

江苏省仪征中学 2018-2019 学年第二学期期末复习讲义(4)

一、填空题:

1、设 i 是虚数单位, 复数 $\frac{1+ai}{2+i}$ 为纯虚数, 则实数 a 的值为_____.

2. “ $\log_3 M > \log_3 N$ ”是“ $M > N$ ”成立的_____条件.
(从“充要”、“充分不必要”、“必要不充分”中选择一个正确的填写)

3. 设 α 为锐角, 若 $\sin(\alpha - \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{3}$, 则 $\cos \alpha$ 的值为_____.

4. 将函数 $y = \sqrt{3} \sin x + \cos x$ 的图像向左平移 m ($m > 0$) 个单位长度后, 所得的图像关于 y 轴对称, 则 m 的最小值是_____.

5. 已知过定点 $P(1, 2)$ 的直线 l 交圆 $O: x^2 + y^2 = 9$ 于 A, B 两点, 若 $AB = 4\sqrt{2}$, 则直线 l 的方程为_____;
当 P 为线段 AB 的中点时, 则直线 l 的方程为_____.

6. 观察下列等式:

$$1=1$$

$$2+3+4=9$$

$$3+4+5+6+7=25$$

$$4+5+6+7+8+9+10=49$$

照此规律归纳第 n ($n \in \mathbf{N}^*$) 个等式, 应为_____.

7. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 满足: 当 $x > 0$ 时, $f(x) = 2^x + \log_2 x$, 则方程 $f(x) = 0$ 的实根的个数为_____.

8. 已知圆 $C_1: x^2 + y^2 - 2mx + 4y + m^2 - 5 = 0$ 和圆 $C_2: x^2 + y^2 + 2x - 2my + m^2 - 3 = 0$, 若两圆相交, 实数 m 的取值范围为_____, 若两圆相切, 实数 m 的取值为_____.

9. 已知 $f(x) = \ln(x^2 - ax + 2a - 2)$ ($a > 0$), 若 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上是增函数, 则 a 的取值范围是_____.

10 已知函数 $f(x) = \sqrt{3} \cos^2 \omega x + \sin \omega x \cos \omega x$ ($\omega > 0$) 的周期为 π . 当 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 时, 求函数 $f(x)$ 的值域_____.

11. 设实数 $a \geq 1$ ，使得不等式 $x|x-a| + \frac{3}{2} \geq a$ ，对任意的实数 $x \in [1, 2]$ 恒成立，则满足条件的实数 a 的范围是_____.

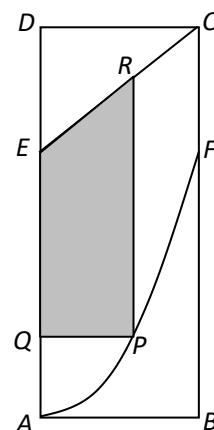
12. 定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足： $f(x) + f'(x) > 1, f(0) = 4$ ，则不等式 $e^x f(x) > e^x + 3$ 的解集是_____.

二. 解答题：

13. 已知函数 $f(x) = 2\sqrt{3}\sin x - 2\cos x$. (1) 若 $x \in [0, \pi]$ ，求 $f(x)$ 的最大值和最小值；

(2) 若 $f(x) = 0$ ，求 $\frac{2\cos^2 \frac{x}{2} - \sin x - 1}{\sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4})}$ 的值.

14. 某地政府为科技兴市，欲在如图所示的矩形 $ABCD$ 的非农业用地中规划出一个高科技工业园区（如图中阴影部分），形状为直角梯形 $QPRE$ （线段 EQ 和 RP 为两个底边），已知 $AB = 2\text{km}, BC = 6\text{km}, AE = BF = 4\text{km}$ ，其中 AF 是以 A 为顶点、 AD 为对称轴的抛物线段. 试求该高科技工业园区的最大面积.



15. 已知函数 $f(x) = 2x \ln x - 1$. (1) 求函数 $f(x)$ 的最小值及曲线 $f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程; (2) 若不等式 $f(x) \leq 3x^2 + 2ax$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

16. 已知圆 $O: x^2 + y^2 = r^2 (r > 0)$ ，与 y 轴交于 M 、 N 两点且 M 在 N 的上方. 若直线

$y = 2x + \sqrt{5}$ 与圆 O 相切.

(1) 求实数 r 的值;

(2) 若动点 P 满足 $PM = \sqrt{3}PN$ ，求 $\triangle PMN$ 面积的最大值.

(3) 设圆 O 上相异两点 A 、 B 满足直线 MA 、 MB 的斜率之积为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$. 试探究直线 AB 是否经过定点，若经过，请求出定点的坐标；若经过，请说明理由.