江苏省仪征中学2020—2021学年度第一学期高二数学周三练习（5）

一、选择题（本大题共4小题，共20.0分）

1. 椭圆$\frac{x^2}{m-2}+\frac{y^2}{m+5}=1$的焦点坐标是(　)

A. $(\pm7,0)$　　B. $(0,\pm7)$　　C. $(\pm\sqrt{7},0)$　　D. $(0,\pm\sqrt{7})$

2. 已知正数 x，y 满足$x+4y=2$，则$\frac{x+40y+4}{3xy}$的最小值为(　)

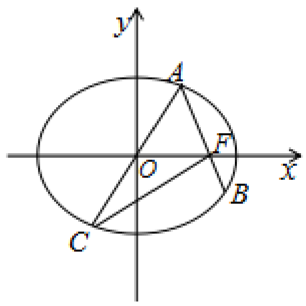
A. $\frac{85}{2}$　　B. 24　　C. 20　　D. 18

3. 设 e 是椭圆$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{k}=1$的离心率，且$e\in(\frac{1}{2},1)$，则实数 k 的取值范围是(　)

A. $(0,6)$　　B. $(0,6)\cup(\frac{32}{3},+\infty)$

C. $(0,3)\cup(\frac{16}{3},+\infty)$　　D. $(0,2)$

4. 如图，椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的右焦点为 F，过 F 的直线交椭圆于 A，B 两点，点 C 是点 A 关于原点的对称点，若$CF\perp AB$，$CF=AB$，则椭圆的离心率为(　)



A. $\sqrt{3}-1$　　B. $2-\sqrt{3}$　　C. $\sqrt{6}-\sqrt{3}$

二、不定项选择题（本大题共2小题，共10.0分）

5. 设 P 是椭圆 C：$\frac{x^2}{2}+y^2=1$上任意一点，F_1，F_2是椭圆 C 的左、右焦点，则(　)

A. $PF_1+PF_2=2\sqrt{2}$　　B. $-2<PF_1-PF_2<2$

C. $1\le PF_1\cdot PF_2\le2$　　D. $0\le\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}\le1$

6. 设正项等差数列$\{a_n\}$满足$(a_1+a_{10})^2=2a_2a_9+20$，则(　)

A. a_2a_9的最大值为 10　　B. a_2+a_9的最大值为$2\sqrt{10}$

C. $\frac{1}{a_2^2}+\frac{1}{a_9^2}$的最大值为$\frac{1}{5}$　　D. $a_2^4+a_9^4$的最小值为 200

三、填空题（本大题共4小题，共20.0分）

7. 经过两点$A(0,2)$、$B(\frac{1}{2},\sqrt{3})$的椭圆的标准方程为______.

8. 已知F_1，F_2为椭圆$\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{4}=1$的两个焦点，过$F_2$的直线交椭圆于 A，B 两点，若$|F_1A|+|F_1B|=5\sqrt{5}$，则$|AB|=$______.

9. 设F_1，F_2分别是椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点，点 P 在椭圆 C 上，线段$PF_1$的中点在 y 轴上，若$\angle PF_1F_2=30°$，则椭圆的离心率为________.

10. 已知$A(1,0)$，$B(-1,0)$，动点M满足直线AM与直线BM的斜率之积为定$m(m \neq 0)$. 若点M的轨迹是焦点在y轴上的椭圆(除去点A、B)，则m的取值范围是________.

四、解答题（本大题共2小题，共20.0分）

11. 某房地产开发商投资81万元建一座写字楼，第一年装修费为1万元，以后每年增加2万元，把写字楼出租，每年收入租金30万元.

(Ⅰ)若扣除投资和各种装修费，则从第几年开始获取纯利润？

(Ⅱ)若干年后开发商为了投资其他项目，有两种处理方案：①年平均利润最大时以46万元出售该楼;②纯利润总和最大时，以10万元出售该楼.问哪种方案更合理？

12. 已知椭圆G: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左焦点为$F(-\sqrt{2},0)$，且经过点$C(-\sqrt{2},1)$，A，B分别是G的右顶点和上顶点，过原点O的直线l与G交于P，Q两点(点Q在第一象限)，且与线段AB交于点M.

(Ⅰ)求椭圆G的标准方程;

(Ⅱ)若$|PQ|=3$，求直线l的方程;

(Ⅲ)若$\triangle BOP$的面积是$\triangle BMQ$的面积的4倍，求直线l的方程.

答案和解析

【答案】

1. D　2. D　3. B　4. C　5. ACD　6. ABD

7. $x^2+\frac{y^2}{4}=1$

8. $3\sqrt{5}$

9. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

10. $(1)(-\infty,-1)$；

(2)　3　.

11. 解：(Ⅰ)设第 n 年获取利润为 y 万元 n 年共收入租金 30n 万元，

付出装修费构成一个以 1 为首项，2 为公差的等差数列，

共$n+\frac{n(n-1)}{2}\times 2=n^2$，

因此利润$y=30n-(81+n^2)$，令$y>0$解得：$3<n<27$，

所以从第 4 年开始获取纯利润；

(Ⅱ)方案①：年平均利润$W=\frac{30n-(81+n^2)}{n}=30-\frac{81}{n}-n\leqslant 30-2\sqrt{81}=12$(当且仅当$\frac{81}{n}=n$，即$n=9$时取等号)，

所以 9 年后共获利润：$12\times 9+46=154$(万元)，

方案②利润$y=30n-(81+n^2)=-(n-15)^2+144$，

所以 15 年后共获利润：$144+\ 10=154$ (万元)，

两种方案获利一样多，而方案①时间比较短，所以选择方案①.

12. 解：(Ⅰ)由题意可得半焦距$c=\sqrt{2}$，椭圆的焦点坐标为$(-\sqrt{2},0)$，$(\sqrt{2},0)$，

由椭圆的定义可得$2a=\sqrt{(\sqrt{2}+\sqrt{2})^2+1}+1=4$，即$a=2$，则$b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{2}$，

即椭圆的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$；

(Ⅱ)设直线 l 的方程为$y=kx$，联立椭圆方程可得$x=\pm\frac{2}{\sqrt{1+2k^2}}$，

则$|PQ|=\sqrt{1+k^2}\cdot\frac{4}{\sqrt{1+2k^2}}=3$，解得$k=\pm\frac{\sqrt{14}}{2}$，

则直线 l 的方程为$y=\pm\frac{\sqrt{14}}{2}x$；

(Ⅲ)由$|OP|=|OQ|$，$\triangle BOP$的面积是$\triangle BMQ$的面积的 4 倍，

可得$S_{\triangle OBQ}=4S_{\triangle BMQ}$，即有$|OQ|=4|MQ|$，

即$\overrightarrow{OQ}=4\overrightarrow{MQ}$，则$x_Q=4(x_Q-x_M)$，$y_Q=4(y_Q-y_M)$，

可得$x_Q=\frac{4}{3}x_M$，$y_Q=\frac{4}{3}y_M$，

设直线 l 的方程为$y=nx$，与直线 AB：$x+\sqrt{2}y=2$，

可得$M(\frac{2}{1+\sqrt{2}n},\frac{2n}{1+\sqrt{2}n})$，即有$Q(\frac{8}{3(1+\sqrt{2}n)},\frac{8n}{3(1+\sqrt{2}n)})$，

代入椭圆方程可得$\frac{64}{9(1+\sqrt{2}n)^2}+2\cdot\frac{64n^2}{9(1+\sqrt{2}n)^2}=4$，

解得$n=\frac{9\sqrt{2}\pm8}{14}$，

则直线 l 的方程为$y=\frac{9\sqrt{2}\pm8}{14}x$.

【解析】

1. 解：椭圆$\frac{x^2}{m-2}+\frac{y^2}{m+5}=1$中，

$c=\sqrt{(m+5)-(m-2)}=\sqrt{7}$，

∴椭圆$\frac{x^2}{m-2}+\frac{y^2}{m+5}=1$的焦点坐标是$(0,\pm\sqrt{7})$.

故选：D.

利用椭圆的简单性质求解.

本题考查椭圆的焦点坐标的求法，是基础题，解题时要认真审题，注意椭圆的简单性质的灵活运用.

2. 解：∵正数 x，y 满足$x+4y=2$，$\frac{1}{2}x+2y=1$，

$\therefore\frac{x+40y+4}{3xy}=\frac{x+40y+2x+8y}{3xy}=\frac{3x+48y}{3xy}=\frac{x+16y}{xy}=\frac{1}{y}+\frac{16}{x}$，

$\therefore\frac{1}{y}+\frac{16}{x}=(\frac{1}{y}+\frac{16}{x})(\frac{1}{2}x+2y)=10+\frac{x}{2y}+\frac{32y}{x}\geq10+2\sqrt{\frac{x}{2y}\cdot\frac{32y}{x}}=10+8=18$，

当且仅当$\frac{x}{2y}=\frac{32y}{x}$时，$x=\frac{4}{3}$，$y=\frac{1}{6}$

故$\frac{x+40y+4}{3xy}$的最小值为 18，

故选：D.

由题意可得$\frac{x+40y+4}{3xy}=\frac{1}{y}+\frac{16}{x}$，再利用乘“1”法，根据基本不等式即可求出

本题主要考查了基本不等式的应用，考查了转化思想和计算能力，属于中档题.

3. 解：当$k>8$时，$c^2=k-8$，焦点在 y 轴上，由条件知$\frac{1}{4}<\frac{k-8}{k}<1$，解得$k>\frac{32}{3}$;

当$0<k<8$时，$c^2=8-k$，由条件知$\frac{1}{4}<\frac{8-k}{8}<1$，

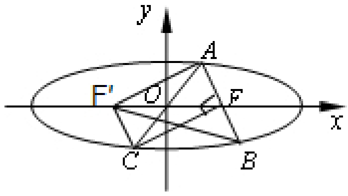
解得$0<k<6$，

故选：B．

分椭圆的焦点在 x，y 轴上，由离心率的范围求出 k 的取值范围．

考查椭圆的性质，属于基础题．

4. 解：作另一焦点F'，连接AF'和BF'和CF'，则四边形$FAF'C$为平行四边形，



$\therefore AF'=CF=AB$，且$AF'\perp AB$，则三角形ABF'为等腰直角三角形，

设$AF'=AB=x$，则$x+x+\sqrt{2}x=4a$，即$x=(4-2\sqrt{2})a$，

$\therefore AF=(2\sqrt{2}-2)a$，在三角形$AFF'$中由勾股定理得

$(AF')^2+(AF)^2=(2c)^2$，

$\therefore e^2=9-6\sqrt{2}=(\sqrt{6}-\sqrt{3})^2$．

则$e=\sqrt{6}-\sqrt{3}$

故选：C．

作另一焦点F'，连接AF'和BF'和CF'，则四边形$FAF'C$为平行四边形，进一步得到三角形ABF'为等腰直角三角形，设$AF'=AB=x$，求出 x，在三角形AFF'中由勾股定理得$(AF')^2+(AF)^2=(2c)^2$，即可求出e^2，则答案可求．

本题考查了椭圆的简单性质，考查了勾股定理在解题中的应用，是中档题．

5. 【分析】

本题考查椭圆定义和向量的数量积运算，是一道不错的综合题.根据椭圆定义和向量的数量积运算，逐一推导，将每个选项验证一下．

【解答】

解：椭圆长轴长为$2\sqrt{2}$，根据椭圆定义$PF_1+PF_2=2\sqrt{2}$，故A正确;

设 P 是椭圆 C 的任意一点，则$|PF_1-PF_2|\le F_1F_2=2\sqrt{2-1}=2$，

所以$-2\le PF_1-PF_2\le 2$，B错误;

$PF_1\cdot PF_2=\frac{1}{4}[(PF_1+PF_2)^2-(PF_1-PF_2)^2]$，而$0\le(PF_1-PF_2)^2\le 4$，

所以$1\le PF_1\cdot PF_2\le 2$，c 正确;

$\overline{PF_1}\cdot\overline{PF_2}=(\overline{OF_1}-\overline{OP})\cdot(\overline{OF_2}-\overline{OP})=\overline{OF_1}\cdot\ \overline{OF_2}-\overline{OP}\cdot(\overline{OF_1}+\overline{OF_2})+|\overrightarrow{OP}|^2=$

$|\overrightarrow{OP}|^2-1$，

又根据椭圆性质有$1\le oP\le\sqrt{2}$，

所以$0\le\overline{PF_1}\cdot\overline{PF_2}=|\overrightarrow{OP}|^2-1\le 1$，$D$正确．

故选ACD．

6. 【分析】

本题考查等差数列的通项公式，基本不等式，属于较难题.

依题意可得$a_2^2+a_9^2=20$.然后运用基本不等式逐一检验判断即可.

【解答】

解：因为正项等差数列$\{a_n\}$满足$(a_1+a_{10})^2=2a_2a_9+20$，

所以$(a_2+a_9)^2=2a_2a_9+20$，即$a_2^2+a_9^2=20$.

①$a_2a_9\leq\frac{a_2^2+a_9^2}{2}=\frac{20}{2}=10$，当且仅当$a_2=a_9=\sqrt{10}$时成立，故$A$选项正确.

②由于$\left(\frac{a_2+a_9}{2}\right)^2\leq\frac{a_2^2+a_9^2}{2}=10$，所以$\frac{a_2+a_9}{2}\leq\sqrt{10},a_2+a_9\leq2\sqrt{10}$，当且仅当

$a_2=a_9=\sqrt{10}$时成立，故B选项正确.

③$\frac{1}{a_2^2}+\frac{1}{a_9^2}=\frac{a_2^2+a_9^2}{a_2^2\cdot a_9^2}=\frac{20}{a_2^2\cdot a_9^2}\geq\frac{20}{\left(\frac{a_2^2+a_9^2}{2}\right)^2}=\frac{20}{10^2}=\frac{1}{5}$，当且仅当$a_2=a_9=\sqrt{10}$时成立，所以

$\frac{1}{a_2^2}+\frac{1}{a_9^2}$的最小值为$\frac{1}{5}$，故$C$选项错误.

④结合①的结论，有$a_2^4+a_9^4=(a_2^2+a_9^2)^2-2a_2^2\cdot a_9^2=400-2a_2^2\cdot a_9^2\geq400-2\times$

$10^2=200$，

当且仅当$a_2=a_9=\sqrt{10}$时成立，故D选项正确.

故选ABD.

7. 解：由题意，设椭圆的方程为$\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{n}=1$，则

$\begin{cases}\frac{4}{n}=1\\\frac{1}{4m}+\frac{3}{n}=1\end{cases}$，解得$\begin{cases}m=1\\n=4\end{cases}$.

∴椭圆的标准方程为$x^2+\frac{y^2}{4}=1$.

故答案为：$x^2+\frac{y^2}{4}=1$.

本题先设椭圆的方程为$\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{n}=1$，然后将两点$A(0,2)$、$B(\frac{1}{2},\sqrt{3})$代入椭圆的方程，解关于 m、n 的二元一次方程组，即可得到椭圆的标准方程.

本题主要考查椭圆的标准方程的求解，考查了转化思想和方程思想的应用，本题属基础题.

8. 【分析】

本题考查椭圆的定义与基本性质和应用，体现了数学转化思想方法，是基础题.

由椭圆的定义得$|AF_1|+|AF_2|=|BF_1|+|BF_2|=2a=4\sqrt{5}$，则$|AB|+|AF_1|+|BF_1|=8\sqrt{5}$，由此可求出$|AB|$的长.

【解答】

解：由椭圆的定义得

$|AF_1|+|AF_2|=|BF_1|+|BF_2|=2a=4\sqrt{5}$，

两式相加得$|AB|+|AF_1|+|BF_1|=8\sqrt{5}$，

若$|F_1A|+|F_1B|=5\sqrt{5}$，

则$|AB|=3\sqrt{5}$.

故答案为$3\sqrt{5}$.

9. 【分析】

本题考查椭圆的概念及标准方程与椭圆的性质，属于中档题目.

由线段PF_1的中点在 y 轴上，可得 P 点的横坐标，可得$PF_2\perp x$轴，则$PF_2\perp x$轴，由$\angle PF_1F_2=30°$，得$PF_2=\frac{1}{2}PF_1$，再由$PF_1+PF_2=2a$，求出$PF_2=\frac{2}{3}a$，$\tan\angle PF_1F_2=\frac{PF_2}{F_1F_2}=\frac{\frac{2}{3}a}{2c}=\frac{\sqrt{3}}{3}$得出离心率即可.

【解答】

解：因为线段PF_1的中点在 y 轴上，

设点 P 的横坐标为 x，$F_1(-c,0)$，

所以$-c+x=0$，

所以$x=c$，

所以点 P 与F_2的横坐标相等，

所以$PF_2\perp x$轴，

因为$\angle PF_1F_2=30°$，

所以$PF_2=\frac{1}{2}PF_1$.

因为$PF_1+PF_2=2a$，

所以$PF_2=\frac{2}{3}a$，$\tan\angle PF_1F_2=\frac{PF_2}{F_1F_2}=\frac{\frac{2}{3}a}{2c}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

所以$\frac{a}{c}=\sqrt{3}$，所以$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

故答案为$\frac{\sqrt{3}}{3}$.

10. 【分析】

本题考查动点的轨迹方程，椭圆、双曲线的标准方程，属于基础题.

由直接法求得轨迹方程为$\frac{y}{x-1}\cdot\frac{y}{x+1}=m$，即$x^2-\frac{y^2}{m}=1(x\neq\pm1)$，(1)由椭圆标准方程得$-m>1$，得 m 的范围；(2)由双曲线的标准方程得$a^2=1$，$b^2=m$，从而$c^2=1+m$，则$1+m=4$，得 m 的值.

【解答】

解：设点$M(x,y)$，则点 M 的轨迹方程是$\frac{y}{x-1}\cdot\frac{y}{x+1}=m$，

即$y^2=m(x^2-1)$，即$x^2-\frac{y^2}{m}=1(x\neq\pm1)$.

因为点 M 的轨迹是焦点在 y 轴上的椭圆，则$-m>1$，即$m<-1$，所以$m\in(-\infty,-1)$.

11. 本题主要考查了等差数列模型的运用，涉及等差数列求和，函数最值问题，考查了实际运用能力，属于中档题.

(Ⅰ)设第 n 年获取利润为 y 万元 n 年共收入租金 30n 万元，根据付出装修费构成一个以 1 为首项，2 为公差的等差数列，求出装修费用为$n+\frac{n(n-1)}{2}\times2=n^2$，得到$y=30n-(81+n^2)$，令$y>0$，解出对应 n 取值范围即可得解；

(Ⅱ)运用基本不等式求出方案①年平均利润最大值，并求出总共获得利润，再运用二次函数性质求出方案②纯利润总和最大时的条件，并求出总共获得利润，两者进行比较即可求解.

12. (Ⅰ)由题意可得$c=\sqrt{2}$，求得椭圆的焦点，运用椭圆的定义可得 a，进而得到 b，即有椭圆的方程；

(Ⅱ)设直线 l 的方程为$y=kx$，联立椭圆方程求得交点的横坐标，运用弦长公式可得$|PQ|$，解方程可得 k，进而得到所求直线方程；

(Ⅲ)由椭圆的性质和条件可得结合三角形的面积公式可得$|OQ|=4|MQ|$，即$\overrightarrow{OQ}=4\overrightarrow{MQ}$，运用向量共线定理的坐标表示，求得 M，Q 的坐标间的关系，设直线 l 的方程为$y=nx$，与直线 AB：$x+\sqrt{2}y=2$联立求得 M 的坐标，将 Q 的坐标代入椭圆方程，解方程可得斜率，进而得到所求直线方程.

本题考查椭圆的定义、方程和性质，考查直线方程和椭圆方程求交点，考查两直线的交点求法，以及点满足椭圆方程，考查化简运算能力，属于中档题.