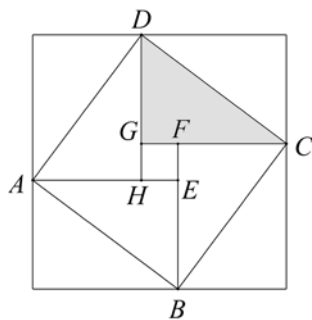


2020~2021 学年度苏锡常镇四市高三教学情况调研（二）

一、选择题：

- 若 $a \in \mathbf{R}$ ，则“ $a=2$ ”是“复数 $z=2-ai$ 的模为 $2\sqrt{2}$ ”（ i 为虚数单位）的（ ）
 A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
- 若集合 $A=\{x|y=\sqrt{2-x}\}$ ， $B=\{y|y=2^x\}$ ，则 $A \cap B=$ （ ）
 A. $(-\infty, 2]$ B. $[2, +\infty)$ C. $(0, 2]$ D. $[0, 2]$
- 从标有 1, 2, 3, 4, 5, 6 的 6 张卡片中，不放回地随机抽取两次，每次抽取一张. “在第一次抽到标号是 4 的条件下，第二次抽到的标号是奇数”的概率为（ ）
 A. $\frac{3}{5}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{10}$ D. $\frac{1}{12}$
- 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点为 F_2 ，左顶点为 A_1 ，若 E 上的点 P 满足 $PF_2 \perp x$ 轴， $\sin \angle PA_1F_2 = \frac{3}{5}$ ，则 E 的离心率为（ ）
 A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{2}{5}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{5}$
- 已知 $a = \sin 1$ ， $b = \cos 1$ ，则下列不等式正确的是（ ）
 A. $\log_a b < a^b < b^a$ B. $\log_a b < b^a < a^b$
 C. $a^b < b^a < \log_a b$ D. $b^a < a^b < \log_a b$
- 已知 $3\sin(\alpha - \frac{\pi}{6}) = \sin(\alpha + \frac{\pi}{6})$ ，则 $\cos 2\alpha =$ （ ）
 A. $\frac{1}{7}$ B. $-\frac{1}{7}$ C. $\frac{11}{13}$ D. $-\frac{11}{13}$
- 我国汉代数学家赵爽为了证明勾股定理，创制了一幅“弦图”，它由四个全等的直角三角形和一个正方形所构成（如图），后人称其为“赵爽弦图”. 在直角三角形 CGD 中，已知 $GC=4$ ， $GD=3$ ，在线段 EF 上任取一点 P ，线段 BC 上任取一点 Q ，则 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ}$ 的最大值为（ ）
 A. 25 B. 27 C. 29 D. 31
- 已知函数 $f(x) = x^2 - \frac{2x^2}{3^x + 1} + 1$. 若存在 $m \in (1, 4)$ 使得不等式 $f(4-ma) + f(m^2+3m) > 2$ 成立，则实数 a 的取值范围是（ ）
 A. $(-\infty, 7)$ B. $(-\infty, 7]$ C. $(-\infty, 8)$ D. $(-\infty, 8]$



(第 7 题图)

二、选择题：

- 某中学为了研究高三年级学生的身高和性别的相关性问题，从高三年级 800 名学生中随机抽取 200 名学生测量身高，测量数据的列联表如下：

单位：人

性别	身高		合计
	低于 170cm	不低于 170cm	
女	80	16	96
男	20	84	104
合计	100	100	200

下列说法正确的有（ ）

- A. 从列联表可以判断该样本是由分层抽样而得
 B. 从列联表可以看出该中学高三学生身高最高的是男生
 C. 有 99.9% 的把握认为该中学高三学生的身高与性别有关联
 D. 若该样本中男生身高 h (单位: cm) 服从正态分布 $N(175, 25)$, 则该样本中身高在区间 $(175, 180]$ 内的男生超过 30 人

附 1: $\chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ (其中 $n = a+b+c+d$).

临界值表:

$P(\chi^2 \geq x_0)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
x_0	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

附 2: 若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则随机变量 X 取值落在区间 $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$ 上的概率约为 68.3%.

10. 在数学发展史上, 曾经定义过下列两种函数: $1 - \cos \theta$ 称为角 θ 的正矢, 记作 $\text{versin } \theta$; $1 - \sin \theta$ 称为角 θ 的余矢, 记作 $\text{coversin } \theta$. 则()

A. $\text{versin} \frac{2021\pi}{6} = \frac{3}{2}$

B. 函数 $f(\theta) = \text{versin } \theta \cdot \text{coversin } \theta$ 的最大值为 $\frac{3+2\sqrt{2}}{2}$

C. 存在一个 θ , 使函数 $f(\theta) = \text{versin } \theta - \text{coversin } \theta$ 的值为 $\frac{3}{2}$

D. 将函数 $f(\theta) = \text{coversin } \theta$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位后, 可得到函数 $g(\theta) = \text{versin } \theta$ 的图象

11. 已知正四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的底面边长为 1, 侧棱长为 2, 点 M 为侧棱 CC_1 上的动点, $AM \perp$ 平面 α . 下列说法正确的有()

A. 异面直线 AM 与 B_1C 可能垂直

B. 直线 BC 与平面 α 不可能垂直

C. AB 与平面 α 所成角的正弦值的范围为 $(0, \frac{\sqrt{2}}{2}]$

D. 若 $M \in \alpha$ 且 $CM = MC_1$, 则平面 α 截正四棱柱所得截面多边形的周长为 $3\sqrt{2}$

12. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 且在 $\mathbf{R}$ 上可导, 其导函数记为 $f'(x)$. 下列命题正确的有()

A. 若函数 $f(x)$ 是奇函数, 则 $f'(x)$ 是偶函数

B. 若函数 $f'(x)$ 是偶函数, 则 $f(x)$ 是奇函数

C. 若函数 $f(x)$ 是周期函数, 则 $f'(x)$ 也是周期函数

D. 若函数 $f'(x)$ 是周期函数, 则 $f(x)$ 也是周期函数

三、填空题:

13. 已知抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的焦点为 F , 点 $A(0, 2)$. 若线段 FA 的中点 B 在抛物线上, 则 p 的值为_____.

14. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a , 公差为 b (其中 $a, b \in \mathbf{N}^*$), 且 $a_2 < ab < a_3$, 写出一个满足条件的数列 $\{a_n\}$ 的通项公式: _____.

15. 已知平面向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 满足 $|\mathbf{b}| = |\mathbf{c}| = 1$, $|\mathbf{b} - \mathbf{c}| = \sqrt{3}$, $2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = 1$, 则 $\mathbf{b}$ 与 $\mathbf{c}$ 的夹角为____; $|\mathbf{a}|$ 等于_____. (第一空 2 分, 第二空 3 分)

16. 一个组合体由上下两部分组成, 上部是一个半球, 下部是一个圆柱, 半球的底面与圆柱的上底面重合. 若该组合体的体积为 V , 则当圆柱底面半径 $r =$ _____时, 该组合体的表面积最小.

三、解答题:

17. 在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别为内角 A, B, C 的对边, 且 $a - b = a \cos B - b \cos A$.

(1) 求证: $a = b$;

(2) 若 $c = 4$, $\cos C = \frac{3}{5}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

解: (1) 因为 $a - b = a \cos B - b \cos A$,

由余弦定理得 $a - b = a \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} - b \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$,2 分

即 $\frac{(a-b)(a+b-c)}{c} = 0$,4 分

因为 $a + b > c$, 所以 $a = b$5 分

(2) 若 $c = 4, \cos C = \frac{3}{5}$, 因为 $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$,

则 $\frac{3}{5} = \frac{2a^2 - 16}{2a^2}$, 得 $a^2 = 20$,8 分

又因为 $0 < C < \pi$, 所以 $\sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} = \sqrt{1 - (\frac{3}{5})^2} = \frac{4}{5}$,

于是 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2} \times 20 \times \frac{4}{5} = 8$10 分

18. 在① $na_{n+1} - (n+1)a_n = n^2 + n$, ② $3S_n = (n+2)a_n$, ③ $T_{n+1} = \frac{(n+2)a_n T_n}{n}$ 这三个条件中任选一个

补充在下面问题中, 并解答下列题目.

设首项为 2 的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 前 n 项积为 T_n , 且_____.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n = (-1)^n a_n$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和.

解: 选①: 因为 $na_{n+1} - (n+1)a_n = n^2 + n$, 得 $\frac{a_{n+1}}{n+1} - \frac{a_n}{n} = 1$,2 分

所以数列 $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ 是等差数列, 首项为 2, 公差为 1,4 分

则 $\frac{a_n}{n} = 2 + (n-1) \cdot 1 = n+1$, 所以 $a_n = n(n+1)$6 分

选②: 因为 $3S_n = (n+2)a_n$, 当 $n \geq 2$ 时, $3S_{n-1} = (n+1)a_{n-1}$,

则 $3a_n = (n+2)a_n - (n+1)a_{n-1}$, 即 $(n-1)a_n = (n+1)a_{n-1}$,2 分

所以 $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n+1}{n-1}$, 所以 $a_n = \frac{n+1}{n-1} \cdot \frac{n}{n-2} \cdots \frac{4}{2} \cdot \frac{3}{1} \cdot a_1 = n(n+1)$4 分

当 $n=1$ 时, $a_1 = 2$ 也满足, 所以 $a_n = n(n+1)$6 分

选③: 因为 $T_{n+1} = \frac{(n+2)a_n T_n}{n}$, 即 $a_{n+1} = \frac{(n+2)a_n}{n}$,2 分

所以 $\frac{a_{n+1}}{n+2} = \frac{a_n}{n}$, 即 $\frac{a_{n+1}}{(n+2)(n+1)} = \frac{a_n}{(n+1)n}$,

所以数列 $\left\{\frac{a_n}{(n+1)n}\right\}$ 是常数列,4 分

所以 $\frac{a_n}{(n+1)n} = \frac{a_1}{2 \times 1} = 1$, 即 $a_n = n(n+1)$6 分

(2) 因为 $b_n = (-1)^n a_n$,

当 n 为偶数时, $b_1 + b_2 + \dots + b_n = -(1^2 + 1) + (2^2 + 2) - \dots + (n^2 + n)$
 $= [-1^2 + 2^2 - 3^2 + 4^2 - \dots - (n-1)^2 + n^2] + [-1 + 2 - 3 + 4 - \dots - (n-1) + n]$
 $= [3 + 7 + \dots + 2n-1] + \frac{n}{2} = \frac{(3+2n-1)}{2} \cdot \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = \frac{n(n+2)}{2}$9 分

当 n 为奇数时,

$b_1 + b_2 + \dots + b_n = -(1^2 + 1) + (2^2 + 2) - \dots + [(n-1)^2 + (n-1)] - n^2 - n$
 $= \frac{(n-1)(n+1)}{2} - n^2 - n = -\frac{(n+1)^2}{2}$.

所以 $b_1 + b_2 + \dots + b_n = \begin{cases} \frac{n(n+2)}{2}, & n \text{ 为偶数,} \\ -\frac{(n+1)^2}{2}, & n \text{ 为奇数.} \end{cases}$ 12 分

19. 如图, 在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $\triangle ABC$ 是边长为 2 的等边三角形, 平面 $ABC \perp$ 平面 AA_1B_1B , $AA_1 = AB$, $\angle A_1AB = 60^\circ$, O 为 AB 的中点, M 为 A_1C_1 的中点.

(1) 求证: $OM \parallel$ 平面 BB_1C_1C ;

(2) 求二面角 $C_1 - BA_1 - C$ 的正弦值.

(1) 证明: 取 B_1C_1 中点 E , 连接 BE ,

$\because A_1M = C_1M$, $\therefore ME = \frac{1}{2}A_1B_1$, $ME \parallel A_1B_1$,

$\because$ 三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$, O 为 AB 的中点,

$\therefore OB = \frac{1}{2}A_1B_1$, $OB \parallel A_1B_1$,

$\therefore OB = ME, OB \parallel ME$, $\therefore$ 四边形 $OMEB$ 为平行四边形,

$\therefore OM \parallel BE$3 分

$\because OM \not\subset$ 平面 BB_1C_1C , $BE \subset$ 平面 BB_1C_1C ,

$\therefore OM \parallel$ 平面 BB_1C_1C5 分

(2) $\because CA = CB$, $AO = OB$, $\therefore CO \perp AB$,

$\because$ 平面 $ABC \perp$ 平面 AA_1B_1B , 平面 $ABC \cap$ 平面 $AA_1B_1B = AB$,

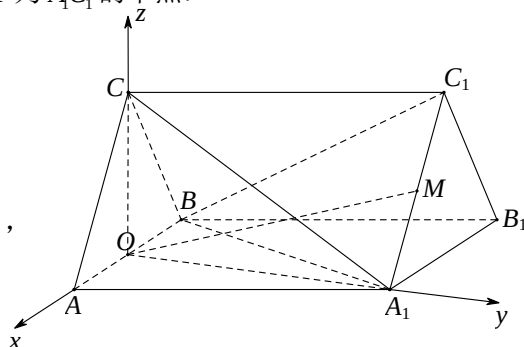
$CO \subset$ 平面 CAB , $\therefore CO \perp$ 平面 AA_1B_1B ,7 分

$\because AA_1 = AB$, $\angle A_1AB = 60^\circ$, $\therefore \triangle AA_1B$ 为等边三角形,

$\because AO = OB$, $\therefore OA_1 \perp AB$, $\therefore OA, OA_1, OC$ 两两垂直,

以 $\{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OC}\}$ 为正交基底建立如图所示的空间直角坐标系 $O - xyz$,

$\therefore A(1, 0, 0)$, $A_1(0, \sqrt{3}, 0)$, $B(-1, 0, 0)$, $C(0, 0, \sqrt{3})$, $C_1(-1, \sqrt{3}, \sqrt{3})$.



$$\therefore \overrightarrow{BC} = (1, 0, \sqrt{3}), \quad \overrightarrow{BA_1} = (1, \sqrt{3}, 0).$$

设平面 A_1BC 的一个法向量为 $\vec{n}_1 = (x_1, y_1, z_1)$,

$$\therefore \begin{cases} \vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{BC} = x_1 + \sqrt{3}z_1 = 0, \\ \vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{BA_1} = x_1 + \sqrt{3}y_1 = 0, \end{cases} \quad \text{取 } x_1 = \sqrt{3}, \text{ 得 } y_1 = -1, z_1 = -1.$$

$\therefore$ 平面 A_1BC 的一个法向量为 $\vec{n}_1 = (\sqrt{3}, -1, -1)$,9 分

$\overrightarrow{BA_1} = (1, \sqrt{3}, 0)$, $\overrightarrow{BC_1} = (0, \sqrt{3}, \sqrt{3})$. 设平面 A_1BC_1 的一个法向量 $\vec{n}_2 = (x_2, y_2, z_2)$,

$$\begin{cases} \vec{n}_2 \cdot \overrightarrow{BA_1} = x_2 + \sqrt{3}y_2 = 0, \\ \vec{n}_2 \cdot \overrightarrow{BC_1} = \sqrt{3}y_2 + \sqrt{3}z_2 = 0, \end{cases} \quad \text{取 } y_2 = 1, \text{ 得 } x_2 = -\sqrt{3}, z_2 = -1.$$

$\therefore$ 平面 A_1BC_1 的一个法向量为 $\vec{n}_2 = (-\sqrt{3}, 1, -1)$,11 分

$$\therefore \cos \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{-3 - 1 + 1}{\sqrt{3+1+1}\sqrt{3+1+1}} = -\frac{3}{5},$$

$\therefore \sin \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle = \frac{4}{5}$, 即二面角 $C_1 - BA_1 - C$ 的正弦值为 $\frac{4}{5}$12 分

20. 平面中, 已知动点 M 到定点 $F(-2, 0)$ 的距离与到定直线 $l: x = -\frac{3}{2}$ 的距离之比为定值 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

(1) 求动点 M 的轨迹 E 的方程;

(2) 过点 F 作互相垂直的两条直线 l_1, l_2 , 其中 l_1 交动点 M 的轨迹 E 于 M, N 两点, l_2 交圆 $D: (x-4)^2 + y^2 = 9$ 于 P, Q 两点, 点 R 是 P, Q 的中点, 求 $\triangle RMN$ 面积的最小值.

解: (1) 设 $M(x, y)$, 由题意得: $\frac{\sqrt{(x+2)^2 + y^2}}{\left|x + \frac{3}{2}\right|} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$,2 分

即 $(x+2)^2 + y^2 = \frac{4}{3}\left(x + \frac{3}{2}\right)^2$, 化简得 $E: \frac{x^2}{3} - y^2 = 1$4 分

(2) ①若 l_1 的斜率不存在, 则 $MN = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, $R(4, 0)$,

所以 $\triangle RMN$ 面积为 $S = \frac{1}{2} \times \frac{2\sqrt{3}}{3} \times 6 = 2\sqrt{3}$5 分

②若 l_1 的斜率存在, 且不为 0, 设为 k_1 , 则 $l_1: y = k_1(x+2)$,

代入 $E: \frac{x^2}{3} - y^2 = 1$ 中并化简得: $(1-3k_1^2)x^2 - 12k_1^2x - 12k_1^2 - 3 = 0$,

设 $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$, 则 $MN = |x_1 - x_2| \sqrt{1+k_1^2} = \frac{2\sqrt{3}(1+k_1^2)}{|1-3k_1^2|}$,7 分

$l_2: y = -\frac{1}{k_1}(x+2)$, 即 $x + k_1y + 2 = 0$, 所以 $FR = \sqrt{36 - \frac{36}{1+k_1^2}} = \frac{6\sqrt{k_1^2}}{\sqrt{1+k_1^2}}$,

且 $\frac{6}{\sqrt{1+k_1^2}} < 3$, 得 $k_1^2 > 3$,9 分

所以 $\triangle RMN$ 面积为 $S = \frac{1}{2} \times \frac{12\sqrt{3} \cdot \sqrt{(1+k_1^2)k_1^2}}{3k_1^2-1}$,10分

令 $3k_1^2-1=t \in (8, +\infty)$, 则 $S = \frac{6\sqrt{3} \sqrt{\frac{(t+4)(t+1)}{9}}}{t} = 2\sqrt{3} \sqrt{1+\frac{5}{t}+\frac{4}{t^2}} > 2\sqrt{3}$,

所以 S 的最小值为 $2\sqrt{3}$, 即 $\triangle RMN$ 面积的取值范围为 $2\sqrt{3}$12分

21. 某中学的一个高二学生社团打算在开学初组织部分同学打扫校园. 该社团通知高二同学自愿报名, 由于报名的人数多达 50 人, 于是该社团采用了在报名同学中用抽签的方式来确定打扫校园的人员名单. 抽签方式如下: 将 50 名同学编号, 通过计算机从这 50 个编号中随机抽取 30 个编号, 然后再次通过计算机从这 50 个编号中随机抽取 30 个编号, 两次都被抽取到的同学打扫校园.

(1) 设该校高二年级报名打扫校园的甲同学的编号被抽取到的次数为 Y , 求 Y 的数学期望;

(2) 设两次都被抽取到的人数为变量 X , 则 X 的可能取值是哪些? 其中 X 取到哪一个值的可能性最大? 请说明理由.

解: (1) 因为甲同学在第一次被抽到的概率是 $\frac{30}{50} = \frac{3}{5}$,1分

第二次被抽到的概率也是 $\frac{3}{5}$, 且两次相互独立, 所以 $Y \sim B(2, \frac{3}{5})$,3分

所以 $E(Y) = 2 \times \frac{3}{5} = \frac{6}{5}$4分

(2) 设两次都被抽到的人数的个数为随机变量 X ,

则 $10 \leq X \leq 30$ ($X \in \mathbf{N}^*$),6分

则 $P(X=n) = \frac{C_{50}^n \cdot C_{50-n}^{30-n} \cdot C_{20}^{30-n}}{C_{50}^{30} \cdot C_{50}^{30}}$,8分

令 $f(n) = C_{50}^n \cdot C_{50-n}^{30-n} \cdot C_{20}^{30-n} = \frac{50!}{(50-n)!n!} \cdot \frac{(50-n)!}{(30-n)!20!} \cdot \frac{20!}{(30-n)!(n-10)!}$

$= \frac{50!}{[(30-n)!]^2 n!(n-10)!}$,

所以 $\frac{f(n+1)}{f(n)} = \frac{50!}{[(29-n)!]^2 (n+1)!(n-9)!} \times \frac{[(30-n)!]^2 n!(n-10)!}{50!}$

$= \frac{(30-n)^2}{(n+1)(n-9)}$,

若 $(30-n)^2 - (n+1)(n-9) = 909 - 52n > 0$, 则 $n \leq 17$,11分

所以当 $n \leq 17$ 时, $f(n+1) > f(n)$; 当 $n \geq 18$ 时, $f(n+1) < f(n)$,

所以当 $n=18$ 时, $f(n)$ 最大, 即 $P(X=18)$ 最大,

所以参加打扫图书馆的人数最有可能是 18 人.12分

22. 已知函数 $f(x) = \frac{ax}{e^x}$ (e 为自然对数的底数).

(1) 若函数 $g(x) = x - f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数, 求实数 a 的取值范围;

(2) 证明: 对任意实数 a , 函数 $h(x) = f(x) - \ln x$ 有且只有一个零点.

解: (1) 因为函数 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $g'(x) = 1 - \frac{a(1-x)}{e^x} \geq 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立,1分

所以 $a(1-x) \leq e^x$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立,

当 $x=1$ 时, $a \in \mathbf{R}$,

当 $x>1$ 时, $a \geq \frac{e^x}{1-x}$ 在 $(1, +\infty)$ 上恒成立, 令 $t(x) = \frac{e^x}{1-x}$, 则 $t'(x) = \frac{e^x(2-x)}{(1-x)^2}$,

x	$(1, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$t'(x)$	$+$	0	$-$
$t(x)$	增	极大值	减

则 $t(x)_{\max} = t(2) = -e^2$, 所以 $a \geq -e^2$.

当 $0 < x < 1$ 时, $a \leq \frac{e^x}{1-x}$ 在 $(0, 1)$ 上恒成立, 且 $t(x) = \frac{e^x}{1-x}$ 在 $(0, 1)$ 上增,

所以 $a \leq 1$, 所以 $-e^2 \leq a \leq 1$4 分

(2) 首先证明当 $x > 0$ 时, $e^x \geq x + 1 > x$.

证明: 设 $p(x) = e^x - x - 1$, 则 $p'(x) = e^x - 1$, 令 $p'(x) = 0$, 得 $x = 0$,

当 $x < 0$ 时, $p'(x) < 0$, $p(x)$ 单调递减; 当 $x > 0$ 时, $p'(x) > 0$, $p(x)$ 单调递增.

所以 $p(x)_{\min} = p(0) = 0$, 所以 $p(x) = e^x - x - 1 \geq 0$,

所以 $e^x \geq x + 1 > x$6 分

①当 $a = 0$ 时, 结论显然成立;7 分

②当 $a > 0$ 时, $h'(x) = \frac{a(1-x)}{e^x} - \frac{1}{x}$,

(i) 当 $0 < x \leq 1$ 时, $h(x) = \frac{ax}{e^x} - \ln x > 0$ 恒成立,

(ii) 当 $x > 1$ 时, $h'(x) = \frac{a(1-x)}{e^x} - \frac{1}{x} < 0$, 所以 $h(x)$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上单调递减, .

且 $h(1) = \frac{a}{e} > 0$, $h(e^a) = \frac{ae^a}{e^{e^a}} - a = \frac{a(e^a - e^{e^a})}{e^{e^a}}$.

所以 $e^a - e^{e^a} < 0$, 即 $h(e^a) < 0$, 所以 $h(x)$ 在 $(1, e^a)$ 上只有一个零点,

所以 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上只有一个零点.9 分

③当 $a < 0$ 时, (i) 当 $x > 1$ 时, $h(x) = \frac{ax}{e^x} - \ln x < 0$ 恒成立,

(ii) 当 $0 < x \leq 1$ 时, $h'(x) = \frac{a(1-x)}{e^x} - \frac{1}{x} < 0$, 所以 $h(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减,

且 $h(1) = \frac{a}{e} < 0$, $h(e^a) = \frac{ae^a}{e^{e^a}} - a = \frac{a(e^a - e^{e^a})}{e^{e^a}} > 0$,

所以 $h(x)$ 在 $(e^a, 1)$ 上只有一个零点,11 分

所以 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有且只有一个零点.12 分