

班级_____ 学号_____ 姓名_____

1. 在二项式 $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt[4]{x}}\right)^n$ 的展开式中, 前三项的系数成等差数列, 求展开式中的有理项.

1. 解析: 前三项系数为 $C_n^0, \frac{1}{2}C_n^1, \frac{1}{4}C_n^2$, 由已知 $C_n^1 = C_n^0 + \frac{1}{4}C_n^2$, 即 $n^2 - 9n + 8 = 0$, 解得 $n=8$ 或 $n=1$ (舍去).

$$T_{r+1} = C_8^r (\sqrt{x})^{8-r} (2\sqrt[4]{x})^{-r} = C_8^r \frac{1}{2^r} x^{4-\frac{3r}{4}} \because 4-\frac{3r}{4} \in \mathbb{Z} \text{ 且 } 0 \leq r \leq 8, r \in \mathbb{Z},$$

$$\therefore r=0, r=4, r=8. \therefore \text{展开式中 } x \text{ 的有理项为 } T_1 = x^4, T_5 = \frac{35}{8}x, T_9 = \frac{1}{256}x^{-2}$$

2. 7 名同学排队照相.

(1) 若排成两排照, 前排 3 人, 后排 4 人, 但其中甲必须在前排, 乙必须在后排, 有多少种不同的排法?

(2) 若排成一排照, 甲、乙、丙三人必须相邻, 有多少种不同的排法?

(3) 若排成一排照, 7 人中有 4 名男生, 3 名女生, 女生不能相邻, 有多少种不同的排法?

2. 分析:

(1) 第一步安排甲, 有 A_3^1 种排法; 第二步安排乙, 有 A_4^1 种排法; 第三步余下的 5 人排在剩下的 5 个位置上, 有 A_5^5 种排法, 由分步计数原理得, 符合要求的排法共有 $A_3^1 \cdot A_4^1 \cdot A_5^5 = 1440$ 种.

(2) 第一步, 将甲、乙、丙视为一个元素, 有其余 4 个元素排成一排, 即看成 5 个元素的全排列问题, 有 A_5^5 种排法; 第二步, 甲、乙、丙三人内部全排列, 有 A_3^3 种排法. 由分步计数原理得, 共有 $A_5^5 \cdot A_3^3 = 720$ 种排法.

(3) 第一步, 4 名男生全排列, 有 A_4^4 种排法; 第二步, 女生插空, 即将 3 名女生插入 4 名男生之间的 5 个空位, 这样可保证女生不相邻, 易知有 A_5^3 种插入方法. 由分步计数原理得, 符合条件的排法共有:

$$A_4^4 \cdot A_5^3 = 1440 \text{ 种.}$$

3. 如图所示, 在正三棱柱 $ABCA_1B_1C_1$ 中, $AA_1 \perp$ 平面 ABC , $AB=BC=CA=AA_1$, D 为 AB 的中点.

(1) 求证: $BC_1 \parallel$ 平面 DCA_1 ;

(2) 求二面角 $D-CA_1-C_1$ 的平面角的余弦值.

3. (1) 证明 如图所示, 以 BC 的中点 O 为原点建立空间直角坐标系 $Oxyz$, 设 $AB=BC=CA=AA_1=2$. 设 $\mathbf{n}=(x, y, z)$ 是平面 DCA_1 的一个法向量, 则

$$\text{又 } \overrightarrow{CD} = \left(\frac{3}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \overrightarrow{CA_1} = (1, 2, \sqrt{3}),$$

$$\text{所以 } \begin{cases} \sqrt{3}x + z = 0, \\ x + 2y + \sqrt{3}z = 0. \end{cases} \quad \text{令 } x=1, z=-\sqrt{3}, y=1,$$

所以 $\mathbf{n}=(1, 1, -\sqrt{3})$. 因为 $\overrightarrow{BC_1}=(-2, 2, 0)$, 所以 $\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{BC_1} = -2+2+0=0$. 又 $BC_1 \notin$ 平面 DCA_1 , 所以 $BC_1 \parallel$ 平面 DCA_1 .

(2) 解 设 $\mathbf{m}=(x_1, y_1, z_1)$ 是平面 CA_1C_1 的一个法向量,

$$\text{则又 } \overrightarrow{CC_1}=(0, 2, 0), \overrightarrow{CA_1}=(1, 2, \sqrt{3}), \text{ 所以 } \begin{cases} y_1=0, \\ x_1+2y_1+\sqrt{3}z_1=0. \end{cases} \quad \text{令 } z_1=1, x_1=-\sqrt{3},$$

$$\text{所以 } \mathbf{m}=(-\sqrt{3}, 0, 1). \text{ 所以 } \cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle = \frac{-2\sqrt{3}}{2\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{15}}{5}. \text{ 所以所求二面角的余弦值为 } -\frac{\sqrt{15}}{5}.$$

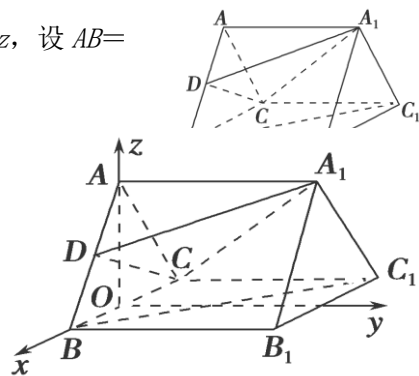
4. 一个袋子装有大小形状完全相同的 9 个球, 其中 5 个红球编号分别为 1, 2, 3, 4, 5.

4 个白球编号分别为 1, 2, 3, 4, 从袋中任意取出 3 个球.

(I) 求取出的 3 个球编号都不相同的概率;

(II) 记 X 为取出的 3 个球中编号的最大值, 求 X 的分布列与数学期望

4. (I) 设“取出的 3 个球编号都不相同”为事件 A , 则“取出的 3 个球中恰有两个球编号相同”为



事件 $\bar{A}$ ，则 $P(\bar{A}) = \frac{C_4^1 C_7^1}{C_9^3} = \frac{1}{3}$ 所以 $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = \frac{2}{3}$

(II) X 的取值为 2, 3, 4, 5,

$$P(X=2) = \frac{C_2^1 C_2^2 + C_2^2 C_2^1}{C_9^3} = \frac{1}{21}, \quad P(X=3) = \frac{C_2^1 C_4^2 + C_2^2 C_4^1}{C_9^3} = \frac{4}{21}$$

$$P(X=3) = \frac{C_2^1 C_6^2 + C_2^2 C_6^1}{C_9^3} = \frac{3}{7}, \quad P(X=5) = \frac{C_8^2}{C_9^3} = \frac{1}{3}$$

所以 X 的分布列为:

X	2	3	4	5
P	$\frac{1}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{3}$

$$X \text{ 的数学期望 } EX = 2 \times \frac{1}{21} + 3 \times \frac{4}{21} + 4 \times \frac{3}{7} + 5 \times \frac{1}{3} = \frac{85}{21}$$