江苏省仪征中学2019-2020学年第一学期高三数学

周三练习（8）

2018. 10. 30

范围：集合与逻辑、函数与导数、三角函数、平面向量、直线与圆 、圆锥曲线、不等式

一．填空题：本大题共14小题，每小题5分，计70分.不需写出解答过程，请把答案写在答题纸的指定位置上.

一、填空题（本大题共14小题，每小题5分，共70分，请将答案填写在答题卷相应的位置上）

1．复数$z=\dfrac{2+i}{1-i}$的实部为________.

2．命题“$\forall m\in R,m^2+1>0$”的否定是_______.

3．已知向量$\vec{a}=(1,2),\vec{b}=(-2,k)$，且$\vec{a}//\vec{b}$，则实数$k=$_________.

4．已知直线$l_1:ax-y+2a+1=0$和$l_2:2x-(a-1)y+2=0\ (a\in R)$，若$l_1\perp l_2$，则$a=$________.

5．已知$\alpha\in(\dfrac{\pi}{2},\pi)$，且$\tan\alpha=-2$，则$\cos2\alpha=$__________.

6．已知实数x，y满足$\begin{cases}x-y+5\ge 0\\ x\le 3\\ x+y\ge 0\end{cases}$，则目标函数$z=x+2y$的最小值为_________.

7．已知函数$f\left(x\right)=\ln x-\dfrac{1}{x}$，若函数$f\left(x\right)$的零点所在的区间为$\left(k,k+1\right)\left(k\in Z\right)$，则$k=$_________.

8．若双曲线$\dfrac{x^2}{m}-\dfrac{y^2}{m+2}=1$的一个焦点与抛物线$y^2=8x$的焦点相同，则$m=$________.

9．若函数$f(x)=(x+a)(bx+2a)\ (a,b\in R)$是偶函数，且它的值域为$(-\infty,8]$，则$ab=$________.

10．函数$f(x)=\dfrac{1}{2}\sin(\omega x+\dfrac{\pi}{6})(\omega>0)$的图象与直线$y=m$相切，相邻切点之间的距离为$\pi$． 若点$A(x_0,y_0)$是$y=f(x)$图象的一个对称中心，且$x_0\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$， 则$x_0=$________.

11．椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$的一条准线与$x$轴的交点为$P$，点$A$为其短轴的一个端点，若$PA$的中点在椭圆$C$上，则椭圆的离心率为________.

12．函数$f(x)=2x^2-4x+1\left(x\in R\right)$，若$f(x_1)=f(x_2)$，且$x_1>x_2$，则$\dfrac{x_1^2+x_2^2}{x_1-x_2}$的最小值为_______.

13．已知向量$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$满足$|\overrightarrow{OA}|=1$，$|\overrightarrow{OB}|=2$，$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{7}$，$\overrightarrow{AC}=\lambda(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})(\lambda\in R)$，若$|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{7}$，则$\lambda$所有可能的值为________.

14.已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上且周期为 3 的周期函数，当 $x\in(0,3]$ 时，$f(x)=1-|x-1|$.

若函数 $y=f(x)-\log_a x(a>0且a\neq1)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有 3 个互不相同的零点，则实数 a 的取值范围是_________.

二、解答题：本大题共 6 小题，共计 90 分．请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15．（本题满分 14 分）

已知集合 $A=\left\{x\,|\,\dfrac{4}{x+1}>1\right\}$，$B=\left\{x\,|\,\left(x-m-4\right)\left(x-m+1\right)>0\right\}$.

（1）若 $m=2$，求集合 $A\bigcup B$；

（2）若 $A\bigcap B=\varnothing$，求实数 m 的取值范围.

16．（本题满分 14 分）

在 ΔABC 中，a,b,c 分别为角 A,B,C 所对的边，已知向量 $\vec{m}=\left(\cos B,\sin B\right)$，$\vec{n}=\left(\sin C-2\sin A,\cos C\right)$，且 $\vec{m}\perp\vec{n}$.

（1）求角 B 的大小；

（2）若 $a+c=7$，$b=\sqrt{13}$，求 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$ 的值.

17．（本小题满分 14 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，已知圆 M：$x^2+y^2-8x+6=0$，过点 $P(0,2)$ 且斜率为 k 的直线与圆 M 相交于不同的两点 A,B，线段 AB 的中点为 N 。

⑴求 k 的取值范围；

⑵若 $ON//MP$，求 k 的值。

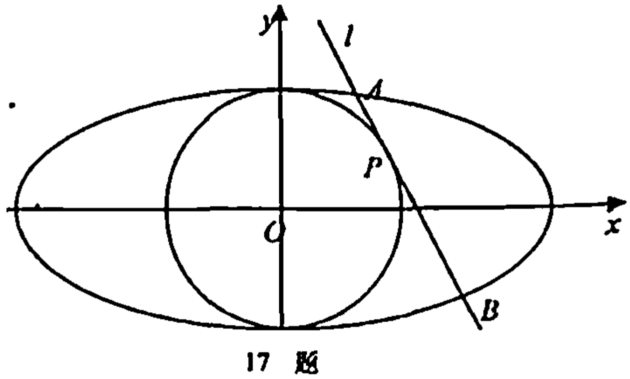
18. （本小题满分 16 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的一条准线方程为 $x=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$，

右焦点 $F(\sqrt{3},0)$，圆 $O:x^2+y^2=b^2$，直线 l 与圆 O 相切于第一象限内的点 P 且与椭圆相交于 A、B 两点.

(1) 求椭圆 C 的标准方程；

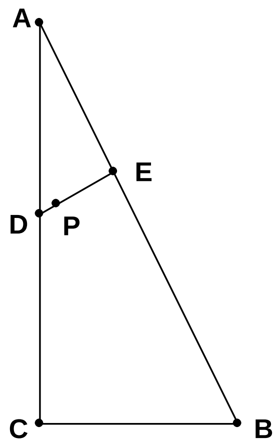
(2) 若 $\triangle OAB$ 的面积为 $\dfrac{2\sqrt{6}}{7}$，求直线 l 的斜率



第 18 题图

19.（本小题满分 16 分）

某小区有一块三角形空地，如图△ ABC，其中 AC=180 米，BC=90 米，∠C=90°，开发商计划在这片空地上进行绿化和修建运动场所，在△ ABC 内的 P 点处有一服务站（其大小可忽略不计），开发商打算在 AC 边上选一点 D，然后过点 P 和点 D 画一分界线与边 AB 相交于点 E，在△ ADE 区域内绿化，在四边形 BCDE 区域内修建运动场所．现已知点 P 处的服务站与 AC 距离为 10 米，与 BC 距离为 100 米．设 DC=d 米，试问 d 取何值时，运动场所面积最大？



20．（本小题满分 16 分）

已知函数 $f(x)=ax+\dfrac{2}{x}+6$，其中 a 为实常数.

（1）若 $f(x)>3x$ 在 $(1,+\infty)$ 上恒成立，求 a 的取值范围；

（2）已知 $a=\dfrac{3}{4}$，P_1,P_2 是函数 $f(x)$ 图象上两点，若在点 P_1,P_2 处的两条切线相互平行，求这两条切线间距离的最大值；

（3）设定义在区间 D 上的函数 $y=s(x)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 处的切线方程为 $l:y=t(x)$，当 $x\neq x_0$ 时，若 $\dfrac{s(x)-t(x)}{x-x_0}>0$ 在 D 上恒成立，则称点 P 为函数 $y=s(x)$ 的“好点”. 试问函数 $g(x)=x^2f(x)$ 是否存在“好点”. 若存在，请求出所有“好点”坐标，若不存在，请说明理由.

周三练习（8）参考答案

1、$\frac{1}{2}$　　2、$\exists x\in R,x^2+1\le 0$　　3、-4　　4、$\frac{1}{3}$　　5、$-\frac{3}{5}$　　6、-3

7、1　　8、1　　9、± 4　　10、$\frac{5\pi}{12}$　　11、$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　12、2　13、0、2

14、$\left(\frac{1}{9},\frac{1}{6}\right]\cup\left(4,7\right)$

15、（1）由$\frac{4}{x+1}>1$得$-1<x<3$

即$A=\left\{x|-1<x<3\right\}$，…………………………………………………2 分

当$m=2$时，由$\left(x-6\right)\left(x-1\right)>0$得$x>6$或$x<1$ ………………………………4 分

所以$A\bigcup B=\left\{x\,|\,x<3或x>6\right\}$ ………………………………………………7 分

（2）由$\left(x-m-4\right)\left(x-m+1\right)>0$得$x>m+4$或$x<m-1$

即$B=\left\{x\,|\,x>m+4或x<m-1\right\}$ ………………………………………………9 分

因为$A\bigcap B=\varnothing$，所以$\begin{cases}3\le m+4\\-1\ge m-1\end{cases}$，………………………………………12 分

即$-1\le m\le 0$． ……………………………………………………………………14 分

16、（1）因为$\vec{m}\perp\vec{n}$，所以$\cos B\left(\sin C-2\sin A\right)+\sin B\cos C=0$，

即：$\sin\left(B+C\right)-2\cos B\sin A=\sin A\left(1-2\cos B\right)=0$ ………………………3 分

因为$A\in\left(0,\pi\right)$，所以$\sin A\ne 0$，故$\cos B=\frac{1}{2}$，…………………………………5 分

因为$B\in\left(0,\pi\right)$，所以$B=\frac{\pi}{3}$． ……………………………………………………7 分

（2）由（1）可知，因为$B=\frac{\pi}{3}$，$b=\sqrt{13}$，

所以$13=a^2+c^2-2ac\cos\frac{\pi}{3}=a^2+c^2-ac$，　　　①　…………………9 分

又$a+c=7$，　　　　　　　　　　　　　　　②

由①②解得$ac=12$ ………………………………………………………………11 分

所以$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}=ac\cos B=6$ …………………………………………………14 分

17、（1）方法一：圆的方程可化为$(x-4)^2+y^2=10$，直线可设为$y=kx+2$，

即$kx-y+2=0$，圆心M到直线的距离为$d=\frac{|4k+2|}{\sqrt{k^2+1}}$，

依题意$d<\sqrt{10}$，即$(4k+2)^2<10(k^2+1)$，解之得：$-3<k<\frac{1}{3}$；　　……7 分

方法二：由$\begin{cases}x^2+y^2-8x+6=0\\y=kx+2\end{cases}$可得：$(k^2+1)x^2+4(k-2)x+10=0$，

依题意$\Delta=[4(k-2)]^2-40(k^2+1)>0$，　解之得：$-3<k<\frac{1}{3}$．

（2）方法一：因为$ON//MP$，且MP斜率为$-\frac{1}{2}$，故直线ON：$y=-\frac{1}{2}x$，

由$\begin{cases} y=-\dfrac{1}{2}x \\ y=kx+2 \end{cases}$ 可得$N(-\dfrac{4}{2k+1},\dfrac{2}{2k+1})$，

又N是AB中点，所以$MN\perp AB$，即$\dfrac{\dfrac{2}{2k+1}}{-\dfrac{4}{2k+1}-4}=-\dfrac{1}{k}$，解之得：$k=-\dfrac{4}{3}$． ……15 分

方法二：设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则$N(\dfrac{x_1+x_2}{2},\dfrac{y_1+y_2}{2})$

由$\begin{cases} x^2+y^2-8x+6=0 \\ y=kx+2 \end{cases}$可得：$(k^2+1)x^2+4(k-2)x+10=0$，所以$x_1+x_2=-\dfrac{4(k-2)}{k^2+1}$，

又$ON//MP$，且MP斜率为$-\dfrac{1}{2}$，

所以$\dfrac{\dfrac{y_1+y_2}{2}}{\dfrac{x_1+x_2}{2}}=-\dfrac{1}{2}$，即$\dfrac{y_1+y_2}{x_1+x_2}=-\dfrac{1}{2}$，也就是$\dfrac{k(x_1+x_2)+4}{x_1+x_2}=-\dfrac{1}{2}$，

所以$\dfrac{k(-\dfrac{4(k-2)}{k^2+1})+4}{-\dfrac{4(k-2)}{k^2+1}}=-\dfrac{1}{2}$，解之得：$k=-\dfrac{4}{3}$．

方法三：点N的坐标同时满足$\begin{cases} y=kx+2 \\ y=-\dfrac{1}{2}x \\ \dfrac{y}{x-4}=-\dfrac{1}{k} \end{cases}$，解此方程组，消去$x,y$可得$k=-\dfrac{4}{3}$．

18、

17.解：（1）椭圆的准线方程为$x=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$，右焦点为$(\sqrt{3},0)$

$\therefore\begin{cases} \dfrac{a^2}{c}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3} \\ c=\sqrt{3} \end{cases}$，$\therefore a=2$，$\because a^2=b^2+c^2$，$\therefore b=1$

$\therefore$椭圆C的方程为$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$． ……………………………………………3 分

（3）直线l与圆O相切与第一象限内的点P，$\therefore OP\perp AB$，且直线AB的斜率$k<0$．

$\therefore S_{\Delta OAB}=\dfrac{1}{2}\cdot|AB|\cdot|OP|=\dfrac{2\sqrt{6}}{7}$，$\because|OP|=1$，$\therefore|\mathrm{AB}|=\dfrac{4\sqrt{6}}{7}$．

设直线l的方程为$y=kx+m$，$k<0$，$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$

$\because$直线l与圆O相切，$\therefore d=\dfrac{|m|}{\sqrt{k^2+1}}=1$，$\therefore m^2=k^2+1$， ………………5 分

由$\begin{cases} y=kx+m \\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=1 \end{cases}$得$(4k^2+1)x^2+8kmx+4m^2-4=0$

$\therefore\begin{cases} \Delta=64k^2m^2-4(4k^2+1)(4m^2-4)>0 \\ x_1+x_2=-\dfrac{8km}{4k^2+1} \\ x_1x_2=\dfrac{4m^2-4}{4k^2+1} \end{cases}$ ……………………………………8 分

$\therefore|\mathrm{AB}|=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$

$=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(-\dfrac{8km}{4k^2+1})^2-4\cdot\dfrac{4m^2-4}{4k^2+1}}$

$\therefore|\mathrm{AB}|=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$

$=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(-\dfrac{8km}{4k^2+1})^2-4\cdot\dfrac{4m^2-4}{4k^2+1}}$

$\because m^2=k^2+1$

$\therefore|AB|=\dfrac{4\sqrt{3}|k|}{4k^2+1}\cdot\sqrt{k^2+1}=\dfrac{4\sqrt{6}}{7}$

化简得$17k^4+33k^2-2=0$

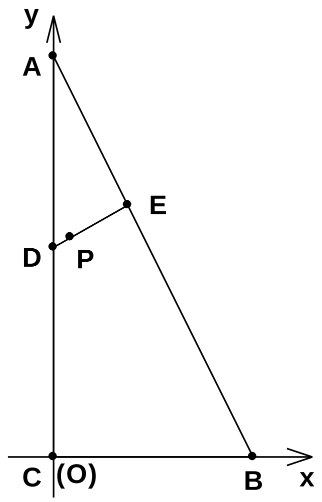
$\therefore k^2=-2$或$\dfrac{1}{17}$（$k^2=-2$舍去） ……………………………………………13 分

$\because k<0$，$\therefore k=-\dfrac{\sqrt{17}}{17}$． ……………………………………………14

19、解法一：以 C 为坐标原点，CB 所在直线为x轴，CA 所在直线为y轴建立直角坐标系，……2 分

则 $C(0,0)$， $A(0,180)$， $B(90,0)$， $P(10,100)$， $D(0,d)$.

DE 直线方程： $y-100=\dfrac{d-100}{-10}(x-10)$，①……4 分



AB 所在直线方程为 $2x+y=180$，②……6 分

解①、②组成的方程组得， $x_E=\dfrac{10d-1800}{d-120}$，……8 分

$\because$ 直线 DE 经过点 B 时 $d=\dfrac{225}{2}$， $\therefore 0<d<\dfrac{225}{2}$，

$S_{\triangle ADE}=\dfrac{1}{2}AD\cdot|x_E|=\dfrac{1}{2}\cdot(180-d)\cdot\dfrac{10d-1800}{d-120}$……10 分

$=5\cdot\dfrac{(180-d)^2}{120-d}$， 设 $120-d=t\in(\dfrac{15}{2},120)$，

$S_{\triangle ADE}=5\cdot\dfrac{(60+t)^2}{t}=5\cdot(t+\dfrac{3600}{t}+120)$，

$\because t+\dfrac{3600}{t}\ge120$（当且仅当 $t=60$，即 $k=4$ 时取等号），此时 $d=120-t=60$，

$\therefore$ 当 d =60 时，绿化面积最小，从而运动区域面积最大． ……………………………15 分

解法二：如图，分别过点 P,E 作 AC 的垂线，垂足为 Q,F，设 $EF=h$，则

若如图 1 所示，则 $PQ=10,CQ=100,DQ=100-d$，

由 $\Delta AFE\sim\Delta ACB$ 得 $\dfrac{AF}{180}=\dfrac{h}{90}$，即 $AF=2h$，从而 $CF=180-2h$， $DF=180-2h-d$，

由 $\Delta DPQ\sim\Delta DEF$ 得 $\dfrac{10}{h}=\dfrac{100-d}{180-2h-d}$，

解得 $h=\dfrac{1800-10d}{120-d}$

（若如图 2 所示，则 $PQ=10,CQ=100,DQ=d-100$，

$AF=2h$， $CF=180-2h$， $DF=2h+d-180$，

由 $\Delta DPQ\sim\Delta DEF$ 得 $\dfrac{10}{h}=\dfrac{100-d}{180-2h-d}$，

解得 $h=\dfrac{1800-10d}{120-d}$）

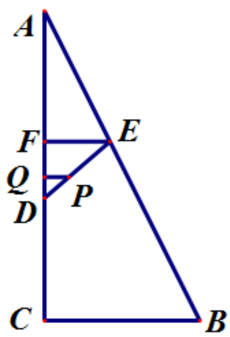


图1

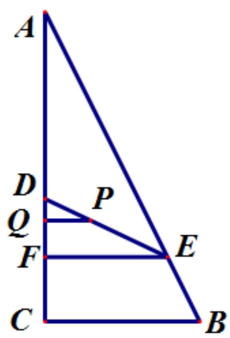


图2

由 $0<h<90$ 得 $0<d<\dfrac{225}{2}$，

由 $S_{\triangle ADE}=\dfrac{1}{2}AD\cdot h=\dfrac{1}{2}\cdot(180-d)\cdot\dfrac{10d-1800}{d-120}$（下同解法一）

20、解：（1）方法一： $f(x)>3x$ 在 $(1,+\infty)$ 上恒成立，即为 $(a-3)x^2+6x+2>0$ 在 $(1,+\infty)$ 上恒成立，

①$a=3$时，结论成立；

②$a>3$时，函数 $h(x)=(a-3)x^2+6x+2$ 图象的对称轴为 $x=-\dfrac{6}{2(a-3)}<0$，

所以函数 $h(x)=(a-3)x^2+6x+2$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递增，

依题意 $h(1)>0$，即 $a>-5$，所以 $a>3$；

③$a<3$不合要求，

综上可得，实数 a 的取值范围是 $a\ge3$． ……………………………………4 分

方法二： $f(x)>3x$ 在 $(1,+\infty)$ 上恒成立等价于 $a>-\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{6}{x}+3$，

令 $h\left(x\right)=-\frac{2}{x^2}-\frac{6}{x}+3=-2\left(\frac{1}{x}+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{15}{2}$

因为 $x>1$，所以 $0<\frac{1}{x}<1$，故 $-5<h\left(x\right)<3$ 所以 $a\geq 3$.

（2） $f'(x)=\frac{3}{4}-\frac{2}{x^2}$　　设 $P_1(x_1,y_1)$， $P_2(x_2,y_2)$，过点 P_1,P_2 的两切线互相平行，

则 $\frac{3}{4}-\frac{2}{x_1^2}=\frac{3}{4}-\frac{2}{x_2^2}$，所以 $x_1=x_2$（舍去），或 $x_1=-x_2$，

过点 P_1 的切线 l_1： $y-y_1=f'(x_1)(x-x_1)$，即 $f'(x_1)x-y+f(x_1)-x_1f'(x_1)=0$，……6 分

过点 P_2 的切线 l_2： $f'(x_2)x-y+f(x_2)-x_2f'(x_2)=0$

两平行线间的距离是 $d=\frac{|f(x_1)-f(x_2)-x_1f'(x_1)+x_2f'(x_2)|}{\sqrt{1+[f'(x_1)]^2}}$

$$=\frac{2|(\frac{3}{4}x_1+\frac{2}{x_1})-x_1(\frac{3}{4}-\frac{2}{x_1^2})|}{\sqrt{1+(\frac{3}{4}-\frac{2}{x_1^2})^2}}=\frac{\frac{8}{|x_1|}}{\sqrt{\frac{25}{16}-\frac{3}{x_1^2}+\frac{4}{x_1^4}}}=\frac{8}{\sqrt{\frac{25}{16}x_1^2+\frac{4}{x_1^2}-3}},$$

因为 $\frac{25}{16}x_1^2+\frac{4}{x_1^2}\geq 2\sqrt{\frac{25}{16}x_1^2\cdot\frac{4}{x_1^2}}=5$，所以 $d\leq\frac{8}{\sqrt{5-3}}=4\sqrt{2}$

即两平行切线间的最大距离是 $4\sqrt{2}$．…………………………………………………10 分

（3） $g(x)=x^2f(x)=ax^3+6x^2+2x$，设 $g(x)$ 存在“好点” $P(x_0,y_0)$，

由 $g'(x)=3ax^2+12x+2$，得 $h(x)=g'(x_0)(x-x_0)+g(x_0)$，

依题意 $\frac{g(x)-h(x)}{x-x_0}>0$ 对任意 $x\neq x_0$ 恒成立，

因为 $\frac{g(x)-[g'(x_0)(x-x_0)+g(x_0)]}{x-x_0}=\frac{[g(x)-g(x_0)]-g'(x_0)(x-x_0)}{x-x_0}$，

$$=\frac{[(ax^3+6x^2+2x)-(ax_0^3+6x_0^2+2x_0)]-(3ax_0^2+12x_0+2)(x-x_0)}{x-x_0}$$

$=[a(x^2+x_0x+x_0^2)+6(x+x_0)+2]-(3ax_0^2+12x_0+2)=ax^2+(ax_0+6)x-(2ax_0^2+6x_0)$，…13 分

所以 $ax^2+(ax_0+6)x-(2ax_0^2+6x_0)>0$ 对任意 $x\neq x_0$ 恒成立，

①若 $a\leq 0$， $ax^2+(ax_0+6)x-(2ax_0^2+6x_0)>0$ 不可能对任意 $x\neq x_0$ 恒成立，

即 $a\leq 0$ 时，不存在“好点”；

②若 $a>0$，因为当 $x=x_0$ 时， $ax^2+(ax_0+6)x-(2ax_0^2+6x_0)=0$，

要使 $ax^2+(ax_0+6)x-(2ax_0^2+6x_0)>0$ 对任意 $x\neq x_0$ 恒成立，

必须 $\Delta=(ax_0+6)^2+4a(2ax_0^2+6x_0)\leq 0$ 即 $(ax_0+2)^2\leq 0$，所以 $x_0=-\frac{2}{a}$，

综上可得，当 $a\leq 0$ 时，不存在“好点”；当 $a>0$ 时，存在惟一“好点”为 $(-\frac{2}{a},\frac{16-4a}{a^2})$．…16 分