

## 微专题 1——复合函数的零点问题研究

### 【知识回顾】

函数与方程这个知识点在高考中的出镜率几乎是 100%，我们应该非常重视这个知识点的系统梳理，其中有一个常见考点是复合函数的零点问题.复合函数的零点问题是，类似  $y=f[g(x)]$  函数的零点问题.解题的核心词两个，换图、换元.换句话说，就是逐层解方程，先解  $f(t)=0$  的根，再解  $t=g(x)$  的根，用数形结合去观察根的个数以及范围，显得更直观一些.

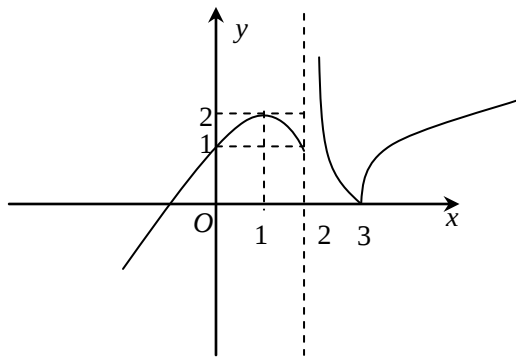
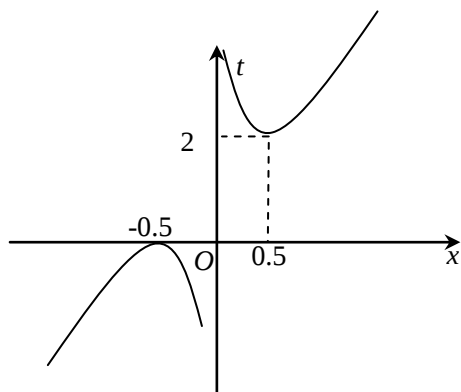
### 【例题分析】

**例题** (江苏省无锡市普通高中 2020 届高三第一学期期中调研考试 14) 已知函数

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x + 1, & x \leq 2 \\ |\log_2(x-2)|, & x > 2 \end{cases} \quad \text{则方程 } f\left(x + \frac{1}{4x} + 1\right) = a \text{ 恰好有 6 个不同的解, 则实数 } a \text{ 的}$$

取值范围为 \_\_\_\_\_.

**解法一** 如图，令  $t = x + \frac{1}{4x} + 1$  以及  $y = f(x)$  的函数图象，根据  $a$  的值进行讨论



(1) 若  $a < 0$ ， $f(t) = a$  由图象可知，此时唯一解  $t < 0$ ，而  $t = x + \frac{1}{4x} + 1$  只有两个解，舍去；

(2) 若  $a = 0$ ， $f(t) = a$  由图象可知，此时解  $t_1 < 0, t_2 = 3$ ，而  $t_1 = x + \frac{1}{4x} + 1, t_2 = x + \frac{1}{4x} + 1$ ，各有两个解，一共 4 个解，舍去；

(3) 若  $0 < a < 1$ ， $f(t) = a$  由图象可知，此时解  $t_1 < 0, 2 < t_2 < 3 < t_3$ ，而

$t_1 = x + \frac{1}{4x} + 1, t_2 = x + \frac{1}{4x} + 1, t_3 = x + \frac{1}{4x} + 1$  各有两个解，一共 6 个解，符合条件；

(4) 若  $a = 1$ ， $f(t) = a$  由图象可知，此时解  $t_1 = 0, t_2 = 2, 2 < t_3 < 3 < t_4$ ，而  $t_1 = x + \frac{1}{4x} + 1,$

$t_2 = x + \frac{1}{4x} + 1$ ，各有 1 个解； $t_3 = x + \frac{1}{4x} + 1, t_4 = x + \frac{1}{4x} + 1$ ，各有两个解，一共 6 个解，符合条件；

(5)若  $1 < a < 2$ ,  $f(t) = a$  由图象可知, 此时解  $0 < t_1 < t_2 < 2 < t_3 < 3 < t_4$ , 而  $t_1 = x + \frac{1}{4x} + 1$ ,

$t_2 = x + \frac{1}{4x} + 1$ , 无解;  $t_3 = x + \frac{1}{4x} + 1$ ,  $t_4 = x + \frac{1}{4x} + 1$ , 各有两个解, 一共 4 个解, 舍去;

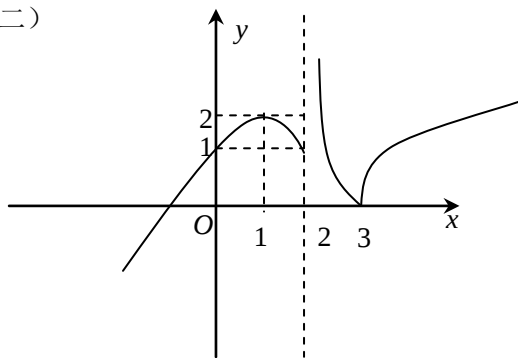
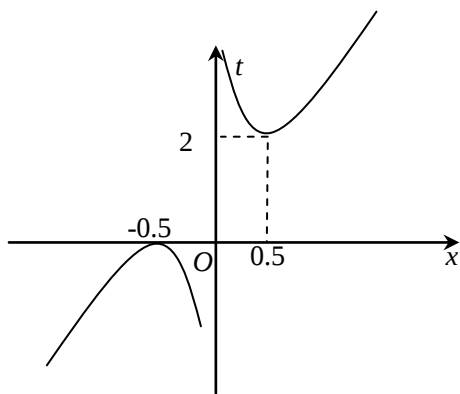
(6)若  $a = 2$ ,  $f(t) = a$  由图象可知, 此时解  $t_1 = 1, 2 < t_2 < 3 < t_3$ , 而  $t_1 = x + \frac{1}{4x} + 1$ , 无解;

$t_2 = x + \frac{1}{4x} + 1$ ,  $t_3 = x + \frac{1}{4x} + 1$ , 各有两个解, 一共 4 个解, 舍去;

(7)若  $a > 2$ ,  $f(t) = a$  由图象可知, 此时解  $2 < t_1 < 3 < t_2$ , 而  $t_1 = x + \frac{1}{4x} + 1$ ,  $t_2 = x + \frac{1}{4x} + 1$ , 各

有 2 个解; 一共 4 个解, 舍去;

**解法二** (熟悉了解法一的思维过程以后, 对于接下来的解题过程的理解会顺利很多, 多以建议大家先熟悉上面的解法一, 再来看解法二)



由图可知,  $t = x + \frac{1}{4x} + 1$  的根的可能个数为 0 ( $0 < t < 2$ ), 1 ( $t = 0$  或  $t = 2$ ), 2 ( $t < 0$  或  $t > 2$ );

而  $f(x) = a$  的根的可能个数为 1 ( $a < 0$ ), 2 ( $a = 0$  或  $a > 2$ ), 3 ( $0 < a < 1$  或  $a = 2$ ), 4 ( $1 \leq a < 2$ );

因为  $f(t) = a$ , 要有 6 个不同的根, 显然  $f(x) = a$  的根的个数不小于 3 个; 若  $f(x) = a$  有 3 个根, 每个根的范围都只能是  $t < 0$  或  $t > 2$ , 所以  $0 < a < 1$  符合条件; 若  $f(x) = a$  有 4 个根,

同理解法一中的情况(4)和(5), 可知  $a = 1$  符合条件, 综上,  $0 < a \leq 1$ .

### 【解题回顾】

解法一, 虽然讨论的情况数多达 7 种, 但是一一讨论之后, 就会对复合函数的零点个数判断有非常深刻的认识, 可能达成解法二迅速缩小变量  $a$  的讨论范围. 下面把江苏各地 20 届的模拟试题按照从易到难(小编自己的划分标准, 具体到各位因人而异, 请多多谅解啊)给出, 大家练习后可以点击后面的空白处查看答案.

### 【巩固练习】

1. (★★★江苏省南通市 2020 届高三上学期第一次调研抽测 9 月数学试题 13) 函数

$f(x) = x^2 - 3|x| - k$  有两个零点, 则  $k$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

2. (★★★江苏省苏州市部分学校 2020 届高三第一学期月考模拟试卷 14) 设函数

$f(x) = \begin{cases} 1, & x=1 \\ \log_a |x-1|+1, & x \neq 1 \end{cases}$ , 若函数  $g(x) = f^2(x) + bf(x) + c$  有三个零点  $x_1, x_2, x_3$ , 则

$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$  等于 \_\_\_\_\_.

3. (★★★江苏省淮安市 2020 届高三上学期期中联考数学试卷(文科) 14) 已知函数

$f(x) = \frac{|x|}{e^x}$ , 若关于  $x$  的方程  $f^2(x) - mf(x) + m - 1 = 0$  恰有 4 个不相等的实数根, 则实数  $m$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

4. (★★★江苏省镇江市镇江一中 2020 届高三期初考试数学试卷 13) 若关于  $x$  的方程

$2(x-1)^2 - x|x-1| + 4ax^2 = 0$  恰有 4 个不同的正根, 则实数  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

5. (★★★江苏省扬州中学 2020 届高三上学期 10 月阶段检测数学试卷 13) 函数

$f(x) = \begin{cases} |\lg x|, & x > 0 \\ 2^{|x|}, & x \leq 0 \end{cases}$ , 若函数  $y = |2f(x) - a| - 1$  存在 5 个零点, 则整数  $a$  的值为\_\_\_\_\_.

6. (★★★江苏省盐城中学 2020 届高三上学期第二次阶段性质量 12 月检测数学 12) 已

知函数  $f(x) = \begin{cases} 3x - x^3, & x > 0 \\ 2^{|x|}, & x \leq 0 \end{cases}$ , 若函数  $y = [f(x) - a][f(x) + \frac{1}{2} - a]$  有 5 个零点, 则实数  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

7. (★★★★镇江市 2020 届高三上学期第一次八校联考数学试卷 14) 若关于  $x$  的方程

$2a|x-2| - ae^{-x} = (x-2)^2e^x$  有且仅有 3 个不同实数解, 则实数  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

8. (★★★★江苏省南京师范大学附属中学 2020 届高三 12 月一模前测数学试卷 14) 已

知函数  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ ,  $g(x) = \begin{cases} |2x-1|+1, & x > 0 \\ -\frac{1}{4}x^2 - x, & x \leq 0 \end{cases}$ . 若函数  $y = g[f(x)] - a$  有 6 个零点

(互不相同), 则实数  $a$  的取值范围为\_\_\_\_\_.

9. (★★★★南通、泰州 2020 届高三第一次调研测试数学试卷 14) 已知函数

$f(x) = \begin{cases} |x-1|-1, & x \geq 0 \\ \frac{x}{x-1}, & x < 0 \end{cases}$ , 若关于  $x$  的方程  $f^2(x) + 2a \cdot f(x) + 1 - a^2 = 0$  有五个不相等的

实数根, 则实数  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

10. (★★★★苏州 2020 届高三第一学期期末考试数学试卷 14) 已知函数

$$f(x) = \begin{cases} \frac{ex}{e^x}, & x \leq 2 \\ \frac{4x-8}{5x}, & x > 2 \end{cases}, \text{ 若关于 } x \text{ 的方程 } f^2(x) - 3a \cdot |f(x)| + 2a^2 = 0 \text{ 恰有 } 5 \text{ 个相异的实}$$

根, 则实数  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

11. (★★★★★江苏省百校大联考 2020 届高三第二次考试数学试题 14) 14. 已知函数

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ \frac{x}{e^{x-1}}, & x \geq 0 \end{cases}. \text{ 若方程 } f^2(x) - 2af(x) + a^2 - \frac{1}{16} = 0 \text{ 有 } 4 \text{ 个不等的实根, 则实数 } a \text{ 的取值集合}$$

为\_\_\_\_\_.

12. (★★★★★2020 届江苏高考南通学科基地数学密卷十 13) 设函数

$$f(x) = \begin{cases} |\ln x - 2|, & x > 0 \\ -x^3 + 3x, & x \geq 0 \end{cases}, \text{ 方程 } f^2(x) + m \cdot f(x) + m^2 - 1 = 0 \text{ 有 } 5 \text{ 个不同的实数根, 则实数 } m$$

的取值范围是\_\_\_\_\_.

13. (★★★★★江苏省南京师大附中 2020 届高三 11 月模拟考试数学试卷 14) 已知函数

$$f(x) = \begin{cases} |4^x - 1|, & x < 1 \\ \frac{6}{x+1}, & x \geq 1 \end{cases}, \text{ 若方程 } f(f(x)) = a \text{ 恰有 } 5 \text{ 个不同的实数根, 则实数 } a \text{ 的取值范围}$$

是\_\_\_\_\_.

14. (★★★★★2020 届江苏高考南通学科基地数学密卷九 13) 设函数

$$f(x) = (a+1)x^2 - bx + a (a, b \in R), \text{ 若函数 } y = f(x) \text{ 有零点, 且与函数 } y = f(f(x)) \text{ 的零点完全相同, 则 } b \text{ 的取值范围是_____}.$$

15. (★★★★★江苏扬州高邮市 2020 届高三上学期开学考试数学试卷(理科) 14) 已知

$$m \in R, \text{ 函数 } f(x) = \begin{cases} |3x+1|, & x < 1 \\ \log_2(x-1), & x > 1 \end{cases}, g(x) = x^2 - 2x + 2m - 1, \text{ 若函数 } y = f[g(x)] - m \text{ 有 } 4$$

个零点, 则实数  $m$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

【答案】

1.  $k = -\frac{9}{4}$  或  $k > 0$

2. 2

3.  $(1, 1 + \frac{1}{e})$

4.  $(0, \frac{1}{32})$

5. 2

6.  $[1, \frac{3}{2}) \cup \{2\}$

7.  $a = 1$  或  $a < 0$

8.  $\frac{3}{4} < a < 1$

9.  $(-1, 1 - \sqrt{3})$

10.  $a = \frac{1}{2}$  或  $\frac{2}{e} \leq a < \frac{4}{5}$

11.  $\{\frac{1}{4}\} \cup (\frac{3}{4}, \frac{5}{4})$

12.  $(-1, 1]$

13.  $(\frac{3}{2}, 3)$

14.  $(-4, 0]$

15.  $\{0\} \cup (\frac{5}{7}, 1)$