专题突破四　圆锥曲线的定点、定值与最值问题

与圆锥曲线有关的定点、定值问题是高考考查的热点，难度较大，此类问题常常作为第 17 题或第 18 题的第二问，常以直线与圆锥曲线的位置关系为背景，以坐标运算为基础，一般是证明满足条件的直线过定点，目标代数式为定值，或计算面积、长度、数量积等的最大值、最小值.求解此类问题的关键是引进变化的参数表示直线方程、数量积等，根据等式的恒成立、数式变换等寻找不受参数影响的量.

一、定点问题

例 1　设椭圆 E：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为 $e=\frac{\sqrt{2}}{2}$，且过点$\left(-1,\ -\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$.

(1)求椭圆 E 的方程；

(2)设椭圆 E 的左顶点是 A，若直线 l：$x-my-t=0$ 与椭圆 E 相交于不同的两点 M，N(M，N 与 A 均不重合)，若以 MN 为直径的圆过点 A，试判定直线 l 是否过定点，若过定点，求出该定点的坐标.

考点　椭圆中的定值、定点问题

题点　椭圆中的定点问题

解　(1)由 $e^2=\frac{c^2}{a^2}=\frac{a^2-b^2}{a^2}=\frac{1}{2}$,

可得 $a^2=2b^2$,

椭圆方程为$\frac{x^2}{2b^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$,

代入点$\left(-1,\ -\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$可得 $b^2=2$，$a^2=4$,

故椭圆 E 的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$.

(2)由 $x-my-t=0$ 得 $x=my+t$,

把它代入 E 的方程得$(m^2+2)y^2+2mty+t^2-4=0$,

设 $M(x_1,\ y_1)$，$N(x_2,\ y_2)$,

则 $y_1+y_2=-\frac{2mt}{m^2+2}$，$y_1y_2=\frac{t^2-4}{m^2+2}$,

$x_1+x_2=m(y_1+y_2)+2t=\frac{4t}{m^2+2}$,

$x_1x_2=(my_1+t)(my_2+t)$

$=m^2y_1y_2+tm(y_1+y_2)+t^2=\frac{2t^2-4m^2}{m^2+2}$.

因为以 MN 为直径的圆过点 A,

所以 $AM \perp AN$，

所以$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN}=(x_1+2，y_1)\ (x_2+2，y_2)$

$=x_1x_2+2(x_1+x_2)+4+y_1y_2$

$=\dfrac{2t^2-4m^2}{m^2+2}+2\times\dfrac{4t}{m^2+2}+4+\dfrac{t^2-4}{m^2+2}$

$=\dfrac{3t^2+8t+4}{m^2+2}$

$=\dfrac{(t+2)(3t+2)}{m^2+2}=0.$

因为 M，N 与 A 均不重合，所以 $t\neq-2$，

所以 $t=-\dfrac{2}{3}$，直线 l 的方程是 $x=my-\dfrac{2}{3}$，直线 l 过定点 $T\left(-\dfrac{2}{3}，0\right)$，

由于点 T 在椭圆内部，故满足判别式大于 0，

所以直线 l 过定点 $T\left(-\dfrac{2}{3}，0\right).$

点评　求定点问题，需要注意两个方面：

一是抓“特值”，涉及的定点多在两条坐标轴上，所以可以先从斜率不存在或斜率为 0 的特殊情况入手找出定点，为解题指明方向.

二是抓“参数之间的关系”，定点问题多是直线过定点，所以要抓住问题的核心，实质就是求解直线方程中参数之间的关系，所以要熟悉直线方程的特殊形式，若直线的方程为 $y=kx+b$，则直线 $y=kx+b$ 恒过点$(0，b)$，若直线方程为 $y=k(x-a)$，则直线恒过点$(a,0)$.

跟踪训练 1　已知抛物线 C 的顶点在原点，焦点在坐标轴上，点 $A(1,2)$为抛物线 C 上一点.

(1)求 C 的方程；

(2)若点 $B(1，-2)$在 C 上，过 B 作 C 的两弦 BP 与 BQ，若 $k_{BP}\cdot k_{BQ}=-2$，求证：直线 PQ 过定点.

考点　抛物线中的定值、定点问题

题点　抛物线中的定点问题

(1)**解**　当焦点在 x 轴上时，设 C 的方程为 $y^2=2px(p>0)$，代入点 $A(1,2)$得 $2p=4$，即 $y^2=4x$.

当焦点在 y 轴上时，设 C 的方程为 $x^2=2py(p>0)$，代入点 $A(1,2)$得 $2p=\dfrac{1}{2}$，即 $x^2=\dfrac{1}{2}y$.

综上可知，C 的方程为 $y^2=4x$ 或 $x^2=\dfrac{1}{2}y$.

(2)**证明**　因为点 $B(1，-2)$在 C 上，

所以曲线 C 的方程为 $y^2=4x$.

设点 $P(x_1，y_1)$，$Q(x_2，y_2)$，直线 PQ：$x=my+b$，

显然 m 存在，联立方程$\begin{cases}y^2=4x,\\x=my+b,\end{cases}$

得 $y^2-4my-4b=0$，

$\therefore y_1+y_2=4m$，$y_1y_2=-4b$.

$\because k_{BP}\,k_{BQ}=-2$，$\therefore \dfrac{y_1+2}{x_1-1}\cdot\dfrac{y_2+2}{x_2-1}=-2$，

$\therefore \dfrac{4}{y_1-2}\cdot\dfrac{4}{y_2-2}=-2$，

即 $y_1y_2-2(y_1+y_2)+12=0$，

$\therefore -4b-8m+12=0$，即 $b=3-2m$.

直线 PQ：$x=my+b=my+3-2m$，即 $x-3=m(y-2)$，

$\therefore$ 直线 PQ 过定点$(3,2)$.

二、定值问题

例 2　已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 过 $A(2,0)$，$B(0,1)$两点.

(1)求椭圆 C 的方程及离心率；

(2)设 P 为第三象限内一点且在椭圆 C 上，直线 PA 与 y 轴交于点 M，直线 PB 与 x 轴交于点 N，求证：四边形 $ABNM$ 的面积为定值.

考点　椭圆中的定值、定点问题

题点　椭圆中的定值问题

(1)**解**　由题意得 $a=2$，$b=1$，

所以椭圆 C 的方程为$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$.

又 $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{3}$，所以离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

(2)**证明**　设 $P(x_0，y_0)(x_0<0，y_0<0)$，

则 $x_0^2+4y_0^2=4$.

又 $A(2,0)$，$B(0,1)$，

所以直线 PA 的方程为 $y=\dfrac{y_0}{x_0-2}(x-2)$.

令 $x=0$，得 $y_M=-\dfrac{2y_0}{x_0-2}$，

从而 $BM=1-y_M=1+\dfrac{2y_0}{x_0-2}$.

直线 PB 的方程为 $y=\dfrac{y_0-1}{x_0}x+1$.

令 $y=0$，得 $x_N=-\dfrac{x_0}{y_0-1}$，

从而 $AN=2-x_N=2+\frac{x_0}{y_0-1}$.

所以四边形 $ABNM$ 的面积 $S=\frac{1}{2}AN\cdot BM$

$=\frac{1}{2}\left(2+\frac{x_0}{y_0-1}\right)\left(1+\frac{2y_0}{x_0-2}\right)$

$=\frac{x_0^2+4y_0^2+4x_0y_0-4x_0-8y_0+4}{2(x_0y_0-x_0-2y_0+2)}$

$=\frac{2x_0y_0-2x_0-4y_0+4}{x_0y_0-x_0-2y_0+2}=2$.

从而四边形 $ABNM$ 的面积为定值.

点评 (1)求定值问题的常用方法:

①从特殊入手，求出定值，再证明这个值与变量无关.

②直接推理、计算，并在计算推理的过程中消去变量，从而得到定值.

(2)定值问题就是在运动变化中寻找不变量的问题，基本思路是使用参数表示要解决的问题，证明要解决的问题与参数无关.在这类问题中选择消元的方向是非常关键的.

跟踪训练 2 已知点 F 为抛物线 C：$y^2=4x$ 的焦点，点 $D(1,2)$为抛物线 C 上一点.

(1)直线 l 过点 F 交抛物线 C 于 A，B 两点，若 $AB=5$，求直线 l 的方程；

(2)过点 D 作两条倾斜角互补的直线分别交抛物线 C 于异于点 D 的两点 P，Q，试证明直线 PQ 的斜率为定值，并求出该定值.

考点 抛物线中的定值、定点问题

题点 抛物线中的定值问题

解 (1)依题意，点 F 的坐标为$(1,0)$.

设直线 l 的方程为 $x=my+1$，

联立方程$\begin{cases}x=my+1,\\y^2=4x,\end{cases}$ 消去 x 并整理得

$y^2-4my-4=0$.

设 $A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$，

则 $y_1+y_2=4m$，$y_1y_2=-4$，

故 $AB=\sqrt{1+m^2}|y_1-y_2|$

$=\sqrt{1+m^2}\cdot\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=4(m^2+1)=5$，

解得 $m=\pm\frac{1}{2}$，

故直线 l 的方程为 $2x+y-2=0$ 或 $2x-y-2=0$.

(2)**方法一** 设直线 DP 的斜率为 $k(k\neq0)$，

则直线 DQ 的斜率为 $-k$.

令 $t=\frac{1}{k}$，

联立方程 $\begin{cases}x-1=t(y-2),\\ y^2=4x,\end{cases}$ 消去 x 并整理得

$y^2-4ty+8t-4=0$.

设 $P(x_P，y_P)$，因为点 D 的坐标为(1,2)，

所以 $2y_P=8t-4$，故 $y_P=4t-2$.

从而点 P 的坐标为$(4t^2-4t+1,4t-2)$，

用 $-t$ 替换点 P 坐标中的 t 可得点 Q 的坐标为$(4t^2+4t+1，-4t-2)$，

所以直线 PQ 的斜率为

$$\frac{(-4t-2)-(4t-2)}{(4t^2+4t+1)-(4t^2-4t+1)}=-1,$$

即直线 PQ 的斜率为定值 -1.

方法二 设 $P(x_3，y_3)$，$Q(x_4，y_4)$，

因为 P，Q 在抛物线 $y^2=4x$ 上，所以 $\begin{cases}y_3^2=4x_3,\\ y_4^2=4x_4,\end{cases}$

所以 $y_3^2-y_4^2=4(x_3-x_4)$.

因为 $x_3\neq x_4$，

所以 $k_{PQ}=\frac{y_3-y_4}{x_3-x_4}=\frac{4}{y_3+y_4}$.

同理，$k_{DP}=\frac{4}{y_3+2}$，$k_{DQ}=\frac{4}{y_4+2}$.

因为 $k_{DP}=-k_{DQ}$，所以 $\frac{4}{y_3+2}=-\frac{4}{y_4+2}$，

所以 $y_3+y_4=-4$，

即直线 PQ 的斜率 $k_{PQ}=\frac{4}{-4}=-1$(定值).

三、最值、范围问题

与圆锥曲线有关的最值与范围问题是高考考查的重点，多以直线和椭圆相交或直线和抛物线相切、相交为前提，考查弦长、面积或相关代数式的最值与范围问题，该问题综合性较强，具有一定的难度，其中最值与范围问题多与三角函数、平面几何等知识综合考查，形式多样.

例 3 已知平面内一动点 P 到点 $F(1,0)$的距离与点 P 到 y 轴的距离的差等于 1.过点 F 作两条斜率存在且互相垂直的直线 l_1，l_2，设 l_1 与轨迹 C 相交于点 A，B，l_2 与轨迹 C 相交于点 D，E，求 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{EB}$的最小值.

解 设动点 P 的坐标为$(x，y)$，

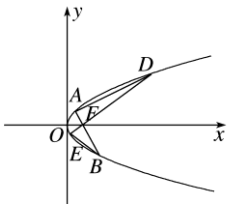
由题意有 $\sqrt{(x-1)^2+y^2}-|x|=1$.

化简得 $y^2=2x+2|x|$.

当 $x\geqslant 0$ 时，$y^2=4x$；当 $x<0$ 时，$y=0$.

所以动点 P 的轨迹 C 的方程为 $y^2=4x(x\geqslant 0)$和 $y=0\ (x<0)$.

如图，由题意知，直线 l_1 的斜率存在且不为 0，设为 k，则 l_1 的方程为 $y=k(x-1)$.



由$\begin{cases}y=k(x-1),\\ y^2=4x\end{cases}$

得 $k^2x^2-(2k^2+4)x+k^2=0$,

$\Delta=(2k^2+4)^2-4k^4>0$.

设 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$,

则 x_1，x_2 是上述方程的两个实根，

于是 $x_1+x_2=2+\frac{4}{k^2}$，$x_1x_2=1$.

因为 $l_1\perp l_2$，所以 l_2 的斜率为 $-\frac{1}{k}$.

设 $D(x_3,\ y_3)$，$E(x_4,\ y_4)$,

则同理可得 $x_3+x_4=2+4k^2$，$x_3x_4=1$.

故$\vec{AD}\cdot\vec{EB}=(\vec{AF}+\vec{FD})\cdot(\vec{EF}+\vec{FB})$

$=\vec{AF}\cdot\vec{EF}+\vec{AF}\cdot\vec{FB}+\vec{FD}\cdot\vec{EF}+\vec{FD}\cdot\vec{FB}$

$=|\vec{AF}|\cdot|\vec{FB}|+|\vec{FD}|\cdot|\vec{EF}|$

$=(x_1+1)(x_2+1)+(x_3+1)(x_4+1)$

$=x_1x_2+(x_1+x_2)+1+x_3x_4+(x_3+x_4)+1$

$=1+\left(2+\frac{4}{k^2}\right)+1+1+(2+4k^2)+1$

$=8+4\left(k^2+\frac{1}{k^2}\right)\geqslant 8+4\times 2\sqrt{k^2\cdot\frac{1}{k^2}}=16$.

当且仅当 $k^2=\frac{1}{k^2}$，即 $k=\pm 1$ 时，$\vec{AD}\cdot\vec{EB}$取得最小值 16.

点评　最值、范围问题的主要求解方法:

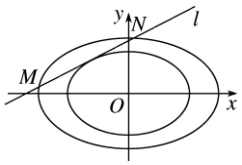
(1)几何法：若题目的条件和结论能明显体现几何特征及意义，则考虑利用图形性质来解决.

(2)代数法：若题目的条件和结论能体现一种明确的函数关系，则可先建立起目标函数或等量关系，利用判别式、基本不等式、函数的性质等进行求解.

跟踪训练 3　已知中心在原点 O，左焦点为 $F_1(-1,0)$的椭圆 C 的左顶点为 A，上顶点为 B，F_1 到直线 AB 的距离为$\frac{\sqrt{7}}{7}OB$.

(1)求椭圆 C 的方程；

(2)如图，若椭圆 C_1：$\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}=1(m>n>0)$，椭圆 C_2：$\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}=\lambda(\lambda>0$，且 $\lambda\neq1)$，则称椭圆 C_2 是椭圆 C_1 的 λ 倍相似椭圆.已知 C_2 是椭圆 C 的 3 倍相似椭圆，若椭圆 C 的任意一条切线 l 交椭圆 C_2 于 M，N 两点，试求弦长 MN 的取值范围.



考点　直线与椭圆的位置关系

题点　椭圆中的定点、定值、取值范围问题

解　(1)设椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，

$\therefore$直线 AB 的方程为$\frac{x}{-a}+\frac{y}{b}=1$.

$\therefore F_1(-1,0)$到直线 AB 的距离 $d=\frac{|b-ab|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{\sqrt{7}}{7}b$，

整理得 $a^2+b^2=7(a-1)^2$.

又 $b^2=a^2-1$，解得 $a=2$，$b=\sqrt{3}$，

$\therefore$椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

(2)椭圆 C 的 3 倍相似椭圆 C_2 的方程为$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{9}=1$.

①若切线 l 垂直于 x 轴，则其方程为 $x=\pm2$，易求得 $MN=2\sqrt{6}$；

②若切线 l 不垂直于 x 轴，可设其方程为 $y=kx+p$，

将 $y=kx+p$ 代入椭圆 C 的方程，

得$(3+4k^2)x^2+8kpx+4p^2-12=0$，

$\therefore\Delta=(8kp)^2-4(3+4k^2)(4p^2-12)=48(4k^2+3-p^2)=0$，

即 $p^2=4k^2+3$.(*)

记 M，N 两点的坐标分别为(x_1,y_1)，(x_2,y_2)，

将 $y=kx+p$ 代入椭圆 C_2 的方程，

得$(3+4k^2)x^2+8kpx+4p^2-36=0$，

此时 $x_1+x_2=-\frac{8kp}{3+4k^2}$，$x_1x_2=\frac{4p^2-36}{3+4k^2}$，

$\therefore |x_1-x_2|=\frac{4\sqrt{3(12k^2+9-p^2)}}{3+4k^2}$,

$\therefore MN=\sqrt{1+k^2}\cdot\frac{4\sqrt{3(12k^2+9-p^2)}}{3+4k^2}$

$=4\sqrt{6}\sqrt{\frac{1+k^2}{3+4k^2}}=2\sqrt{6}\sqrt{1+\frac{1}{3+4k^2}}$.

$\because 3+4k^2\geqslant 3$，$\therefore 1<1+\frac{1}{3+4k^2}\leqslant\frac{4}{3}$,

即 $2\sqrt{6}<2\sqrt{6}\sqrt{1+\frac{1}{3+4k^2}}\leqslant 4\sqrt{2}$.

结合①②，得弦长 MN 的取值范围为$[2\sqrt{6}，4\sqrt{2}]$.

达标检测

1.已知抛物线 $y^2=2x$ 的弦 AB 的中点的横坐标为$\frac{3}{2}$，则 AB 的最大值为(　　)

A.1　B.2　C.3　D.4

考点　求抛物线的最值问题

题点　根据抛物线定义转换求最值

答案　D

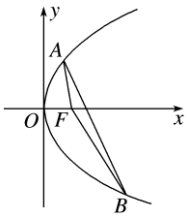
解析　设 $A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$，

则 $x_1+x_2=3$，

利用抛物线的定义可知，

$AF+BF=x_1+x_2+1=4$，

由图可知 $AF+BF\geqslant AB$，



即 $AB\leqslant 4$，

当直线 AB 过焦点 F 时，AB 取得最大值 4.

2.(2018 武汉高二检测)已知椭圆 $x^2+\frac{y^2}{4}=1$ 和点 $A\left(\frac{1}{2}，\frac{1}{2}\right)$，$B\left(\frac{1}{2}，1\right)$，若椭圆的某弦的中点在线段 AB 上，且此弦所在直线的斜率为 k，则 k 的取值范围为(　　)

A.$[-4，-2]$　　B.$[-2，-1]$

C.$[-4，-1]$　　D.$\left[-1，-\frac{1}{2}\right]$

考点　直线与椭圆的位置关系

题点　直线与椭圆相交时弦中点问题

答案　A

解析　由题易知弦所在直线斜率 $k\neq0$，

设弦端点 $C(x_1，y_1)$，$D(x_2，y_2)$，

中点为$(x_0，y_0)$，则$\begin{cases}x_1+x_2=2x_0，\\y_1+y_2=2y_0，\\\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=k.\end{cases}$

由$\begin{cases}x_1^2+\dfrac{y_1^2}{4}=1，\\x_2^2+\dfrac{y_2^2}{4}=1，\end{cases}$

得 $1+\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\cdot\dfrac{y_1+y_2}{x_1+x_2}=0.$

$\therefore1+\dfrac{1}{4}k\cdot\dfrac{y_0}{x_0}=0$，即 $y_0=\dfrac{-4x_0}{k}.$

$\because CD$ 的中点在线段 AB 上，

$\therefore\begin{cases}x_0=\dfrac{1}{2}，\\\dfrac{1}{2}\leqslant y_0\leqslant1，\end{cases}\qquad\therefore\dfrac{1}{2}\leqslant\dfrac{-2}{k}\leqslant1，$

解得$-4\leqslant k\leqslant-2$，故选 A.

3.已知椭圆$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 的长轴的两个端点为 A_1，A_2，点 P 是椭圆上的点，则当直线 PA_1，PA_2 的斜率 k_1，k_2 都存在时，$k_1k_2=$_____.

考点　直线与椭圆的位置关系

题点　椭圆中的定点、定值、取值范围问题

答案　$-\dfrac{3}{4}$

解析　设 $P(x_0，y_0)$，$x_0\neq\pm2$，则$\dfrac{y_0}{x_0-2}\cdot\dfrac{y_0}{x_0+2}=\dfrac{y_0^2}{x_0^2-4}$，

而$\dfrac{x_0^2}{4}+\dfrac{y_0^2}{3}=1$，

$\therefore y_0^2=3\left(1-\dfrac{x_0^2}{4}\right)$，

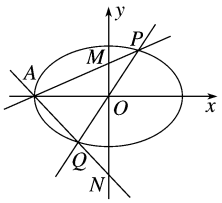
即$\dfrac{y_0^2}{4-x_0^2}=\dfrac{3}{4}$，

$\therefore k_1k_2=-\frac{3}{4}$.

4.已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率 $e=\frac{\sqrt{2}}{2}$，短轴长为 $2\sqrt{2}$.

(1)求椭圆 C 的标准方程；

(2)如图所示，椭圆 C 的左顶点为 A，过原点 O 的直线(与坐标轴不重合)与椭圆 C 交于 P，Q 两点，直线 PA，QA 分别与 y 轴交于 M，N 两点.试问以 MN 为直径的圆是否经过定点(与直线 PQ 的斜率无关)？并说明理由.



考点

题点

解 (1)由椭圆 C 的短轴长为 $2\sqrt{2}$，得 $b=\sqrt{2}$，

又由 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，得 $a^2=4$，

$\therefore$椭圆 C 的标准方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$.

(2)设 $P(x_0，y_0)$，则 $Q(-x_0，-y_0)$，且$\frac{x_0^2}{4}+\frac{y_0^2}{2}=1$，

即 $x_0^2+2y_0^2=4$.

易知 $A(-2,0)$，$\therefore$直线 PA 的方程为 $y=\frac{y_0}{x_0+2}(x+2)$，

$\therefore M\left(0，\frac{2y_0}{x_0+2}\right)$，

直线 QA 的方程为 $y=\frac{y_0}{x_0-2}(x+2)$，

$\therefore N\left(0，\frac{2y_0}{x_0-2}\right)$.

可得 MN 的中点为$\left(0，\frac{2x_0y_0}{x_0^2-4}\right)$，

根据两点间距离公式可得$|MN|=\left|\frac{8y_0}{x_0^2-4}\right|$，

$\therefore$以 MN 为直径的圆的方程为 $x^2+\left(y-\frac{2x_0y_0}{x_0^2-4}\right)^2=\left(\frac{4y_0}{x_0^2-4}\right)^2$，

即 $x^2+y^2-\frac{4x_0y_0}{x_0^2-4}y+\frac{4y_0^2}{x_0^2-4}=0$，

又$\because x_0^2-4=-2y_0^2$，

∴以 MN 为直径的圆的方程为 $x^2+y^2+\frac{2x_0}{y_0}y-2=0$，

令 $y=0$，则 $x^2-2=0$，解得 $x=\pm\sqrt{2}$，

∴以 MN 为直径的圆过定点$(\sqrt{2},0)$和$(-\sqrt{2},0)$.

针对训练

1.已知 A，B 是抛物线 $y^2=2px(p>0)$上的不同两点，满足$\vec{OA}\cdot\vec{OB}=0$(O 是原点).求证：

(1)A，B 两点的横坐标之积、纵坐标之积均为定值；

(2)直线 AB 过定点.

考点 抛物线中的定值、定点问题

题点 抛物线中的定点问题

证明 由题意设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$.

(1)∵$\vec{OA}\cdot\vec{OB}=0$，∴$OA\perp OB$，

∴$\frac{y_1}{x_1}=-\frac{x_2}{y_2}$，

∴$x_1x_2=-y_1y_2$，①

∵$\begin{cases}y_1^2=2px_1, & ②\\ y_2^2=2px_2, & ③\end{cases}$

∴$(y_1y_2)^2=4p^2x_1x_2$.④

由①④得 $y_1y_2=-4p^2$ 且 $x_1x_2=4p^2$，

∴A，B 两点的横坐标之积、纵坐标之积均为定值.

(2)当直线 AB 垂直于 x 轴时，

易知直线 AB 的方程为 $x=2p$.

当直线 AB 与 x 轴不垂直时，

由(1)中②－③，得

$(y_1-y_2)(y_1+y_2)=2p(x_1-x_2)$，

∴$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{2p}{y_1+y_2}$，

∴直线 AB 的方程为 $y-y_1=\frac{2p}{y_1+y_2}(x-x_1)$，

∴$y=\frac{2p}{y_1+y_2}x+y_1-\frac{2px_1}{y_1+y_2}=\frac{2p}{y_1+y_2}x+\frac{y_1y_2}{y_1+y_2}=\frac{2px}{y_1+y_2}+\frac{-4p^2}{y_1+y_2}=\frac{2p}{y_1+y_2}(x-2p)$.

故直线 AB 过定点$(2p,0)$.

2.已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别为 F_1 和 F_2，离心率 $e=\frac{\sqrt{2}}{2}$，连结椭圆的四个顶点所得四边形的面积为 $4\sqrt{2}$.

(1)求椭圆 C 的标准方程；

(2)设 A，B 是直线 l：$x=2\sqrt{2}$上的不同两点，若$\vec{AF_1}\cdot\vec{BF_2}=0$，求 AB 的最小值.

考点 直线与椭圆的位置关系

题点 椭圆中的定点、定值、取值范围问题

解 (1)由题意得$\begin{cases}e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2},\\ a^2=b^2+c^2,\\ S=\frac{1}{2}\times(2a)\times(2b)=4\sqrt{2},\end{cases}$

解得$\begin{cases}a=2,\\ b=\sqrt{2},\\ c=\sqrt{2},\end{cases}$

∴椭圆的标准方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$.

(2)由(1)知，$F_1(-\sqrt{2},0)$，$F_2(\sqrt{2},0)$，

设直线 l：$x=2\sqrt{2}$上的不同两点 A，B 的坐标分别为 $A(2\sqrt{2},y_1)$，$B(2\sqrt{2},y_2)$，

则$\vec{AF_1}=(-3\sqrt{2},-y_1)$，$\vec{BF_2}=(-\sqrt{2},-y_2)$，

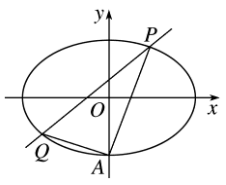
由$\vec{AF_1}\cdot\vec{BF_2}=0$ 得，$y_1y_2+6=0$，即 $y_2=-\frac{6}{y_1}$，

不妨设 $y_1>0$，则 $AB=|y_1-y_2|=y_1+\frac{6}{y_1}\geqslant 2\sqrt{6}$.

当且仅当 $y_1=\sqrt{6}$，$y_2=-\sqrt{6}$时取等号，

∴AB 的最小值为 $2\sqrt{6}$.

3.如图，椭圆 E：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$经过点 $A(0,-1)$，且离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$.



(1)求椭圆 E 的方程；

(2)经过点(1,1)，且斜率为 k 的直线与椭圆 E 交于不同的两点 P，Q(均异于点 A)，证明：直线 AP 与 AQ 的斜率之和为 2.

考点 直线与椭圆的位置关系

题点　椭圆中的定点、定值、取值范围问题

(1)**解**　由题设知$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$b=1$，

结合$a^2=b^2+c^2$，解得$a=\sqrt{2}$.

所以椭圆的方程为$\frac{x^2}{2}+y^2=1$.

(2)**证明**　由题设知，直线PQ的方程为$y=k(x-1)+1(k\neq 2)$，代入$\frac{x^2}{2}+y^2=1$，

得$(1+2k^2)x^2-4k(k-1)x+2k(k-2)=0$.

由已知$\Delta=[-4k(k-1)]^2-4(1+2k^2)\cdot 2k(k-2)>0$，得$k<-2$或$k>0$且$k\neq 2$，

设$P(x_1，y_1)$，$Q(x_2，y_2)$，

则$x_1+x_2=\frac{4k(k-1)}{1+2k^2}$，$x_1x_2=\frac{2k(k-2)}{1+2k^2}$.

从而直线AP，AQ的斜率之和

$$k_{AP}+k_{AQ}=\frac{y_1+1}{x_1}+\frac{y_2+1}{x_2}=\frac{kx_1+2-k}{x_1}+\frac{kx_2+2-k}{x_2}$$

$$=2k+(2-k)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\right)=2k+(2-k)\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}$$

$$=2k+(2-k)\frac{4k(k-1)}{2k(k-2)}=2k-2(k-1)=2.$$

所以直线AP与AQ的斜率之和为定值2.

4.已知圆C：$x^2+y^2+2x-2y+1=0$和抛物线E：$y^2=2px(p>0)$，圆心C到抛物线E的焦点F的距离为$\sqrt{17}$.

(1)求抛物线E的方程；

(2)不过原点O的动直线l交抛物线于A，B两点，且满足$OA\perp OB$.设M为圆C上一动点，求当动点M到直线l距离最大时的直线l的方程.

考点　直线与抛物线的位置关系

题点　求抛物线中的直线方程

解　(1)圆C：$x^2+y^2+2x-2y+1=0$可化为$(x+1)^2+(y-1)^2=1$，

则圆心C的坐标为$(-1,1)$，半径为1.

因为$F\left(\frac{p}{2}，0\right)$，

所以$CF=\sqrt{\left(\frac{p}{2}+1\right)^2+(0-1)^2}=\sqrt{17}$，

解得$p=6$.

故抛物线E的方程为$y^2=12x$.

(2)设直线l的方程为$x=my+t(t\neq 0)$，

$A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$.

由$\begin{cases}y^2=12x,\\x=my+t,\end{cases}$ 消去 x 并整理得 $y^2-12my-12t=0$，

所以 $y_1+y_2=12m$，$y_1y_2=-12t$，

因为 $OA\perp OB$，所以 $x_1x_2+y_1y_2=0$，

即$(m^2+1)y_1y_2+mt(y_1+y_2)+t^2=0$，

整理可得 $t^2-12t=0$，

又 $t\neq0$，所以 $t=12$.

所以直线 l 的方程为 $x=my+12$，

故直线 l 过定点 $P(12,0)$.

所以当 $CP\perp l$ 且点 M，C，P 在同一直线上时，动点 M 到直线 l 的距离最大，

此时 $k_{MP}=k_{CP}=\dfrac{1-0}{-1-12}=-\dfrac{1}{13}$，所以 $m=\dfrac{1}{13}$，

故直线 l 的方程为 $x=\dfrac{1}{13}y+12$，即 $13x-y-156=0$.