次项系数，另一边是找到正方形的边长，需要将剪下的矩形长度为一次项系数的边长均分，才能恰好与找到的正方形拼补，拼补后，空缺的小正方形边长就是一次项系数的一半.所以，添加小正方形的面积是一次项系数一半的平方.配方的过程中，方程的两边总是加上一次项系数一半的平方.

通过学生的操作实验，学生很直观的体验配方法解一元二次方程的过程，学生在体验中构建几何模型，“数”与“形”的融合水到渠成，学生的直观想象能力在潜移默化中培养，于无声处浸润直观想象核心素养.

3 案例反思

数学是研究数量关系和空间形式的科学，数、形是数学研究和学习的基本对象.学生从直观教学中抽象几何图形符合学生认识事物的认知特点，也符合学生的认知规律.“数学实验室”栏目的教学本质就是引导学生在“做数学”中“学数学”，在“做”中“感悟”.苏科版数学教材中，“数学实验室”栏目设置较多，看似可有可无的“操作”，其实都是学生直观想象核心素养培养的重要载体，是学生喜爱符合学生认知的教学内容.“做数学”中“学数学”是培育学生核心素养的重要载体，如何在初中数学教学中，引导学生感知事物的形态，构建数学直观模型，培养学生的直观想象核心素养，笔者有以下教学体会.

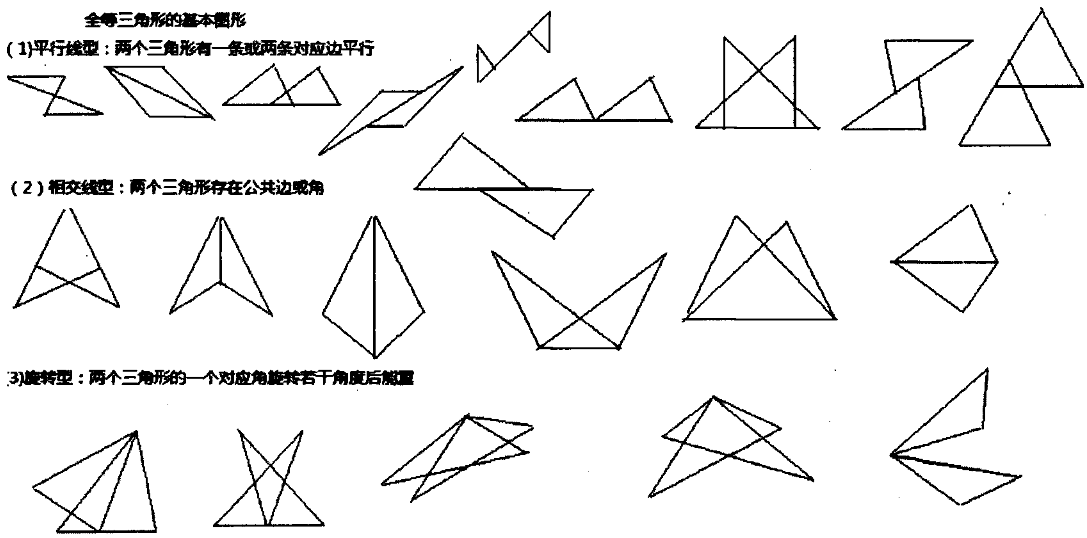
（1）画图操作——从基本的操作入手，培养学生对图形的感知能力.

学生初学几何时，是从数字到图形最基本的图形感知开始的.基本的点、线，到三角形、多边形直线型图形感知，再到弧、圆、双曲线、抛物线等曲线型图形感知，都需要学生从操作的感知中建立图形模型，手、脑并用增强学生的感知能力.因此，教学中，引导学生认识图形，动手画画图，掌握工具画图、尺规作图，并能准确的画出平面图形.正所谓熟能生巧，学生在动手画图的潜移默化中，感知图形的形成与变化，理解图形之间的内在关系并发现图形之间的变化关系，提高对图形的认识并能够构建直观的数学模型解决问题.如：利用三角板和直尺过一点画已知直线的垂线，利用三角板和直尺过直线外一点画已知直线的平行线，网格图中，用直尺画已知直线的垂线（平行线）等等，实际教学中，教师放手让学生自主操作探究的教学效果要好于教师的直接经验介绍，学生在操作中自主探讨，自主画图的过程中掌握画图技巧，感受事物的形态与变化，感受从“事物”（生活）到“图形”（数学）的数学模型建立过程，形成“利用几何图形”理解“数与代数”的能力.

（2）识图理解——简单图形到复杂图形的过渡，提高学生对图形的理解能力.

识图包含认识图形和理解图形.学生画图是最基本的感知，对于图形，还需要学生能够用数学语言描述和从图形中找到数学问题.主要包括：准确识别图形并用语言或符号表示空间图形的位置关系；从复杂的图形中区分出基本图形，并找到基本图形中的数量关系；准确地用数学语言（文字语言、符号语言、图形语言）描述数学问题的本质，寻求解决问题的方法.首先，教学中，教师要引导学生熟练掌握三种数学语言，并能在解决问题中灵活转化；其次，教学中，教师要引导学生善于“以类聚图”，发现问题的本质.如：在学习完图形的全等内容后，教师要引导学生归纳，图形全等的基本样态总结.

再如，对于图形的相似，求阴影图形的面积等知识，都可以做基本图形的形状归类，通过归类总结，学生对相应知识有了更深刻的认识，解决问题时，有意识的引导学生从复杂的图形中区分基本图形，提高学生解决问题的能力.再次，教师引导学生在操作中感悟，在感悟中发现问题的归类，寻求解决问题的方法.如：格点图形中画已知直线的平行线，画已知直线的垂线问题，教师引导学生反复画图操作，引导学生交流、归纳画图经验，教学中发现，学生自行操作感悟的经验感知效果明显好于教师的经验教授.



(3)实验体验——发展空间想象，实现直观想象核心素养培养的重要载体.

数学实验是数学学科发展过程中的重要研究方法，是实验者借助一定的物质手段，通过动手动脑实现的过程体验，实现直观感知，借助空间想象，构建数学问题模型解决问题的学习过程.直观想象是几何直观与空间想象的融合，直观与想象是连续的思维整体，需要对记忆表象的加工与改造，需要学习者对事物的空间形式观察、分析、抽象思考的再创新，需要学习者体验感知.因此，实验体验是发展空间想象的基石，是实现直观想象核心素养的重要载体.如何开展数学实验教学，提升学生的直观想象素养是深化课程改革的需要，是新时期课程开发对老师们提出的新课题.教学中，教师可以开展校本课程研究，用好校本教学资源开展数学实验活动.如开展班级选举活动，体验数据的整理，开展测量活动，体验数据的集中，开展“摸图形”活动，体验几何体的空间感知；课堂教学中，可以设计“数学实验单”引导学生实验与思考；在“导学案”的设置中，科学导入“数学实验室”栏目内容，增加学生的实验体验与操作感受；开发并研究身边的数学实验载体，如教室里的几何体研究，身边物体的三视图探究，教室里的点、线、面之间的关系.

(4)数形结合——数与形的发展与融合，实现代数问题几何化与几何问题代数化.

“数缺形难达直观，形缺数难以入微”，直观是想象的基础，想象是直观的延伸，直观想象素养的培养与形成是数与形发展、融合统一的要求，是学科能力的发展与提升的表现.直观想象素养的核心表现是数形结合思想的形成.形成数形结合的数学思想应从以下方面着手：(1)通过图形描述数学问题.借助图形描述事物的变化，对数量关系产生直观感知是直观想象的起点.正如史宁中教授所言：“数学的结论是‘看’出来的，而不是‘证’出来的”，说明观察与思考对直觉判断起着关键作用.(2)通过图形增强对数学问题的验证与理解.数学知识的形成与巩固需要验证与理解的过程，代数问题的形成往往是抽象的，不好理解的，教学中，将代数问题几何化理解，往往有代数证明不可替代的直观效果.如本课时中拼图的方式直观描述配方法的过程，学生对配方法解一元二次方程中，方程的两边为什么总是加一次项一半的平方有了直观的理解，对配方法有了更深刻的认识.(3)通过数量关系代数化几何问题，化形象为严谨.数具有概括和抽象的特征，形是具体化、直观化的表现.图形问题中表现出来的规律性特征，运用数量关系描述可以使得表现为较冗长的图形问题归结为简约的数量关系，实现几何问题代数化理解.如：直角三角形中，不变的角表现出的相应线段比值不变规律，利用简单的三角函数符号表达图形中的不变规律，是几何问题代数化的典型代表.再如：几何问题“周长一定时，为什么圆的面积最大”?，几何证明是不好推理的，而利用代数证明就一目了然：假设周长为l，则在周长一定的情况下，四边形中正方形的面积最大为$\left(\frac{l}{4}\right)^2=\frac{l^2}{16}$.

而圆的半径为$\frac{l}{2\pi}$,那么圆的面积就是$\pi \cdot \left(\frac{l}{2\pi}\right)^2=\frac{l^2}{4\pi}$,显然,$\frac{l^2}{16}<\frac{l^2}{4\pi}$,所以圆的面积大于正方形的面积,因此,周长一定时,圆的面积最大.

直观想象是数学思维的重要形式,需要借助空间想象感知事物的形态与变化.学生的操作与体验为建立空间想象提供了物质基础,教学中,教师研究并科学开展数学实验活动,是培养提升学生几何直观与空间想象观念的有效手段,可以大力提升学生的数学核心素养.

(上接第 34 页)

MM 实验给出的 MM 教育方式理论框架是:1 个方法、2 个功能、2 条基本原则、3 项具体目标、8 项教学措施,可用“一二二三八”来概括,见图 1.

图 1 HPM 与 MM 教育方式理论框架图

不难看出,HPM 与 MM 教育方式的理论框架模式构建均采用了思辨为主、实证为辅的方式,“我们常常称道国外数学教育研究使用的实证方法,用数据说话.但是,高水平的数学教育研究,也需要高屋建瓴地,借助科学进步作深层次的论说.”[17]

HPM 与 MM 教育方式的理论框架模式构建后,两者的研究重心都逐渐转入课堂教学,散发源源不断的教学生命力,即先做理论研究,再做实证研究,并逐步完善理论框架,这是两者研究方法上的耦合.

4 结语

无论何种数学教育方式都不能脱离“数学”这个核心、不能脱离“培养学生的数学(核心)素养”这个基本立场,这正是 HPM 与 MM 教育方式两者生命力长久之所在,其成果之花才会持续绽放.[18][19] 中国对 HPM 的贡献、对 MM 教育方式的创建,增强了中国数学教育研究的理论自信.

HPM 与 MM 教育方式的耦合、相互促进有待继续探索,以期为它们成为名副其实的当代中国数学教育流派贡献更多实证.

参考文献

[1]刘祖希.当代中国数学教育流派刍议[J].上海中学数学,2014,Z1):93—96

[2]刘祖希.当代中国数学教育流派刍议[J].高中数学教与学(人大复印报刊资料),2014,5:3—6

[3]新青年数学教师工作室.当代中国数学教育流派(新青年教师文库)[M].上海:上海教育出版社,2014

[4]徐章韬.面向研究生教育的专业建设之路探微[J].数学教育学报,2016,3:48—51

[5]刘超,等.数学史与数学教育[M].杭州:浙江大学出版社,2013:42

[6]汪晓勤,韩祥林.中学数学中的数学史[M].北京:科学出版社,2002

[7]汪晓勤等.HPM 视角下的数学教学设计:以椭圆为例[J].数学教育学报,2011,5:20—23

[8]徐章韬,汪晓勤,梅全雄.发生教学法:从历史到课堂[J].数学教育学报,2010,1:10—12

[9]王名扬,徐沥泉,胡建庭.MM 课题在无锡的简要回顾和现状[J].中学数学,2006,7:1—3

[10]徐利治.徐利治谈数学方法论[M].大连:大连理工大学出版社,2008

[11]徐利治.数学方法论选讲[M].武汉:华中工学院出版社,1983

[12]徐沥泉主编.教学・研究・发现——MM 方式演绎[M].北京:科学出版社,2004

[13]刘祖希.当代中国数学家对数学教育内容创新的贡献[J].中学数学杂志,2016,1:3—6

[14]刘祖希.访史宁中教授:谈数学基本思想、数学核心素养等问题[J].数学通报,2017,5:1—5

[15]涂荣豹,宁连华.中学数学经典教学方法[M].福州:福建教育出版社,2011

[16]郑毓信.数学教育哲学[M].成都:四川教育出版社,1995

[17][美]A.斯梯恩.关于数学推理的 20 个问题[J].数学教学,2015,6):2(编者按)

[18]汪晓勤.HPM:数学史与数学教育[M].北京:科学出版社,2017

[19]陈江辉.MM 方式三十年数学贯通丛书[M].江苏教育出版社,2019