

2019 届高三年级学情调研考试

数 学

2018.10

一、填空题：本大题共 14 小题，每小题 5 分，共 70 分。请把答案填写在答题卡相应位置上。

1. 集合 $A = \{x | 0 < x < 2, x \in R\}$, 集合 $B = \{x | 1 \leq x \leq 3, x \in R\}$, 则 $A \cap B = \underline{\hspace{2cm} \blacktriangle \hspace{2cm}}$.

2. 设 i 是虚数单位, 若复数 $z = \frac{3-2i}{i}$, 则 z 的虚部为 $\underline{\hspace{2cm} \blacktriangle \hspace{2cm}}$.

3. 执行所示伪代码, 若输出的 y 的值为 17, 则输入的 x 的值是 $\underline{\hspace{2cm} \blacktriangle \hspace{2cm}}$.

4. 在平面直角坐标系 xOy 中, 点 P 在角 $\frac{2\pi}{3}$ 的终边上, 且 $OP = 2$, 则

点 P 的坐标为 $\underline{\hspace{2cm} \blacktriangle \hspace{2cm}}$.

```

Read  x
If  x ≤ 2 Then
    y ← 5x + 2
Else
    y ← 2x + 1
End  If
Print y
    
```

(第 3 题)

5. 某学校要从 A, B, C, D 这四名老师中选择两名去新疆支教

(每位老师被安排是等可能的), 则 A, B 两名老师都被选中

的概率是 $\underline{\hspace{2cm} \blacktriangle \hspace{2cm}}$.

6. 函数 $y = \sqrt{\frac{1}{8} - 2^{x-1}}$ 的定义域为 $\underline{\hspace{2cm} \blacktriangle \hspace{2cm}}$.

7. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_4 = 9$, $a_8 = 17$, 则数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = \underline{\hspace{2cm} \blacktriangle \hspace{2cm}}$.

8. 已知 $\sin \theta = -\frac{3}{5}$, $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$, 则 $\tan 2\theta = \underline{\hspace{2cm} \blacktriangle \hspace{2cm}}$.

9. 已知实数 $2, m, 8$ 构成一个等比数列, 则椭圆 $\frac{x^2}{m} + y^2 = 1$ 的离心率是 $\underline{\hspace{2cm} \blacktriangle \hspace{2cm}}$.

10. 若曲线 $y = \frac{x-2}{x+1}$ 在 $x=1$ 处的切线与直线 $ax + y + 1 = 0$ 垂直, 则实数 a 等于 $\underline{\hspace{2cm} \blacktriangle \hspace{2cm}}$.

11. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $B = 2A$, 则 $\frac{2}{\tan A} - \frac{3}{\tan B}$ 的最小值为 $\underline{\hspace{2cm} \blacktriangle \hspace{2cm}}$.

12. 已知圆 $C: (x+2)^2 + (y-2)^2 = 1$, 直线 $l: y = k(x-5)$, 若在圆 C 上存在一点 P ,

在直线 l 上存在一点 Q , 使得 PQ 的中点是坐标原点 O , 则实数 k 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm} \blacktriangle \hspace{2cm}}$.

13. 在直角梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $AB = 2$, $\angle DAB = 90^\circ$, $AD = DC = 1$,

AC 与 BD 相交于点 Q , P 是线段 BC 上一动点, 则 $\overrightarrow{BQ} \cdot \overrightarrow{AP}$ 的取值范围是_____▲_____.

14. 已知函数 $f(x) = x^2 + ax + b (a, b \in \mathbb{R})$, 若存在非零实数 t , 使得 $f(t) + f(\frac{1}{t}) = -2$,

则 $a^2 + 4b^2$ 的最小值为_____▲_____.

二、解答题：本大题共 6 小题，共计 90 分。请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. (本小题满分 14 分)

在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且 $(a+b-c)(a+b+c) = 3ab$.

(1) 求角 C 的大小;

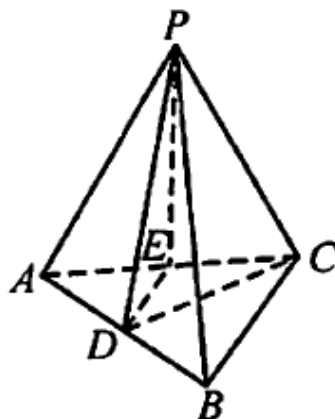
(2) 若 $\sin(B - \frac{\pi}{3}) = \frac{3}{5}$, 求 $\sin A$ 的值.

16. (本小题满分 14 分)

如图, 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $AC = BC$, 点 D 在 AB 上, E 为 AC 的中点, 且 $BC \parallel$ 平面 PDE .

(1) 求证: $DE \parallel$ 平面 PBC ;

(2) 若平面 $PCD \perp$ 平面 ABC , 求证: 平面 $PAB \perp$ 平面 PCD .



17. (本小题满分 14 分)

已知函数 $f(x) = x|x-1| - \frac{1}{4}$.

(1) 解方程 $f(x) = 0$;

(2) 设 $g(x) = xf(x)$, 求 $g(x)$ 在 $[0, 2]$ 上的最小值.

18. (本小题满分 16 分)

江苏省第十九届运动会将于 2018 年在扬州举行, 为此某礼品公司计划推出一系列纪念品, 其中一个工艺品需要设计成如图所示的一个结构 (该图为轴对称图形), 其中 $\triangle ABC$ 的支撑杆 AB

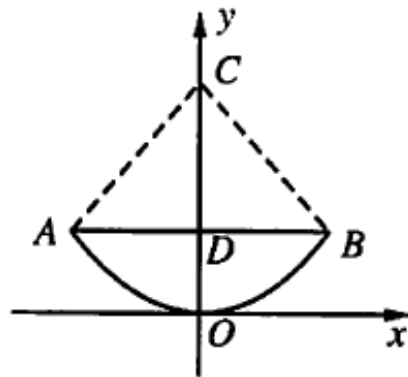
, CD 由长为 3 的材料弯折而成 (即 $AB + CD = 3$), AB 边的长为 $2t$ ($1 \leq t \leq \frac{3}{2}$) (CA, CB 另外用彩色线连结, 此处不计). 在如图所示的平面直角坐标系中, 支撑杆曲线 AOB 拟从以下两种曲线中选择一种: 曲线 C_1 是一段余弦曲线, 其表达式为 $y = 1 - \cos x$, 记结构的

最低点 O 到点 C 的距离为 $h_1(t)$; 曲线 C_2 是抛物线 $y = \frac{4}{9}x^2$ 的一段, 此时记结构的最低点 O 到点 C 的距离为 $h_2(t)$.

(1) 求函数 $h_1(t)$, $h_2(t)$ 的表达式;

(2) 要使得点 O 到点 C 的距离最大, 应选用哪一种曲线? 此时最大值是多少?

(参考数据 $\cos 1 = 0.54$)

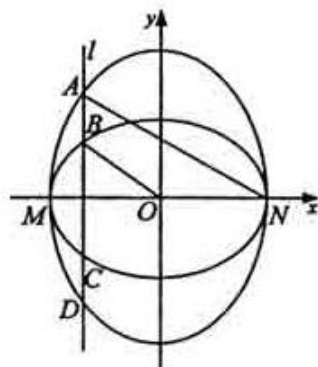


19. (本小题满分 16 分)

如图，已知椭圆 C_1 的中心在原点 O ，长轴左、右端点 M, N 在 x 轴上，椭圆 C_2 的短轴为 MN ，且 C_1, C_2 的离心率都为 e ，直线 $l \perp MN$ ， l 与 C_1 交于两点，与 C_2 交于两点，这四点按纵坐标从大到小依次为 A, B, C, D 。

(1) 设 $e = \frac{1}{2}$ ，求 $\frac{BC}{AD}$ 值；

(2) 当 e 变化时，是否存在直线 l ，使得 $BO \parallel AN$ ，并说明理由。



20. (本小题满分 16 分)

已知函数 $f(x) = x \ln x - (k+1)x$ ， $k \in \mathbb{R}$ 。

(1) 若 $k = -1$ ，求 $f(x)$ 的最值；

(2) 若对于任意 $x \in [e, e^3]$ ，都有 $f(x) < 4 \ln x$ 成立，求实数 k 的取值范围；

(3) 若对于任意 $x \in [2, e^2]$ ，都有 $f(x) > -2x - k$ 成立，求整数 k 的最大值。

2019 届高三年级学情调研考试

数学附加题

2018. 10

21. (A) 【选修4-2：矩阵与变换】（本小题满分 10 分）

设 $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ 是矩阵 $M = \begin{bmatrix} a & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ 的一个特征向量.

(1) 求实数 a 的值;

(2) 求矩阵 M 的特征值.

(B) 【选修4-4：坐标系与参数方程】（本小题满分10分）

圆 $C: \rho = 2\cos(\theta - \frac{\pi}{4})$, 与极轴交于点 A (异于极点 O), 求直线 CA 的极坐标方程.

22. (本小题满分10分)

盒子中装有四张大小形状均相同的卡片, 卡片上分别标有数 $-i, i, -2, 2$ 其中 i 是虚数单位. 称“从盒中随机抽取一张, 记下卡片上的数后并放回”为一次试验 (设每次试验的结果互不影响).

(1) 求事件 A “在一次试验中, 得到的数为虚数”的概率 $P(A)$ 与事件 B “在四次试验中, 至少有两次得到虚数” 的概率 $P(B)$;

(2) 在两次试验中, 记两次得到的数分别为 a, b , 求随机变量 $\xi = |a \cdot b|$ 的分布列与数学期望 $E\xi$.

23. (本小题满分10分)

在自然数列 $1, 2, 3, \dots, n$ 中, 任取 $k (0 \leq k \leq n), k \in N$ 个元素, 其余 $n-k$ 个元素变动位置, 得到不同的新数列. 由此产生的不同新数列的个数记为 $P_n(k)$.

(1) 求 $P_3(1), P_4(0)$;

(2) 证明: $\sum_{k=0}^n k P_n(k) = n \sum_{k=0}^{n-1} P_{n-1}(k)$, 并求出 $\sum_{k=0}^n k P_n(k)$ 的值.

2019 届高三学情调研考试数学答案 2018.10

一、填空题.

1. [1,2] 2. -3 3. 4 4. $(-1, \sqrt{3})$ 5. $\frac{1}{6}$ 6. $(-\infty, -2]$ 7. $n^2 + 2n$ 8. $\frac{24}{7}$
 9. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 10. $\frac{4}{3}$ 11. $\sqrt{3}$ 12. $[\frac{3-\sqrt{3}}{4}, \frac{3+\sqrt{3}}{4}]$ 13. $[-\frac{8}{3}, -\frac{2}{3}]$ 14. $\frac{16}{5}$

一、解答题.

15. (本小题满分 14 分)

在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且 $(a+b-c)(a+b+c) = 3ab$.

(1) 求角 C 的大小;

(2) 若 $\sin(B - \frac{\pi}{3}) = \frac{3}{5}$, 求 $\sin A$ 的值.

解析: (1) 由 $(a+b-c)(a+b+c) = 3ab$, 得 $(a+b)^2 - c^2 = 3ab$,

即 $a^2 + b^2 - c^2 = ab$ 2 分

由余弦定理得 $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{ab}{2ab} = \frac{1}{2}$,4 分

因为 $C \in (0, \pi)$, 所以 $C = \frac{\pi}{3}$ 6 分

(2) 由 (1) 知 $C = \frac{\pi}{3}$, 则 $B \in (0, \frac{2\pi}{3})$, 则 $B - \frac{\pi}{3} \in (-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$,8 分

因为 $\sin(B - \frac{\pi}{3}) = \frac{3}{5}$, 所以 $\cos(B - \frac{\pi}{3}) = \sqrt{1 - \sin^2(B - \frac{\pi}{3})} = \frac{4}{5}$ 10 分

又因为 $A + B + C = \pi$,

所以 $\sin A = \sin[\pi - (B + C)] = \sin(B + C) = \sin(B + \frac{\pi}{3})$

$= \sin[(B - \frac{\pi}{3}) + \frac{2\pi}{3}]$ 12 分

$= \sin(B - \frac{\pi}{3}) \cos \frac{2\pi}{3} + \cos(B - \frac{\pi}{3}) \sin \frac{2\pi}{3}$

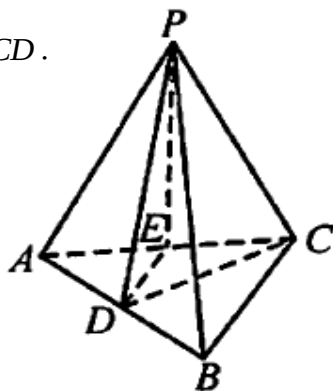
$= \frac{3}{5} \times (-\frac{1}{2}) + \frac{4}{5} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4\sqrt{3} - 3}{10}$ 14 分

16. (本小题满分 14 分)

如图,在三棱锥 $P-ABC$ 中, $AC=BC$, 点 D 在 AB 上, E 为 AC 的中点, 且 $BC \parallel$ 平面 PDE .

(1) 求证: $DE \parallel$ 平面 PBC ;

(2) 若平面 $PCD \perp$ 平面 ABC , 求证: 平面 $PAB \perp$ 平面 PCD .



解析: (1) 因为 $BC \parallel$ 平面 PDE , $BC \subset$ 平面 ABC ,

平面 $PDE \cap$ 平面 $ABC = DE$,

所以 $BC \parallel DE$,4 分

因为 $DE \not\subset$ 平面 PBC , $BC \subset$ 平面 PBC ,

所以 $DE \parallel$ 平面 PBC 6 分

(2) 在 $\triangle ABC$ 中, 因为 E 为 AC 的中点, $DE \parallel BC$,

所以 D 是 AB 的中点8 分

因为 $AC = BC$, 所以 $AB \perp CD$,10 分

因为平面 $PCD \perp$ 平面 ABC ,

平面 $PCD \cap$ 平面 $ABC = CD$, $AB \subset$ 平面 ABC ,

所以 $AB \perp$ 平面 PCD ,12 分

因为 $AB \subset$ 平面 PAB ,

所以平面 $PAB \perp$ 平面 PCD 14 分

17. (本小题满分 14 分)

已知函数 $f(x) = x|x-1| - \frac{1}{4}$.

(1) 解方程 $f(x) = 0$;

(2) 设 $g(x) = xf(x)$, 求 $g(x)$ 在 $[0, 2]$ 上的最小值.

$$(1) \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - x - \frac{1}{4} = 0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x < 1 \\ -x^2 + x - \frac{1}{4} = 0 \end{cases}, \text{ 解得: } x = \frac{\sqrt{2}+1}{2} \text{ 或 } x = \frac{1}{2}; \quad \dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$(2) g(x) = x^2|x-1| - \frac{1}{4}x = \begin{cases} x^3 - x^2 - \frac{1}{4}x & (0 \leq x \leq 1) \\ -x^3 + x^2 - \frac{1}{4}x & (1 < x \leq 2) \end{cases},$$

$$\text{则 } g'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 2x - \frac{1}{4} & (0 \leq x \leq 1) \\ -3x^2 + 2x - \frac{1}{4} & (1 < x \leq 2) \end{cases} \quad \dots\dots 6 \text{ 分}$$

(1) 当 $1 < x \leq 2$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 在 $[1, 2]$ 上单调减, 此时 $g(x)_{\min} = g(2) = -\frac{9}{2} \dots\dots 8 \text{ 分}$

(2) 当 $0 \leq x \leq 1$ 时, 令 $g'(x) = 0$, 解得: $x = \frac{2+\sqrt{7}}{6}$ 或 $x = \frac{2-\sqrt{7}}{6}$ (舍去);

$\therefore$ 当 $0 \leq x < \frac{2+\sqrt{7}}{6}$ 时, $g'(x) < 0$; 当 $\frac{2+\sqrt{7}}{6} < x \leq 1$ 时, $g'(x) > 0$;

$\therefore g(x)$ 在 $[0, \frac{2+\sqrt{7}}{6}]$ 上单调减, 在 $[\frac{2+\sqrt{7}}{6}, 1]$ 上单调增,

此时 $g(x)_{\min} = g(\frac{2+\sqrt{7}}{6}) = -\frac{17+7\sqrt{7}}{108}$ 12 分

又 $\because -\frac{17+7\sqrt{7}}{108} > -\frac{9}{2}$,13 分

$g(x)$ 在 $[0, 2]$ 上的最小值为 $g(2) = -\frac{9}{2}$ 14 分

18. (本小题满分 16 分)

江苏省第十九届运动会将于 2018 年在扬州举行, 为此某礼品公司计划推出一系列纪念品, 其中一个工艺品需要设计成如图所示的一个结构 (该图为轴对称图形), 其中 $\triangle ABC$ 的支撑杆 AB , CD 由长为 3 的材料弯折而成 (即 $AB + CD = 3$), AB 边的长为 $2t$ ($1 \leq t \leq \frac{3}{2}$) (CA, CB 另外用彩色线连结, 此处不计). 在如图所示的平面直角坐标系中, 支撑杆曲线 AOB 拟从以下两种

曲线中选择一种: 曲线 C_1 是一段余弦曲线, 其表达式为 $y = 1 - \cos x$, 记结构的

最低点 O 到点 C 的距离为 $h_1(t)$; 曲线 C_2 是抛物线 $y = \frac{4}{9}x^2$ 的一段, 此时记结构的最低点 O 到点 C 的距离为 $h_2(t)$.

(1) 求函数 $h_1(t)$, $h_2(t)$ 的表达式;

(2) 要使得点 O 到点 C 的距离最大, 应选用哪一种曲线? 此时最大值是多少? (参考数据 $\cos 1 = 0.54$)

解析: (1) 对于曲线 C_1 , 因为曲线 AOB 的表达式为 $y = 1 - \cos x$,

所以点 B 的坐标为 $(t, 1 - \cos t)$,

所以点 O 到 AB 的距离为 $1 - \cos t$,2 分

因为 $DC = 3 - 2t$,

所以 $h_1(t) = (3 - 2t) + (1 - \cos t) = -2t - \cos t + 4$ ($1 \leq t \leq \frac{3}{2}$);4 分

对于曲线 C_2 $y = \frac{4}{9}x^2$, 则点 B 的坐标为 $(t, \frac{4}{9}t^2)$,

所以点 O 到 AB 的距离为 $\frac{4}{9}t^2$,6 分

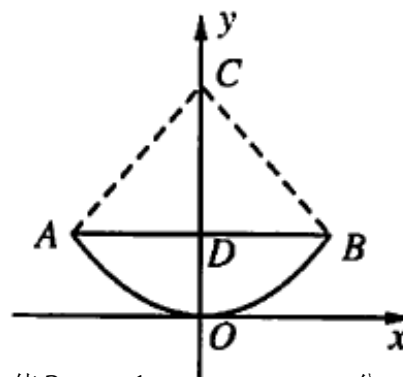
因为 $DC = 3 - 2t$,

所以 $h_2(t) = \frac{4}{9}t^2 - 2t + 3$ ($1 \leq t \leq \frac{3}{2}$)8 分

(2) 因为 $h_1'(t) = -2 + \sin t < 0$,

所以 $h_1(t)$ 在 $[1, \frac{3}{2}]$ 上单调递减, 所以当 $t = 1$ 时, $h_1(t)$ 取得最大值 $2 - \cos 1$ 10 分

因为 $h_2(t) = \frac{4}{9}(t - \frac{9}{4})^2 + \frac{3}{4}$, ($1 \leq t \leq \frac{3}{2}$)



所以当 $t=1$ 时, $h_2(t)$ 取得最大值为 $\frac{13}{9}$,12 分

因为 $2-\cos 1=1.46>\frac{13}{9}$, 所以选用曲线 C_1 ,14 分

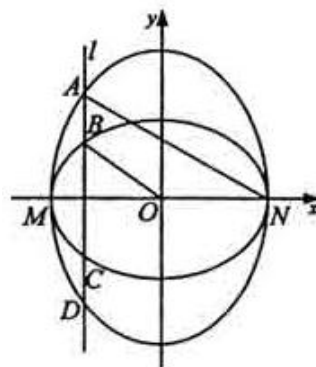
且当 $t=1$ 时, 点 O 到点 C 的距离最大, 最大值为 $2-\cos 1$ 16 分

19. (本小题满分 16 分)

如图, 已知椭圆 C_1 的中心在 origin O , 长轴左、右端点 M, N 在 x 轴上, 椭圆 C_2 的短轴为 MN , 且 C_1, C_2 的离心率都为 e , 直线 $l \perp MN$, l 与 C_1 交于两点, 与 C_2 交于两点, 这四点按纵坐标从大到小依次为 A, B, C, D .

(1) 设 $e = \frac{1}{2}$, 求 $\frac{BC}{AD}$ 值;

(2) 当 e 变化时, 是否存在直线 l , 使得 $BO \parallel AN$, 并说明理由.



解析: (1) 因为 C_1, C_2 的离心率相同, 故依题意可设

$$C_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, C_2: \frac{b^2 y^2}{a^4} + \frac{x^2}{a^2} = 1, (a > b > 0) \dots\dots\dots$$

.....2 分

设直线 $l: x=t$ ($|t| < a$), 分别与 C_1, C_2 的方程联立,

$$\text{求得 } A(t, \frac{a}{b}\sqrt{a^2-t^2}), B(t, \frac{b}{a}\sqrt{a^2-t^2}) \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

当 $e = \frac{1}{2}$ 时, $b = \frac{\sqrt{3}}{2}a$, 分别用 y_A, y_B 表示 A, B 的纵坐标,

$$\text{可知 } \frac{|BC|}{|AD|} = \frac{2y_B}{2y_A} = \frac{b^2}{a^2} = \frac{3}{4} \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

(2) $t=0$ 时的 l 不符合题意.

$$t \neq 0 \text{ 时, } BO \parallel AN \text{ 当且仅当 } BO \text{ 的斜率与 } AN \text{ 的斜率相等, 即 } \frac{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-t^2}}{t} = \frac{\frac{a}{b}\sqrt{a^2-t^2}}{t-a}$$

$$\text{解得 } t = -\frac{ab^2}{a^2-b^2} = -\frac{1-e^2}{e^2}a \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

因为 $|t| < a, 0 < e < 1$, 所以 $\frac{1-e^2}{e^2} < 1$, 解得 $\frac{\sqrt{2}}{2} < e < 1$ 14 分

所以当 $0 < e \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, 不存在直线 l , 使得 $BO \parallel AN$;15 分

当 $\frac{\sqrt{2}}{2} < e < 1$ 时, 存在直线 l 使得 $BO \parallel AN$16 分

20. (本小题满分 16 分)
已知函数 $f(x) = x \ln x - (k+1)x$, $k \in R$.

- (1) 若 $k = -1$, 求 $f(x)$ 的最值;
- (2) 若对于任意 $x \in [e, e^3]$, 都有 $f(x) < 4 \ln x$ 成立, 求实数 k 的取值范围;
- (3) 对于任意 $x \in [2, e^2]$, 都有 $f(x) > -2x - k$ 成立, 求整数 k 的最大值.

解析: (1) $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$.
因为 $k = -1$, 所以 $f(x) = x \ln x$, $f'(x) = \ln x + 1$.
列表如下:

x	$(0, \frac{1}{e})$	$\frac{1}{e}$	$(\frac{1}{e}, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	单调递减	$-\frac{1}{e}$	单调递增

所以, $f(x)$ 的最小值为 $-\frac{1}{e}$, 没有最大值;4 分

(2) 对于任意 $x \in [e, e^3]$, 都有 $f(x) < 4 \ln x$ 成立,
等价于对于任意 $x \in [e, e^3]$, 都有 $k+1 > (1-\frac{4}{x}) \ln x$ 成立,6 分

令 $g(x) = (1-\frac{4}{x}) \ln x$, 所以 $g'(x) = \frac{x-4+4 \ln x}{x^2}$.
因为 $x \in [e, e^3]$, 所以 $g'(x) > 0$, 所以 $g(x)$ 在 $x \in [e, e^3]$ 时单调递增.8 分
因为 $g(x)$ 在 $x \in [e, e^3]$ 时的最大值是 $g(e^3) = 3 - \frac{12}{e^3}$.

所以, 实数 k 的取值范围是 $(2 - \frac{12}{e^3}, +\infty)$;10 分

(3) 对于任意 $x \in [2, e^2]$, 都有 $f(x) > -2x - k$ 成立,
即对于任意 $x \in [2, e^2]$, 都有 $(\ln x - k - 1)x > -2x - k$ 成立,
因为 $x \in [2, e^2]$, 所以 $(\ln x - k - 1)x > -2x - k$ 等价于 $k < \frac{x \ln x + x}{x-1}$12 分

令 $h(x) = \frac{x \ln x + x}{x-1}$, 所以 $h'(x) = \frac{-\ln x + x - 2}{(x-1)^2}$.

令 $p(x) = -\ln x + x - 2$, 求得 $p'(x) = \frac{x-1}{x}$.

当 $x \in [2, e^2]$ 时所以 $p'(x) > 0$, $p(x)$ 在 $x \in [2, e^2]$ 上单调递增.

因为 $p(3) = 1 - \ln 3 < 1 - \ln e = 0$, $p(4) = 2 - 2\ln 2 > 2 - 2\ln e = 0$, 且 $p(x)$ 图像不间断,

所以 $p(x)$ 在区间 $(3, 4)$ 内有唯一零点,14 分

设唯一零点为 x_0 , 则 $x_0 \in (3, 4)$, 且 $p(x_0) = -\ln x_0 + x_0 - 2 = 0$, 即 $\ln x_0 = x_0 - 2$.

所以, $h(x)$ 在 $[2, x_0]$ 上单调递减, 在 $[x_0, e^2]$ 上单调递增, $h(x)$ 在 $x = x_0$ 时取到最小值 $h(x_0)$.

因为 $\ln x_0 = x_0 - 2$, 所以 $h(x_0) = \frac{x_0 \ln x_0 + x_0}{x_0 - 1} = x_0$,

所以整数 k 的最大值为 3.16 分

数学附加题参考答案

21. (A) 【选修4-2: 矩阵与变换】(本小题满分 10 分)

设 $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ 是矩阵 $M = \begin{bmatrix} a & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ 的一个特征向量.

(1) 求实数 a 的值;

(2) 求矩阵 M 的特征值.

解(1) 设 $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ 是矩阵 M 是属于特征值 λ 的一个特征向量, 则 $\begin{bmatrix} a & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$,2 分

即 $\begin{cases} 2a + 6 = 2\lambda \\ 12 = 4\lambda \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} \lambda = 4 \\ a = 1 \end{cases}$, 故实数 a 的值为 1.....5 分

(2) 矩阵 M 的特征多项式 $f(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -3 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 2) - 6 = \lambda^2 - 3\lambda - 4$ 8 分

由 $f(\lambda) = 0$, 得 $\lambda = 4$ 或 $\lambda = -1$, 故矩阵 M 的特征值为 4 和 -110 分

21. (B) 【选修4-4: 坐标系与参数方程】(本小题满分10分)

圆 $C: \rho = 2\cos(\theta - \frac{\pi}{4})$, 与极轴交于点 A (异于极点 O), 求直线 CA 的极坐标方程.

解: 圆 $C: \rho^2 = 2\rho\cos(\theta - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}\rho\cos\theta + \sqrt{2}\rho\sin\theta$

所以 $x^2 + y^2 - \sqrt{2}x - \sqrt{2}y = 0$ 4 分

所以圆心 $C\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, 与极轴交于 $A(\sqrt{2}, 0)$ 6 分

直线 CA 的直角坐标方程为 $x + y = \sqrt{2}$ 8 分

即直线 CA 的极坐标方程为 $\rho \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = 1$10 分

22. (本小题满分10分)

盒子中装有四张大小形状均相同的卡片, 卡片上分别标有数 $-i, i, -2, 2$ 其中 i 是虚数单位. 称“从盒中随机抽取一张, 记下卡片上的数后并放回”为一次试验 (设每次试验的结果互不影响).

(1) 求事件 A “在一次试验中, 得到的数为虚数”的概率 $P(A)$ 与事件 B “在四次试验中,

至少有两次得到虚数” 的概率 $P(B)$;

(2) 在两次试验中, 记两次得到的数分别为 a, b , 求随机变量 $\xi = |a \cdot b|$ 的分布列与数学期望 $E\xi$.

解: (1) $P(A) = \frac{1}{2}$ 2 分

$$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - [(C_4^0 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^4 + C_4^1 \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^3] = 1 - \frac{5}{16} = \frac{11}{16} \text{5 分}$$

(2) ξ 可取 1, 2, 46 分

$$P(\xi = 1) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} \quad P(\xi = 2) = \frac{8}{16} = \frac{1}{2} \quad P(\xi = 4) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} \text{8 分}$$

列出概率分布表:

ξ	1	2	4
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

$$E(\xi) = 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{2} + 4 \times \frac{1}{4} = \frac{9}{4} \text{10 分}$$

23. (本小题满分10分)

在自然数列 $1, 2, 3, \dots, n$ 中, 任取 $k(0 \leq k \leq n), k \in N$ 个元素, 其余 $n-k$ 个元素变动位置, 得到不同的新数列. 由此产生的不同新数列的个数记为 $P_n(k)$.

(1) 求 $P_3(1), P_4(0)$;

(2) 证明: $\sum_{k=0}^n kP_n(k) = n \sum_{k=0}^{n-1} P_{n-1}(k)$, 并求出 $\sum_{k=0}^n kP_n(k)$ 的值.

解: (1) 数列 $1, 2, 3$ 中保持其中 1 个元素位置不动的排列只有 $1, 3, 2$ 或 $3, 2, 1$ 或 $2, 1, 3$, 所以 $P_3(1) = 3$2 分

数列 $1, 2, 3, 4$ 中保持 0 个元素位置不动的排列, 即每个数字都不在原来的位置上, 所以 $P_4(0) = 9$4 分

(2) 数列 $1, 2, 3, \dots, n$ 中任取其中 k 个元素位置不动, 则有 C_n^k 种, 其余 $n-k$ 个元素重新排列, 并且使其余 $n-k$ 个元素都要改变位置, 则有 $P_n(k) = C_n^k P_{n-k}(0)$

故 $\sum_{k=0}^n kP_n(k) = \sum_{k=0}^n kC_n^k P_{n-k}(0)$, 又 $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$ 6 分

所以 $\sum_{k=0}^n kP_n(k) = \sum_{k=0}^n kC_n^k P_{n-k}(0) = n \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k P_{n-k-1}(0) = n \sum_{k=0}^{n-1} P_{n-1}(k)$,8 分

对任意的 $n \in N, \sum_{k=0}^n P_n(k) = n!$, 从而 $\sum_{k=0}^{n-1} P_{n-1}(k) = (n-1)!$

所以 $\sum_{k=0}^n kP_n(k) = n(n-1)! = n!$ 10 分