

2019 届基地学校四月大联考

数学参考答案与评分建议

一、填空题：本大题共 14 小题，每小题 5 分，共计 70 分.

1. $\{0, 2\}$ 2. 3 3. 15 4. $\frac{54}{5}$ 5. $\frac{1}{4}$ 6. $\frac{4}{3}\pi$ 7. 21 8. -2 9. 2
10. 0 11. 7 12. $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$ 13. $[2\sqrt{2}-1, 2\sqrt{2}+1]$ 14. $[\frac{3\ln 3-27}{5}, \frac{4\ln 2-16}{3})$

参考解析:

12. 【解】方法一：条件为 $(a+3b)(a-b)=1$ ，设 $m=a+3b$ ， $n=a-b$ ，

则 $mn=1$ ，且 $4a=m+3n$ ， $4b=m-n$ ，

所以 $16(a^2+b^2)=(m+3n)^2+(m-n)^2=2m^2+10n^2+4$ ，

因为 $2m^2+10n^2 \geq 4\sqrt{5}$ ，所以 $a^2+b^2 \geq \frac{\sqrt{5}+1}{4}$ 。

方法二：设 $1=a^2+2ab-3b^2 \leq a^2-3b^2+(\lambda a^2+\frac{1}{\lambda}b^2)$

$$=(1+\lambda)a^2+(\frac{1}{\lambda}-3)b^2 \quad (\lambda > 0)$$

令 $1+\lambda=\frac{1}{\lambda}-3$ ，解得 $\lambda=\sqrt{5}-2$ 。

再将 $\lambda=\sqrt{5}-2$ 回代可得， $(\sqrt{5}-1)a^2+(\sqrt{5}-1)b^2 \geq 1$ ，即 $a^2+b^2 \geq \frac{\sqrt{5}+1}{4}$ 。

13. 【解】由 $\angle ACB = \frac{\pi}{3}$ ，知 $\angle AOB = \frac{2\pi}{3}$ ，所以 $OM = OA \cos 60^\circ = 1$ ，

所以点 M 的轨迹方程为 $x^2+y^2=1$ 。

设 $M(x', y')$ ， $N(x, y)$ ，

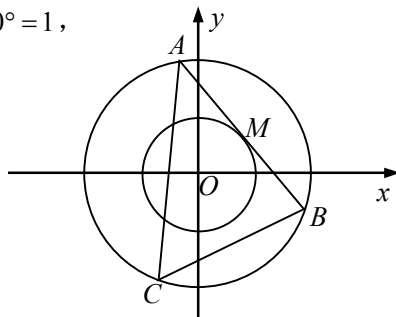
因为 M ， N 关于直线 $y=x+2$ 的对称，

$$\text{所以 } \begin{cases} \frac{y-y'}{x-x'} = -1, \\ \frac{y+y'}{2} = \frac{x+x'}{2} + 2, \end{cases} \quad \text{解得 } \begin{cases} x' = y-2, \\ y' = x+2. \end{cases}$$

代入 $x^2+y^2=1$ 得 $(x+2)^2+(y-2)^2=1$ ，

即点 N 的轨迹方程为 $(x+2)^2+(y-2)^2=1$ 。

所以线段 ON 长度的取值范围是 $[2\sqrt{2}-1, 2\sqrt{2}+1]$ 。



14. 【解】由 $x \ln x \leq -x^2 + (a+12)x + 2a$, 可得 $a \geq \frac{x \ln x + x^2 - 12x}{x+2}$,

$$\text{设 } h(x) = \frac{x \ln x + x^2 - 12x}{x+2}, \text{ 则 } h'(x) = \frac{x^2 + 2 \ln x + 5x - 22}{(x+2)^2}.$$

$$\text{令 } \varphi(x) = x^2 + 2 \ln x + 5x - 22 \quad (x > 0),$$

则 $\varphi'(x) = 2x + \frac{2}{x} + 5 > 0$, 所以 $\varphi(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

由于 $\varphi(2) < 0$, $\varphi(3) > 0$, 所以 $\exists x_0 \in (2, 3)$, $\varphi(x_0) = 0$,

所以 $h(x)$ 在 $(0, x_0)$ 单调递减; 在 $(x_0, +\infty)$ 单调递增.

要使不等式 $f(x) \leq g(x)$ 的解集中恰有两个整数,

即 $a \geq h(x)$ 的解集中恰有两个整数,

必须解集中的两个整数为 2 和 3.

所以 $a < h(1)$, $a \geq h(2)$, $a \geq h(3)$, $a < h(4)$,

$$\text{解得 } \frac{3 \ln 3 - 27}{5} \leq a < \frac{4 \ln 2 - 16}{3}.$$

二、解答题: 本大题共 6 小题, 共计 90 分.

15. 【解】(1) $f(x) = \sin x \cos x + \sqrt{3} \sin^2 x - \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$= \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{\sqrt{3}(1 - \cos 2x)}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$= \sin \left(2x - \frac{\pi}{3} \right). \quad \dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\text{因为 } x \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right], \text{ 所以 } 2x - \frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} \right],$$

$$\text{所以 } -\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \sin \left(2x - \frac{\pi}{3} \right) \leq 1,$$

$$\text{即函数 } f(x) \text{ 的值域为 } \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1 \right]. \quad \dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ 由 (1) 知, } f\left(\frac{C}{2}\right) = \sin\left(C - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{因为 } C \text{ 为锐角, 所以 } C - \frac{\pi}{3} \in \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right),$$

$$\text{所以 } C - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{6}, \text{ 即 } C = \frac{\pi}{6}. \quad \dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{在 } \triangle ABC \text{ 中, } AB = 3, \quad A = \frac{\pi}{4},$$

由正弦定理可得, $\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A}$, 即 $\frac{3}{\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{BC}{\sin \frac{\pi}{4}}$, 12 分

解得 $BC = 3\sqrt{2}$ 14 分

16. 【证】(1) 连结 AC 交 BD 于 O , 连结 OM .

因为 $PA \parallel$ 平面 MBD , $PA \subset$ 平面 PAC ,

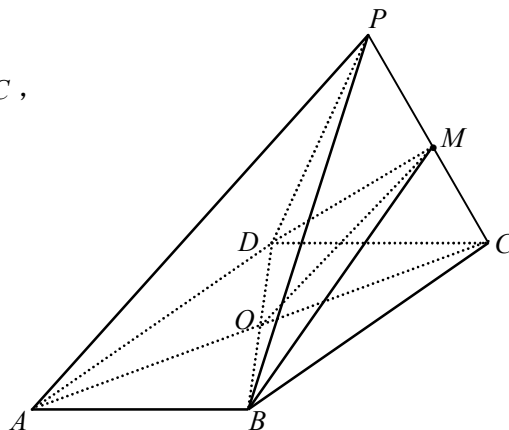
平面 $PAC \cap$ 平面 $MBD = OM$,

所以 $PA \parallel OM$ 3 分

因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

所以点 O 是 AC 中点,

所以 M 是 PC 中点. 6 分



(2) 因为在 $\triangle ABD$ 中, $AD = 2$, $AB = 1$, $\angle BAD = 60^\circ$,

所以 $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cos \angle BAD = 3$, 8 分

所以 $AD^2 = AB^2 + BD^2$, 所以 $AB \perp BD$.

因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 所以 $AB \parallel CD$,

所以 $BD \perp CD$ 10 分

因为平面 $PCD \perp$ 平面 $ABCD$,

又平面 $PCD \cap$ 平面 $ABCD = CD$, $BD \subset$ 平面 $ABCD$,

所以 $BD \perp$ 平面 PCD 12 分

因为 $BD \subset$ 平面 MBD ,

所以平面 $MBD \perp$ 平面 PCD 14 分

17. 【解】(1) 设 $h = k_1(18-x)^2$ ($10 \leq x \leq 15$, $x \in \mathbf{N}^*$),

$$h = \frac{k_2}{1 - \frac{10}{x}} \quad (15 \leq x \leq 30, x \in \mathbf{N}^*), \quad \text{..... 2 分}$$

因为当 $x = 15$ 时, $h = 9$,

代入上述两式可得 $k_1 = 1$, $k_2 = 3$ 4 分

$$\text{所以 } f(x) = \begin{cases} (x-8)(18-x)^2, & 10 \leq x \leq 15, x \in \mathbf{N}^*, \\ \frac{3x(x-8)}{x-10}, & 15 < x \leq 30, x \in \mathbf{N}^*. \end{cases} \quad \cdots \cdots 6 \text{ 分}$$

(2) 当 $10 \leq x \leq 15, x \in \mathbf{N}^*$ 时, $f(x) = (x-8)(18-x)^2$,

$$\text{所以 } f'(x) = (x-18)(3x-34),$$

$$\text{令 } f'(x) = 0, \text{ 得 } x = \frac{34}{3}. \quad \cdots \cdots 8 \text{ 分}$$

列表如下:

x	10	$\left(10, \frac{34}{3}\right)$	$\frac{34}{3}$	$\left(10, \frac{34}{3}\right)$	15
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$f(10)$	单调增	极大值	单调减	$f(15)$

因为 $x \in \mathbf{N}^*$, 且 $f(11) = 147, f(12) = 144$,

所以当 $x = 11$ 时, $f(x)$ 取最大值 147. $\cdots \cdots 10 \text{ 分}$

$$\text{当 } 15 \leq x \leq 30, x \in \mathbf{N}^* \text{ 时, } f(x) = \frac{3x(x-8)}{x-10},$$

$$\text{令 } t = x - 10, \text{ 则 } f(x) = g(t) = \frac{3(t+10)(t+2)}{t},$$

$$\text{即 } g(t) = 3\left(t + \frac{20}{t} + 12\right) \quad (5 \leq t \leq 20, t \in \mathbf{N}^*).$$

因为 $g'(t) = 3\left(1 - \frac{20}{t^2}\right) > 0$, 所以 $g(t)$ 在 $5 \leq t \leq 20$ 且 $t \in \mathbf{N}^*$ 上单调递增,

所以当 $t = 20$ 时, $g(t)$ 取最大值 99, 此时 $x = 30$.

综上, 当 $x = 11$ 时, $f(x)$ 取最大值 147. $\cdots \cdots 13 \text{ 分}$

答: 当每件产品的售价为 11 元时, 该公司的月利润 $f(x)$ 最大, 且最大值为 147 万元.

$\cdots \cdots 14 \text{ 分}$

18. 【解】(1) 由条件, $2b = 2, a + c = 2 + \sqrt{3}, a^2 = b^2 + c^2$, $\cdots \cdots 2 \text{ 分}$

解得 $a = 2, b = 1$,

所以椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$. $\cdots \cdots 4 \text{ 分}$

(2) 当 $m = 1$ 时, 直线 l 的方程为 $y = k(x - 1)$,

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

$$\text{由} \begin{cases} y = k(x-1), \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1, \end{cases} \text{消去 } y \text{ 得: } (1+4k^2)x^2 - 8k^2x + 4k^2 - 4 = 0.$$

因为点 P 在椭圆内, 所以 $\Delta > 0$.

$$\text{所以 } x_1 + x_2 = \frac{8k^2}{1+4k^2}, \text{ 所以 } D(\frac{4k^2}{1+4k^2}, \frac{-k}{1+4k^2}). \quad \dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } k_{MN} = \frac{\frac{-k}{1+4k^2}}{\frac{4k^2}{1+4k^2}} = -\frac{1}{4k}, \text{ 直线 } MN \text{ 的方程为: } y = -\frac{1}{4k}x.$$

$$\text{由} \begin{cases} y = -\frac{1}{4k}x, \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1, \end{cases} \text{消去 } y \text{ 得: } x^2 = \frac{16k^2}{1+4k^2}, \text{ 所以 } M(\frac{-4k}{\sqrt{1+4k^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+4k^2}}). \quad 8 \text{ 分}$$

$$\text{因为 } \overrightarrow{OM} + 3\overrightarrow{OD} = \mathbf{0}, \text{ 所以 } \frac{-4k}{\sqrt{1+4k^2}} + 3 \times \frac{4k^2}{1+4k^2} = 0,$$

$$\text{因为 } k > 0, \text{ 解得 } k = \frac{\sqrt{5}}{5}. \quad \dots\dots 10 \text{ 分}$$

(3) 直线 l 的方程为 $y = k(x-m)$,

$$\text{由} \begin{cases} y = k(x-m), \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1, \end{cases} \text{消去 } y \text{ 得: } (1+4k^2)x^2 - 8k^2mx + 4k^2m^2 - 4 = 0.$$

$$\text{所以 } \Delta = (-8k^2m)^2 - 4(1+4k^2)(4k^2m^2 - 4) > 0, \text{ 即 } 4k^2 - k^2m^2 + 1 > 0 \quad (*),$$

$$\text{且 } x_1 + x_2 = \frac{8k^2m}{1+4k^2}, \text{ 所以 } D(\frac{4k^2m}{1+4k^2}, \frac{-km}{1+4k^2}).$$

因为 M, N 关于原点对称,

$$\text{由 (2) 易知, } N(\frac{4k}{\sqrt{1+4k^2}}, -\frac{1}{\sqrt{1+4k^2}}). \quad \dots\dots 12 \text{ 分}$$

$$\text{由四边形 } OANB \text{ 为平行四边形, 所以 } \frac{4k}{\sqrt{1+4k^2}} = 2 \times \frac{4k^2m}{1+4k^2},$$

$$\text{所以 } \frac{4k}{\sqrt{1+4k^2}} = 2 \times \frac{4k^2m}{1+4k^2}, \text{ 即 } m^2 = 1 + \frac{1}{4k^2}. \quad \dots\dots 14 \text{ 分}$$

由于将 $m^2 = 1 + \frac{1}{4k^2}$ 代入 (*) 式恒成立,

所以当 $k > 0$ 时, $m^2 > 1$,

因为 $m > 0$, 所以 $m > 1$. \dots\dots 16 \text{ 分}

19. 【解】(1) 设切点坐标为 $(x_0, f(x_0))$,

$$\text{由 } f'(x) = \frac{1}{x} - a, \text{ 得 } f'(x_0) = \frac{1}{x_0} - a,$$

$$\text{所以切线方程为: } y - (\ln x_0 - ax_0 + 1) = (\frac{1}{x_0} - a)(x - x_0),$$

$$\text{即 } y = (\frac{1}{x_0} - a)x + \ln x_0. \quad \cdots\cdots 2 \text{ 分}$$

因为直线 $y = 2x$ 与函数 $f(x)$ 的图象相切,

$$\text{所以 } \begin{cases} \frac{1}{x_0} - a = 2 \\ \ln x_0 = 0 \end{cases}, \text{ 解得 } a = -1. \quad \cdots\cdots 4 \text{ 分}$$

(2) 设 $t(x) = e^x - x$, 则 $t'(x) = e^x - 1$, 令 $t'(x) = 0$, 得 $x = 0$,

且当 $x < 0$ 时, $t'(x) < 0$; 当 $x > 0$ 时, $t'(x) > 0$,

所以 $t(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $t(x)$ 在 $x = 0$ 时取得极小值为 0, 即 $t(x) \geq 0$.

$$\text{由 } g(x_2) = x_2(e^{x_2} - x_2) = 0, \text{ 可得 } x_2 = 0, \quad \cdots\cdots 5 \text{ 分}$$

所以 $x_1 - x_2 > 1$ 即为 $x_1 > 1$,

由题意可得: 函数 $f(x) = \ln x - ax + 1$ 在 $(1, +\infty)$ 上有零点.

$$\text{因为 } f'(x) = \frac{1}{x} - a = \frac{1 - ax}{x},$$

当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $f(x) > f(1) = 1 - a > 0$, 函数 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上无零点; $\cdots\cdots 6 \text{ 分}$

$$\text{当 } a > 0 \text{ 时, 令 } f'(x) = 0, \text{ 得 } x = \frac{1}{a}.$$

① 若 $\frac{1}{a} \leq 1$, 即 $a \geq 1$ 时, $f'(x) < 0$ 在 $(1, +\infty)$ 上恒成立,

所以函数 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减,

所以 $f(x) < f(1) = 1 - a \leq 0$, 函数 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上无零点; $\cdots\cdots 7 \text{ 分}$

② 若 $\frac{1}{a} > 1$, 即 $0 < a < 1$ 时,

当 $x \in (1, \frac{1}{a})$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $x \in (\frac{1}{a}, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0$.

所以函数 $f(x)$ 在 $(1, \frac{1}{a})$ 上单调递增, 在 $(\frac{1}{a}, +\infty)$ 上单调递减,

所以 $f(x)_{\max} = f(\frac{1}{a}) = \ln \frac{1}{a} > 0$,

因为 $f(1) = 1 - a > 0$, 所以函数 $f(x)$ 在 $(1, \frac{1}{a})$ 上无零点;8 分

又 $f(\frac{4}{a^2}) = \ln \frac{4}{a^2} - a \cdot \frac{4}{a^2} + 1 = \ln 4 - 2 \ln a - \frac{4}{a} + 1$,

令 $h(a) = \ln 4 - 2 \ln a - \frac{4}{a} + 1$,

则 $h'(a) = -\frac{2}{a} + \frac{4}{a^2} = \frac{4-2a}{a^2} > 0$ 在 $a \in (0, 1)$ 上恒成立,

所以 $h(a)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增,

所以 $h(a) < h(1) = \ln 4 - 3 < 0$, 即 $f(\frac{4}{a^2}) < 0$,

所以 $f(\frac{1}{a}) \cdot f(\frac{4}{a^2}) < 0$, 且 $f(x)$ 在 $(\frac{1}{a}, +\infty)$ 的图象连续不断,

所以函数 $f(x)$ 在 $(\frac{1}{a}, \frac{4}{a^2})$ 上有且只有一个零点,

即函数 $f(x)$ 在 $(\frac{1}{a}, +\infty)$ 上有零点.

综上所述, $0 < a < 1$10 分

(3) 当 $a = -1$ 时, $f(x) = \ln x + x + 1$,

令 $F(x) = g(x) - f(x) = xe^x - \ln x - x - 1 (x > 0)$,

则 $F'(x) = (x+1)e^x - \frac{1}{x} - 1 = \frac{x+1}{x}(xe^x - 1)$,

令 $G(x) = xe^x - 1$, 则当 $x > 0$ 时, $G'(x) = (x+1)e^x > 0$,

所以函数 $G(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上是增函数,

又 $G(0) = -1 < 0$, $G(1) = e - 1 > 0$,

所以函数 $G(x)$ 存在唯一的零点 $x_0 \in (0, +\infty)$,12 分

且当 $x_0 \in (0, x_0)$ 时, $G(x) < 0$; 当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $G(x) > 0$.

所以当 $x_0 \in (0, x_0)$ 时, $F'(x) < 0$; 当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $F'(x) > 0$.

所以函数 $F(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上递减, 在 $(x_0, +\infty)$ 上递增,

故 $F(x)_{\min} = F(x_0) = x_0 e^{x_0} - \ln x_0 - x_0 - 1$,14 分

由 $G(x_0) = 0$ 得: $x_0 e^{x_0} - 1 = 0$,

两边取对数得: $\ln x_0 + x_0 = 0$, 故 $F(x_0) = 0$,

所以 $g(x) - f(x) \geq 0$, 即 $f(x) \leq g(x)$16 分

20. 【解】(1) 由 $a_1 = 2$, $\left(\frac{1}{2}S_{m+n} + 1\right)^2 = a_{2m}\left(1 + \frac{1}{2}S_{2n}\right)$ 对任意的正整数 m, n 恒成立

取 $m = n = 1$, 得 $\left(\frac{1}{2}S_2 + 1\right)^2 = a_2\left(1 + \frac{1}{2}S_2\right)$,

即 $\frac{1}{2}(2 + a_2) + 1 = a_2$, 得 $a_2 = 4$2 分

取 $m = 1, n = 2$, 得 $\left(\frac{1}{2}S_3 + 1\right)^2 = a_2\left(1 + \frac{1}{2}S_4\right)$,

取 $m = 2, n = 1$, 得 $\left(\frac{1}{2}S_3 + 1\right)^2 = a_4\left(1 + \frac{1}{2}S_2\right)$,

解得 $a_3 = 8, a_4 = 16$4 分

(2) 取 $m = 1$, 得 $\left(\frac{1}{2}S_{n+1} + 1\right)^2 = a_2\left(1 + \frac{1}{2}S_{2n}\right)$,

取 $m = 2$, 得 $\left(\frac{1}{2}S_{n+2} + 1\right)^2 = a_4\left(1 + \frac{1}{2}S_{2n}\right)$,

两式相除, 得 $\frac{\left(\frac{1}{2}S_{n+2} + 1\right)^2}{\left(\frac{1}{2}S_{n+1} + 1\right)^2} = \frac{a_4}{a_2} = 4$, 即 $\frac{S_{n+2} + 2}{S_{n+1} + 2} = 2$ ($n \in \mathbf{N}^*$).6 分

由于 $\frac{S_2 + 2}{S_1 + 2} = 2$, 所以 $\frac{S_{n+1} + 2}{S_n + 2} = 2$ 对任意 $n \in \mathbf{N}^*$ 均成立,

所以 $\{S_n + 2\}$ 是首项为 4, 公比为 2 的等比数列,

所以 $S_n + 2 = 4 \times 2^{n-1}$, 即 $S_n = 2^{n+1} - 2$8 分

$n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = (2^{n+1} - 2) - (2^n - 2) = 2^n$,

而 $a_1 = 2$ 也符合上式, 所以 $a_n = 2^n$ ($n \in \mathbf{N}^*$).

因为 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 2$ (常数), 所以 $\{a_n\}$ 是等比数列.10 分

(3) 由 (2) 知, $b_n = 2^n - (-1)^n$.

设 b_s, b_r, b_t ($s < r < t$) 成等差数列, 则 $2b_r = b_s + b_t$.

$$\text{即 } 2[2^r - (-1)^r] = 2^s - (-1)^s + 2^t - (-1)^t,$$

$$\text{整理得, } 2^s + 2^t - 2^{r+1} = (-1)^s + (-1)^t - 2(-1)^r. \quad \cdots\cdots 12 \text{ 分}$$

$$\text{若 } t = r + 1, \text{ 则 } 2^s = (-1)^s - 3(-1)^r,$$

因为 $2^s \geq 2$, 所以 $(-1)^s - 3(-1)^r$ 只能为 2 或 4, 所以 s 只能为 1 或 2. 14 分

$$\text{若 } t = r + 2, \text{ 则 } 2^s + 2^t - 2^{r+1} = (-1)^s + (-1)^t - 2(-1)^r \geq 2^s + 2^{r+1} > 4.$$

因为 $(-1)^s + (-1)^t - 2(-1)^r \leq 4$, 故矛盾.

综上, 只能是 b_1, b_r, b_{r+1} 成等差数列或 b_2, b_r, b_{r+1} 成等差数列, 其中 r 为奇数.

$$\text{所以 } t \text{ 的最大值为 } 3. \quad \cdots\cdots 16 \text{ 分}$$

数学 II (附加题)

21A. 【解】矩阵 M 的特征多项式 $f(\lambda) = (\lambda - a)(\lambda - 2) + b$,

由于矩阵 M 的两个特征值为 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$,

所以 $f(2) = 0, f(3) = 0$, 解得 $a = 3, b = 0$,

$$\text{所以 } M = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}. \quad \cdots\cdots 5 \text{ 分}$$

设直线 l 上任意一点 $P(x, y)$, 在矩阵 M 对应变换作用下的点 $P'(x', y')$,

$$\text{则 } M \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}, \text{ 即 } \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix},$$

$$\text{所以 } \begin{cases} 3x = x', \\ -x + 2y = y', \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} x = \frac{1}{3}x', \\ y = \frac{1}{6}x' + \frac{1}{2}y'. \end{cases}$$

因为点 $P(x, y)$ 在直线 $l: x - y + 2 = 0$ 上,

$$\text{所以 } \frac{1}{3}x' - (\frac{1}{6}x' + \frac{1}{2}y') + 2 = 0, \text{ 即 } x' - 3y' + 12 = 0,$$

$$\text{所以变换后的直线 } l' \text{ 的方程为 } x - 3y + 12 = 0. \quad \cdots\cdots 10 \text{ 分}$$

21B. 【解】由 $\rho = 2\sin\theta$ ，得 $\rho^2 = 2\rho\sin\theta$ ，

所以圆 C 的直角坐标方程为 $x^2 + (y-1)^2 = 1$3 分

由 $\rho\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = a$ ，得 $\rho\left(\frac{1}{2}\sin\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right) = a$ ，

所以直线 l 的直角坐标方程为 $\sqrt{3}x + y - 2a = 0$6 分

因为直线 l 与圆 C 相切，所以 $\frac{|1-2a|}{\sqrt{3+1}} = 1$ ，8 分

解得 $a = \frac{3}{2}$ 或 $-\frac{1}{2}$10 分

21C. 【解】(1) 因为 $f(x) = |x+1| + |x-4| - a$ ，

$$\text{所以 } f(x) = \begin{cases} -5-a, & x \leq -1 \\ 2x-3-a, & -1 < x < 4 \\ 5-a, & x \geq 4 \end{cases}$$

所以 $f(x)$ 的最大值为 $5-a$5 分

(2) 因为存在 $x \in \mathbb{R}$ ，使 $f(x) \geq \frac{4}{a} + 1$ 成立，

所以 $f(x)_{\max} \geq \frac{4}{a} + 1$ ，即 $5-a \geq \frac{4}{a} + 1$ 。

当 $a > 0$ 时， $a^2 - 4a + 4 \leq 0$ ，即 $(a-2)^2 \leq 0$ ，所以 $a = 2$ 。

当 $a < 0$ 时， $a^2 - 4a + 4 \geq 0$ ，即 $(a-2)^2 \geq 0$ ，不等式显然成立。

所以实数 a 的取值范围为 $a = 2$ 或 $a < 0$10 分

22. 【解】(1) 设动圆圆心 C 坐标为 (x, y) ，

由题意得：动圆半径 $r = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$ ，圆心到 y 轴的距离为 $|x|$ 。

所以 $|x|^2 + 2^2 = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$ ，2 分

化简得： $y^2 = 4x$ ，

所以动圆圆心 C 的轨迹方程为 $y^2 = 4x$4 分

(2) 设直线 l 的方程为 $x = ty + 2$ ，

代入 $y^2 = 4x$ ，得 $y^2 - 4ty - 8 = 0$ 。

设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$,

则 $y_1 + y_2 = 4t$, $y_1 y_2 = -8$.

由 $T(0, -\frac{2}{t})$, 所以 $\overrightarrow{TA} = (x_1, y_1 + \frac{2}{t})$, $\overrightarrow{SA} = (x_1 - 2, y_1)$.

因为 $\overrightarrow{TA} = \lambda \overrightarrow{SA}$, 所以 $(x_1, y_1 + \frac{2}{t}) = \lambda(x_1 - 2, y_1)$,

所以 $\lambda = 1 + \frac{2}{ty_1}$.

同理可得, $\mu = 1 + \frac{2}{ty_2}$,

所以 $\lambda + \mu = (1 + \frac{2}{ty_1}) + (1 + \frac{2}{ty_2}) = 2 + \frac{2}{t} \cdot \frac{y_1 + y_2}{y_1 y_2} = 2 + \frac{2}{t} \times \frac{4t}{-8} = 1$,

即 $\lambda + \mu$ 是定值.

……10 分

23. 【解】 (1) 由 $(1+mx)^{2020} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{2020} x^{2020}$,

两边求导得, $2020m(1+mx)^{2019} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + 2020a_{2020} x^{2019}$.

当 $m=2$ 时, 令 $x=1$, 得 $a_1 + 2a_2 + \cdots + 2020a_{2020} = 4040 \times 3^{2019}$. ……4 分

(2) 当 $m=-1$ 时, $(1-x)^{2020} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{2020} x^{2020}$,

则 $S = \sum_{i=0}^{2020} \frac{1}{a_i} = \frac{1}{C_{2020}^0} - \frac{1}{C_{2020}^1} + \frac{1}{C_{2020}^2} - \cdots + \frac{1}{C_{2020}^{2018}} - \frac{1}{C_{2020}^{2019}} + \frac{1}{C_{2020}^{2020}}$.

由于 $\frac{1}{C_{2020}^k} = \frac{k!(2020-k)!}{2020!} = \frac{2021}{2022} \times \frac{k!(2020-k)! \times 2022}{2021!}$

$= \frac{2021}{2022} \times \frac{k!(2020-k)! \times (2021-k+k+1)}{2021!}$

$= \frac{2021}{2022} \times \frac{k!(2021-k)! + (k+1)!(2020-k)!}{2021!}$

$= \frac{2021}{2022} \left(\frac{1}{C_{2021}^k} + \frac{1}{C_{2021}^{k+1}} \right),$

所以 $S = \frac{2021}{2022} \left[\left(\frac{1}{C_{2021}^0} + \frac{1}{C_{2021}^1} \right) - \left(\frac{1}{C_{2021}^1} + \frac{1}{C_{2021}^2} \right) + \left(\frac{1}{C_{2021}^2} + \frac{1}{C_{2021}^3} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{C_{2021}^{2020}} + \frac{1}{C_{2021}^{2021}} \right) \right]$

$= \frac{2021}{2022} \left(\frac{1}{C_{2021}^0} + \frac{1}{C_{2021}^{2021}} \right) = \frac{2021}{2022}.$

……10 分