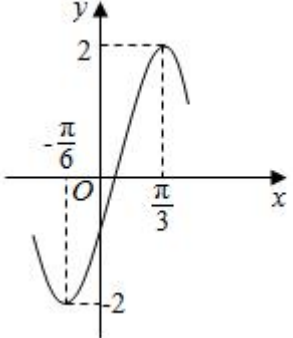
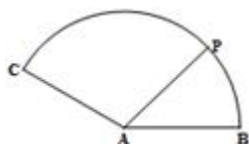


江苏省仪征中学高一数学期末综合练习试卷

一、选择题（本大题共 10 小题，共 50.0 分）

1. 集合 $A=\{1, 2\}$ 的非空子集个数为 ()
A. 4 B. 2 C. 1 D. 3
2. 函数 $f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{x-2}$ 的定义域是 ()
A. $[-2, 2)$ B. $[-2, 2) \cup (2, +\infty)$
C. $[-2, +\infty)$ D. $(2, +\infty)$
3. 已知函数 $f(x) = 3^x - (\frac{1}{3})^x$, 则 $f(x)$ ()
A. 是奇函数, 且在 R 上是增函数 B. 是偶函数, 且在 R 上是增函数
C. 是奇函数, 且在 R 上是减函数 D. 是偶函数, 且在 R 上是减函数
4. 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x - 2, & x < 1 \\ 2x - 3, & x \geq 1 \end{cases}$, 若 $f(x_0) = 1$, 则 $x_0 =$ ()
A. -1 或 3 B. 2 或 3 C. -1 或 2 D. -1 或 2 或 3
5. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} (3-a)^x, & x \leq 2 \\ \log_a(x-1) + 3, & x > 2 \end{cases}$ 是定义域上的单调增函数, 则 a 的取值范围是 ()
A. $[3 - \sqrt{3}, 2)$ B. $(\sqrt{5} - 1, \sqrt{3})$ C. $(1, \sqrt{3})$ D. $(1, 3 - \sqrt{3})$
6. 函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的部分图象如图所示, 则 ()
A. $y = 2 \sin(2x - \frac{\pi}{6})$
B. $y = 2 \sin(2x - \frac{\pi}{3})$
C. $y = 2 \sin(x + \frac{\pi}{6})$
D. $y = 2 \sin(x + \frac{\pi}{3})$
- 
7. 将函数 $y = \sin x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位, 得到函数 $y = f(x)$ 的函数图象, 则下列说法正确的是 ()
A. $y = f(x)$ 是奇函数
B. $y = f(x)$ 的周期为 π
C. $y = f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{2}$ 对称
D. $y = f(x)$ 的图象关于点 $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ 对称
8. 三角函数值 $\sin 1$, $\sin 2$, $\sin 3$ 的大小顺序是 ()
A. $\sin 1 > \sin 2 > \sin 3$ B. $\sin 2 > \sin 1 > \sin 3$
C. $\sin 1 > \sin 3 > \sin 2$ D. $\sin 3 > \sin 2 > \sin 1$

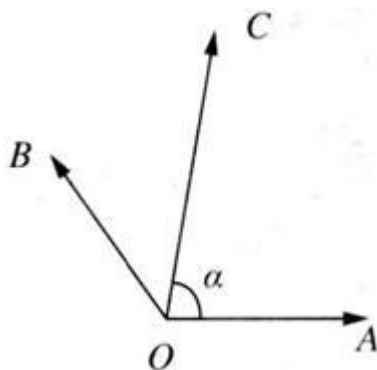
9. 如图, 扇形的半径为 1, 圆心角 $\angle BAC = 150^\circ$, 点 P 在弧 BC 上运动, $\overrightarrow{AP} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC}$, 则 $\sqrt{3}m - n$ 的最大值是 ()



- A. 1 B. $\sqrt{3}$ C. 2 D. $2\sqrt{3}$
10. 方程 $\sin 2\pi x - \frac{2}{2x-1} = 0$ ($x \in [-2, 3]$) 所有根之和为 ()
- A. $\frac{2}{3}$ B. 1 C. 2 D. 4

二、填空题 (本大题共 6 小题, 共 30.0 分)

11. 一扇形的圆心角为 2 弧度, 记此扇形的周长为 C , 面积为 S , 则 $\frac{C-1}{S}$ 的最大值为 _____.
12. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} (\frac{1}{2})^x + 1, & x \geq 1 \\ \frac{3x}{2}, & 0 < x < 1 \end{cases}$, 若函数 $g(x) = f(x) - k$ 有两不同的零点, 则实数 k 的取值范围是 _____.
13. 设 α 为锐角, 若 $\sin(\alpha + \frac{\pi}{6}) = \frac{3}{5}$, 则 $\cos(2\alpha + \frac{\pi}{12})$ 的值为 _____.
14. 已知 $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ 是互相垂直的单位向量, 若 $\sqrt{3}\vec{e}_1 - \vec{e}_2$ 与 $\vec{e}_1 + \lambda\vec{e}_2$ 的夹角为 60° , 则实数 λ 的值是 _____.
15. 下列说法中, 所有正确说法的序号是 _____.
- ① 终边落在 y 轴上的角的集合是 $\{\theta | \theta = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$;
 - ② 函数 $y = 2\cos(x - \frac{\pi}{4})$ 图象的一个对称中心是 $(\frac{3\pi}{4}, 0)$;
 - ③ 函数 $y = \tan x$ 在第一象限是增函数;
 - ④ 为了得到函数 $y = \sin(2x - \frac{\pi}{3})$ 的图象, 只需把函数 $y = \sin 2x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度.
16. 如图, 在同一个平面内, 向量 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ 的模分别为 1, 1, $\sqrt{2}$, $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OC}$ 的夹角为 α , 且 $\tan \alpha = 7$, $\overrightarrow{OB}$ 与 $\overrightarrow{OC}$ 的夹角为 45° , 若 $\overrightarrow{OC} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}$ ($m, n \in \mathbb{R}$), 则 $m+n =$ _____.



三、解答题 (本大题共 6 小题, 共 72.0 分)

17. 集合 $A = \{x | -3 \leq x < 5\}$, $B = \{x | -2 < x < 7\}$
- (1) 求 $A \cap B, A \cup B$

(2) $(\complement_R A) \cap B$.

18. 已知向量 $\vec{a} = (\sin x, \frac{3}{2})$, $\vec{b} = (\cos x, -1)$,

(I) 当 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ 时, 求 $\tan 2x$ 的值;

(II) 求函数 $f(x) = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{b}$ 在 $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ 上的值域.

19. 已知函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi) + B$ ($A > 0$, $\omega > 0$, $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的最小正周期为 2π , 最

小值为 -2, 且当 $x = \frac{5\pi}{6}$ 时, 函数取得最大值 4.

(I) 求函数 $f(x)$ 的解析式;

(II) 求函数 $f(x)$ 的单调递增区间;

(III) 若当 $x \in [\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}]$ 时, 方程 $f(x) = m + 1$ 有解, 求实数 m 的取值范围.

20. 某群体的人均通勤时间, 是指单日内该群体中成员从居住地到工作地的平均用时, 某地上班族 S 中的成员仅以自驾或者公交方式通勤, 分析显示: 当 S 中 $x\%$ ($0 < x < 100$)

的成员自驾时, 自驾群体的人均通勤时间为 $f(x) = \begin{cases} 30, & 0 < x \leq 30 \\ 2x + \frac{1800}{x} - 90, & 30 < x < 100 \end{cases}$

(单位: 分钟), 而公交群体的人均通勤时间不受 x 影响, 恒为 40 分钟, 试根据上述分析结果回答下列问题:

(1) 当 x 在什么范围内时, 公交群体的人均通勤时间少于自驾群体的人均通勤时间?

(2) 求该地上班族 S 的人均通勤时间 $g(x)$ 的表达式; 讨论 $g(x)$ 的单调性, 并说明其实际意义.

21. 已知 $f(x)$ 是定义在 $[-2, 2]$ 上的奇函数, 且 $f(2) = 3$. 若对任意的 $m, n \in [-2, 2]$, $m+n \neq 0$, 都有 $\frac{f(m)+f(n)}{m+n} > 0$.

- (1) 判断函数 $f(x)$ 的单调性, 并说明理由;
- (2) 若 $f(2a-1) < f(a^2-2a+2)$, 求实数 a 的取值范围;
- (3) 若不等式 $f(x) \leq (5-2a)t+1$ 对任意 $x \in [-2, 2]$ 和 $a \in [-1, 2]$ 都恒成立, 求实数 t 的取值范围.

22. 设函数 $f(x) = mx^2 - nx\frac{3}{4} + m$, 其中 $m, n \in \mathbb{R}$.

- (1) 若 $m=n=1$, 求函数 $f(\log_2 x)$ 在区间 $[1, 4]$ 上的取值范围;
- (2) 若 $n=1$ 时, 且函数 $f(x)$ 在区间 $[-1, 1]$ 上恰有一个零点, 求实数 m 的取值范围;
- (3) 若 $m=1$, 对任意的 $x_1, x_2 \in [n-1, n+1]$, 都有 $|f(x_1) - f(x_2)| \leq 6$ 求 n 的取值范围.

答案和解析

1. 【答案】D

【解析】

解:集合 $\{1, 2\}$ 的子集的个数为 $2^2=4$ 个,

去掉空集, 得到集合 $\{1, 2\}$ 的非空子集的个数为 $2^2-1=3$ 个.

故选:D.

若集合A中有n个元素, 则集合A中有 2^n-1 个真子集.

本题考查子集的概念和应用, 解题时要熟记若集合A中有n个元素, 则集合A中有 2^n 个子集, 有 2^n-1 个真子集.

2. 【答案】B

【解析】

【分析】

本题考查函数的定义域及其求法, 是基础的计算题. 由根式内部的代数式大于等于0, 分式的分母不为0联立不等式组求解.

【解答】

解: 由 $\begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x-2 \neq 0 \end{cases}$, 解得 $x \geq -2$ 且 $x \neq 2$.

$\therefore$ 函数 $f(x)=\frac{\sqrt{x+2}}{x-2}$ 的定义域是 $[-2, 2) \cup (2, +\infty)$.

故选 B.

3. 【答案】A

【解析】

解: $f(x)=3^x-(\frac{1}{3})^x=3^x-3^{-x}$,

$\therefore f(-x)=3^{-x}-3^x=-f(x)$,

即函数 $f(x)$ 为奇函数,

又由函数 $y=3^x$ 为增函数, $y=(\frac{1}{3})^x$ 为减函数,

故函数 $f(x)=3^x-(\frac{1}{3})^x$ 为增函数,

故选:A.

由已知得 $f(-x)=-f(x)$ ，即函数 $f(x)$ 为奇函数，由函数 $y=3^x$ 为增函数， $y=(\frac{1}{3})^x$ 为减函数，结合“增”-“减”=“增”可得答案.

本题考查的知识点是函数的奇偶性，函数的单调性，是函数图象和性质的综合应用，难度不大，属于基础题.

4. 【答案】C

【解析】

解：函数 $f(x)=\begin{cases} x^2-2x-2, & x<1 \\ 2x-3, & x\geq 1 \end{cases}$ ， $f(x_0)=1$ ，

当 $x_0<1$ 时， $x_0^2-2x_0-2=1$ ，解得 $x_0=-1$.

当 $x_0\geq 1$ 时， $2x_0-3=1$ ，解得 $x_0=2$.

故选：C.

利用分段函数的解析式，列出方程求解即可.

本题考查分段函数的应用，函数的零点的求法，考查计算能力.

5. 【答案】A

【解析】

解：函数 $f(x)=\begin{cases} (3-a)^x, & x\leq 2 \\ \log_a(x-1)+3, & x>2 \end{cases}$ 是定义域上的单调增函数，

可得 $\begin{cases} 3-a>1 \\ a>1 \\ (3-a)^2\leq \log_a 1+3 \end{cases}$ ，

解得： $a\in[3-\sqrt{3}, 2)$.

故选：A.

利用分段函数以及指数函数与对数函数的性质，列出不等式组求解即可.

本题考查分段函数的单调性的应用，指数函数以及对数函数的简单性质的应用，考查转化思想以及计算能力.

6. 【答案】A

【解析】

解：由图可得：函数的最大值为 2，最小值为 -2，故 $A=2$ ，

$\frac{T}{2}=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}$ ，故 $T=\pi$ ， $\omega=2$ ，

故 $y=2\sin(2x+\varphi)$,

将 $(\frac{\pi}{3}, 2)$ 代入可得: $2\sin(\frac{2\pi}{3}+\varphi)=2$,

则 $\varphi=-\frac{\pi}{6}$ 满足要求,

故 $y=2\sin(2x-\frac{\pi}{6})$,

故选: A.

根据已知中的函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的部分图象, 求出满足条件的 A, ω, φ 值, 可得答案.

本题考查的知识点是由 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的部分图象确定其解析式, 确定各个参数的值是解答的关键.

7. 【答案】 D

【解析】

解: 将函数 $y=\sin x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位, 得 $y=\sin(x+\frac{\pi}{2})=\cos x$.

即 $f(x)=\cos x$.

$\therefore f(x)$ 是周期为 2π 的偶函数, 选项 A, B 错误;

$\because \cos \frac{\pi}{2} = \cos(-\frac{\pi}{2}) = 0$,

$\therefore y=f(x)$ 的图象关于点 $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ 、 $(\frac{\pi}{2}, 0)$ 成中心对称.

故选: D.

利用函数图象的平移法则得到函数 $y=f(x)$ 的图象对应的解析式为 $f(x)=\cos x$,

则可排除选项 A, B, 再由

$\cos \frac{\pi}{2} = \cos(-\frac{\pi}{2}) = 0$ 即可得到正确选项.

本题考查函数图象的平移, 考查了余弦函数的性质, 属基础题.

8. 【答案】 B

【解析】

【分析】

本题考查了任意角的三角函数定义, 正弦函数的单调性及弧度角的大小估值,

是基础题. 先估计弧度角的大小, 再借助诱导公式转化到 $(0^\circ, 90^\circ)$ 上的正弦

值, 借助正弦函数在 $(0^\circ, 90^\circ)$ 的单调性比较大小.

【解答】

解: $\because 1$ 弧度 $\approx 57^\circ$, 2 弧度 $\approx 114^\circ$, 3 弧度 $\approx 171^\circ$,

$$\therefore \sin 1 \approx \sin 57^\circ,$$

$$\sin 2 \approx \sin 114^\circ = \sin 66^\circ,$$

$$\sin 3 \approx 171^\circ = \sin 9^\circ,$$

$\because y = \sin x$ 在 $(0, 90^\circ)$ 上是增函数,

$$\therefore \sin 9^\circ < \sin 57^\circ < \sin 66^\circ,$$

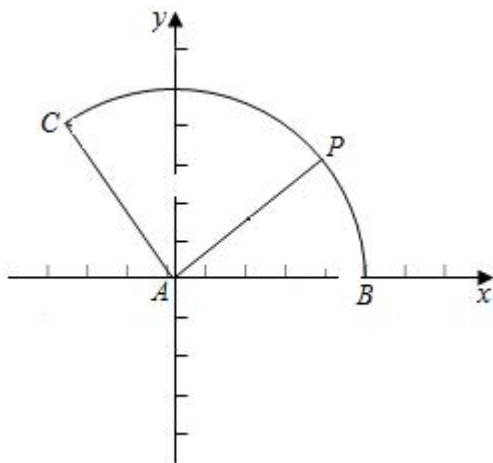
$$\text{即 } \sin 2 > \sin 1 > \sin 3.$$

故选 B.

9. 【答案】C

【解析】

解: 以 AB 为 x 轴, 以 A 为原点, 建立坐标系,



如图: $P(\cos\theta, \sin\theta)$, $0^\circ \leq \theta \leq 150^\circ$,

则 $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, $C(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$,

$$\because \overrightarrow{AP} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC},$$

$$\therefore (\cos\theta, \sin\theta) = m(1, 0) + n(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$$

$$= (m - \frac{\sqrt{3}}{2}n, \frac{n}{2}),$$

$$\therefore \cos\theta = m - \frac{\sqrt{3}}{2}n, \sin\theta = \frac{n}{2},$$

$$\therefore m = \cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta, n = 2\sin\theta,$$

$$\therefore \sqrt{3}m - n = \sqrt{3}\cos\theta + 3\sin\theta - 2\sin\theta = \sqrt{3}\cos\theta + \sin\theta$$

$$= 2\sin(\theta + 60^\circ),$$

$$\because 0^\circ \leq \theta \leq 150^\circ,$$

$$\therefore 60^\circ \leq \theta + 60^\circ \leq 210^\circ, \therefore \text{当 } \theta = 30^\circ \text{ 时,}$$

$\sqrt{3}m - n$ 的最大值为 2,

故选:C.

建立坐标系, 求出向量坐标, 设 $P(\cos\theta, \sin\theta)$, 根据向量坐标的运算得到

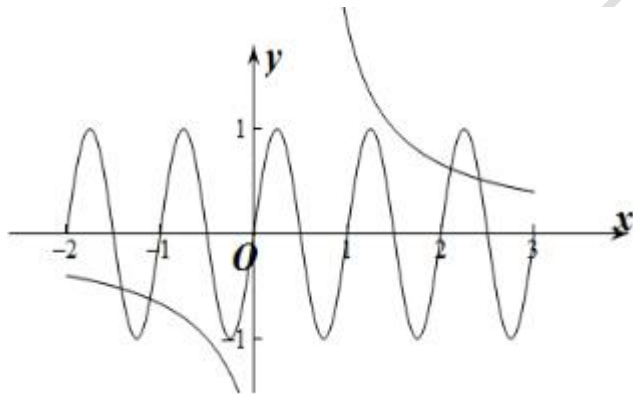
$m = \cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta$, $n = 2\sin\theta$, 则 $\sqrt{3}m - n = 2\sin(\theta + 60^\circ)$, 根据三角函数的性质即可求出最值.

本题考查了向量的坐标运算和三角函数的性质, 属于中档题.

10. 【答案】C

【解析】

解: 作出 $y = \sin 2\pi x$ 和 $y = \frac{2}{2x-1}$ 在 $[-2, 3]$ 上的函数图象如图所示:



由图象可知方程 $\sin 2\pi x - \frac{2}{2x-1} = 0$ 在 $[-2, 3]$ 上有 4 个根.

$\because y = \sin 2\pi x$ 和 $y = \frac{2}{2x-1}$ 都关于点 $(\frac{1}{2}, 0)$ 对称, 且 $[-2, 3]$ 关于点 $(\frac{1}{2}, 0)$ 对称,

$\therefore$ 方程的 4 个根两两关于点 $(\frac{1}{2}, 0)$ 对称,

$\therefore$ 方程的 4 个根的和为 $\frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2$.

故选:C.

作出函数图象判断根的个数, 利用图象的对称性得出根的和.

本题考查了方程的根与函数图象的关系, 属于中档题.

11. 【答案】4

【解析】

解: $\because$ 设扇形的弧长为 1, 圆心角大小为 2 , 半径为 r , 则 $l = 2r$, 可求:

$$C = l + 2r = 2r + 2r = 4r,$$

扇形的面积为 $S = \frac{1}{2}lr = \frac{1}{2} \times 2r \times r = r^2$,

$\therefore \frac{C-1}{S} = \frac{4r-1}{r^2} = -(\frac{1}{r})^2 + \frac{4}{r} = -(\frac{1}{r}-2)^2 + 4 \leq 4$, 当 $\frac{1}{r}=2$, 即 $r=\frac{1}{2}$ 时等号成立.

则 $\frac{C-1}{S}$ 的最大值为 4.

故答案为:4.

设扇形的半径为 r , 则可求: $C=4r$, $S=r^2$, 由配方法可得 $\frac{C-1}{S} = -(\frac{1}{r}-2)^2 + 4 \leq 4$,

当 $\frac{1}{r}=2$, 即 $r=\frac{1}{2}$ 时等号成立, 从而可求 $\frac{C-1}{S}$ 的最大值.

本题考查弧长公式, 扇形面积公式的应用, 考查方程思想和配方法, 考查计算能力, 属于中档题.

12. 【答案】 $(1, \frac{3}{2})$

【解析】

【分析】

本题考查函数零点的存在性. 利用数形结合的思想方法是本题求解的关键.

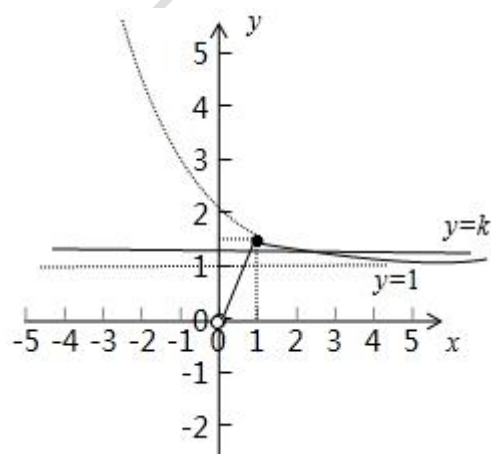
属于中档题, 函数 $g(x)=f(x)-k$ 有两个不同零点可以转化为函数 $y=f(x)$ 的

图象与函数 $y=k$ 的图象的有两个交点, 作出两函数图象, 由图象易得结果.

【解答】

解: 如图, 在同一坐标系中作出函数 $y=f(x)$ 与 $y=k$ 的图象, 由图象易知当

$1 < k < \frac{3}{2}$ 时, 两函数图象有两个交点.



故答案为 $(1, \frac{3}{2})$.

13. 【答案】 $\frac{31}{50}\sqrt{2}$

【解析】

解: 设 $\beta = \alpha + \frac{\pi}{6}$, α 为锐角, $\beta = \alpha + \frac{\pi}{6} \in (\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3})$,

$\because \sin\beta = \frac{3}{5} < \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{2\pi}{3}$, 可得 β 为锐角, 可求 $\cos\beta = \frac{4}{5}$, $\sin 2\beta = 2\sin\beta\cos\beta = \frac{24}{25}$,

$$\cos 2\beta = 1 - 2\sin^2\beta = \frac{7}{25},$$

$$\therefore \cos(2\alpha + \frac{\pi}{12}) = \cos(2\alpha + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}) = \cos(2\beta - \frac{\pi}{4}) = \cos 2\beta \cos \frac{\pi}{4} + \sin 2\beta \sin \frac{\pi}{4} = \frac{31}{50}\sqrt{2}.$$

故答案为: $\frac{31}{50}\sqrt{2}$.

先设 $\beta = \alpha + \frac{\pi}{6}$, 根据 $\sin\beta$ 求出 $\cos\beta$, 进而求出 $\sin 2\beta$ 和 $\cos 2\beta$, 最后用两角和的正弦公式得到 $\cos(2\alpha + \frac{\pi}{12})$ 的值.

本题要我们在已知锐角 $\alpha + \frac{\pi}{6}$ 的余弦值的情况下, 求 $2\alpha + \frac{\pi}{12}$ 的余弦函数值, 着重考查了两角和与差的正弦、余弦公式和二倍角的正弦、余弦等公式, 考查了三角函数中的恒等变换应用, 属于中档题.

14. 【答案】 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

【解析】

解: 【方法一】由题意, 设 $\vec{e}_1 = (1, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1)$,

$$\text{则 } \sqrt{3}\vec{e}_1 - \vec{e}_2 = (\sqrt{3}, -1),$$

$$\vec{e}_1 + \lambda\vec{e}_2 = (1, \lambda);$$

又夹角为 60° ,

$$\therefore (\sqrt{3}\vec{e}_1 - \vec{e}_2) \cdot (\vec{e}_1 + \lambda\vec{e}_2) = \sqrt{3} - \lambda = 2 \times \sqrt{1 + \lambda^2} \times \cos 60^\circ,$$

$$\text{即 } \sqrt{3} - \lambda = \sqrt{1 + \lambda^2},$$

$$\text{解得 } \lambda = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

【方法二】 $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ 是互相垂直的单位向量,

$$\therefore |\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = 1, \text{ 且 } \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 0;$$

又 $\sqrt{3}\vec{e}_1 - \vec{e}_2$ 与 $\vec{e}_1 + \lambda\vec{e}_2$ 的夹角为 60° ,

$$\therefore (\sqrt{3}\vec{e}_1 - \vec{e}_2) \cdot (\vec{e}_1 + \lambda\vec{e}_2) = |\sqrt{3}\vec{e}_1 - \vec{e}_2| \times |\vec{e}_1 + \lambda\vec{e}_2| \times \cos 60^\circ,$$

$$\text{即 } \sqrt{3} \vec{e}_1^2 + (\sqrt{3}\lambda - 1)$$

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 - \lambda \vec{e}_2^2 = \sqrt{3\vec{e}_1^2 - 2\sqrt{3}\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 + \vec{e}_2^2} \times \sqrt{\vec{e}_1^2 + 2\lambda\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 + \lambda^2\vec{e}_2^2} \times \frac{1}{2},$$

$$\text{化简得 } \sqrt{3} - \lambda = \sqrt{3+1} \times \sqrt{1+\lambda^2} \times \frac{1}{2},$$

$$\text{即 } \sqrt{3} - \lambda = \sqrt{1+\lambda^2},$$

$$\text{解得 } \lambda = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{故答案为: } \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

根据平面向量的数量积运算与单位向量的定义, 列出方程解方程即可求出 λ 的值.

本题考查了单位向量和平面向量数量积的运算问题, 是中档题.

15. 【答案】②④

【解析】

解: ①当角 θ 的终边落在 y 轴的非负半轴上时, 角 $\theta = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$,

当角 θ 的终边落在 y 轴的非正半轴上时, 角 $\theta = 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$,

故终边落在 y 轴上的角的集合是 $\{\theta | \theta = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, \text{ 或 } \theta = 2k\pi + \frac{3\pi}{2},$

$k \in \mathbb{Z}\} = \{\theta | \theta = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, \text{ 或 } \theta = 2k\pi + \pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\} = \{\theta | \theta = n\pi + \frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}\}$, 不正确;

②令 $x - \frac{\pi}{4} = k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, 可得对称中心为 $(k\pi + \frac{3\pi}{4}, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$,

令 $k=0$, 得到一个对称中心的坐标 $(\frac{3\pi}{4}, 0)$, 故正确;

③ $\because 390^\circ, 45^\circ$ 是第一象限角, $390^\circ > 45^\circ$, 但 $\tan 390^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} < 1 = \tan 45^\circ$,

$\therefore$ 函数 $y = \tan x$ 在第一象限是增函数错误, 命题为假命题;

④由于函数 $y = \sin(2x - \frac{\pi}{3}) = \sin[2(x - \frac{\pi}{6})]$, 故只需把函数 $y = \sin 2x$ 的图象向右平

移 $\frac{\pi}{6}$ 个长度单位即可得到函数 $y = \sin(2x - \frac{\pi}{3})$ 的图象, 故正确;

故答案为: ②④.

①当角 θ 的终边落在 y 轴的非负半轴上时写出角 θ 的集合, 当角 θ 的终边落在 y 轴的非正半轴上时, 写出角 θ 的集合, 终边落在 y 轴上的角的集合是这 2 个集合的并集, 故不正确;

②令 $x - \frac{\pi}{4} = k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, 可得对称中心为 $(k\pi + \frac{3\pi}{4}, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$,

令 $k=0$, 得到一个对称中心的坐标 $(\frac{3\pi}{4}, 0)$, 即可判断;

③通过举反例说明命题错误;

④由于函数 $y = \sin(2x - \frac{\pi}{3}) = \sin[2(x - \frac{\pi}{6})]$, 再结合函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图象变换规律得出结论.

本题考查终边相同的角的概念和表示法, 体现了分类讨论的数学思想. 考查了正弦函数的对称中心, 体现了转化的数学思想, 判断所求的对称中心就是函数 $y = \cos 2x$ 与 x 轴交点, 是解题的关键, 属于中档题.

16. 【答案】3

【解析】

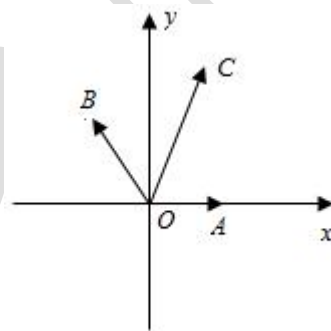
【分析】

如图所示, 建立直角坐标系. $A(1, 0)$. 由 $\vec{OA}$ 与

$\vec{OC}$ 的夹角为 α , 且 $\tan \alpha = 7$. 可得 $\cos \alpha = \frac{1}{5\sqrt{2}}$,

$\sin \alpha = \frac{7}{5\sqrt{2}}$. $C(\frac{1}{5}, \frac{7}{5})$. 可得

$\cos(\alpha + 45^\circ) = -\frac{3}{5}$, $\sin(\alpha + 45^\circ) = \frac{4}{5}$. $B(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$. 利



用 $\vec{OC} = m\vec{OA} + n\vec{OB}$ ($m, n \in \mathbb{R}$), 即可得出. 本题考查了向量坐标运算性质、和差公式, 考查了推理能力与计算能力, 属于中档题.

【解答】

解: 如图所示, 建立直角坐标系. $A(1, 0)$.

由 $\vec{OA}$ 与 $\vec{OC}$ 的夹角为 α , 且 $\tan \alpha = 7$.

$$\therefore \cos \alpha = \frac{1}{5\sqrt{2}}, \sin \alpha = \frac{7}{5\sqrt{2}}.$$

$$\therefore C(\frac{1}{5}, \frac{7}{5}).$$

$$\cos(\alpha + 45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos \alpha - \sin \alpha) = -\frac{3}{5}.$$

$$\sin(\alpha + 45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin \alpha + \cos \alpha) = \frac{4}{5}.$$

$$\therefore B(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}).$$

$$\because \vec{OC} = m \vec{OA} + n \vec{OB} \quad (m, n \in \mathbb{R}),$$

$$\therefore \frac{1}{5} = m - \frac{3}{5}n, \quad \frac{7}{5} = 0 + \frac{4}{5}n,$$

$$\text{解得 } n = \frac{7}{4}, \quad m = \frac{5}{4}.$$

则 $m+n=3$.

故答案为 3.

17. 【答案】解：(1) $\because A = \{x | -3 \leq x < 5\}$, $B = \{x | -2 < x < 7\}$,

$$\therefore A \cap B = \{x | -2 < x < 5\}, \quad \cdots 2 \text{ 分}$$

$$A \cup B = \{x | -3 \leq x < 7\}; \quad \cdots 4 \text{ 分}$$

$$(2) \because A = \{x | -3 \leq x < 5\},$$

$$B = \{x | -2 < x < 7\},$$

$$\therefore \complement_{\mathbb{R}} A = \{x | x < -3 \text{ 或 } x \geq 5\}, \quad \cdots 6 \text{ 分};$$

$$\therefore (\complement_{\mathbb{R}} A) \cap B = \{x | 5 \leq x < 7\}. \quad \cdots 8 \text{ 分}$$

【解析】

(1) 根据交集和并集的定义计算即可;

(2) 根据补集和交集的定义计算即可.

本题考查了集合的定义与运算问题, 是基础题.

18. 【答案】解：(I) $\because \vec{a} \parallel \vec{b}$, $\vec{a} = (\sin x, \frac{3}{2})$, $\vec{b} = (\cos x, -1)$,

$$\therefore \sin x \cdot (-1) - \frac{3}{2} \cdot \cos x = 0,$$

$$\text{即 } \sin x + \frac{3}{2} \cos x = 0,$$

$$\text{得 } \sin x = -\frac{3}{2} \cos x,$$

$$\text{由此可得 } \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{3}{2},$$

$$\therefore \tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = \frac{12}{5};$$

$$(II) \because \vec{a} = (\sin x, \frac{3}{2}), \quad \vec{b} = (\cos x, -1),$$

$$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = \sin x \cos x - \frac{3}{2}, \quad \vec{b}^2 = \cos^2 x + (-1)^2 = \cos^2 x + 1,$$

$$f(x) = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 = \sin x \cos x - \frac{3}{2} + \cos^2 x + 1 = \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{2} (1 + \cos 2x) - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin (2x + \frac{\pi}{4}),$$

$$\because x \in [-\frac{\pi}{2}, 0], \text{ 可得 } 2x + \frac{\pi}{4} \in [-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}],$$

$$\therefore \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \in \left[-1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right],$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right].$$

即函数 $f(x) = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{b}$ 在 $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ 上的值域为 $[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}]$.

【解析】

(I) 根据向量平行的条件, 建立关于 x 的等式解出 $\sin x = -\frac{3}{2} \cos x$, 从而算出

$\tan x = -\frac{3}{2}$, 再利用二倍角的正切公式, 即可算出 $\tan 2x$ 的值;

(II) 根据向量数量积的坐标公式与三角恒等变换公式, 化简得 $f(x) = (\vec{a} + \vec{b})$

$\cdot \vec{b} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$, 再根据 $x \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$ 利用正弦函数的图象与性质加以计算,

可得所求函数值域.

本题着重考查了向量平行的条件、同角三角函数的基本关系与二倍角的三角函数公式、两角和与差的三角函数公式和三角函数的图象与性质等知识, 属于中档题.

19. 【答案】解: (I) 因为 $f(x)$ 的最小正周期为 2π , 得 $\omega = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$

$$\text{又} \begin{cases} B + A = 4 \\ B - A = -2 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} A = 3 \\ B = 1 \end{cases},$$

$$\text{由题意, } \frac{5\pi}{6} + \varphi = 2k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z}),$$

$$\text{即} \varphi = 2k\pi - \frac{\pi}{3} (k \in \mathbb{Z}), \text{ 因为 } |\varphi| < \frac{\pi}{2},$$

$$\text{所以} \varphi = -\frac{\pi}{3},$$

$$\text{所以函数} f(x) \text{ 的解析式为: } f(x) = 3\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 1.$$

$$(II) \text{ 当 } 2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq x - \frac{\pi}{3} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z}),$$

$$\text{即 } x \in \left[2k\pi - \frac{\pi}{6}, 2k\pi + \frac{5\pi}{6}\right] (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{函数} f(x) \text{ 单调递增区间为 } \left[2k\pi - \frac{\pi}{6}, 2k\pi + \frac{5\pi}{6}\right] (k \in \mathbb{Z}).$$

$$(III) \text{ 方程 } f(x) = m + 1 \text{ 可化为 } m = 3\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\text{因为 } x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right], \text{ 所以 } x - \frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right],$$

由正弦函数图象可知，实数 m 的取值范围是 $[-\frac{3}{2}, 3]$.

【解析】

(I) 由最小正周期可求 ω ，又 $\begin{cases} B+A=4, \\ B-A=-2 \end{cases}$ ，解得 $\begin{cases} A=3, \\ B=1 \end{cases}$ ，由题意，

$\frac{5\pi}{6} + \varphi = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \ (k \in \mathbb{Z})$ ， $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$ ，可解得 φ ，即可求得函数 $f(x)$ 的解析式；

(II) 由 $2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq x - \frac{\pi}{3} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2} \ (k \in \mathbb{Z})$ 可求得函数 $f(x)$ 的单调递增区间；

(III) 方程 $f(x) = m+1$ 可化为 $m = 3\sin(x - \frac{\pi}{3})$ ，由 $x \in [\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}]$ ，由正弦函数图象可解得实数 m 的取值范围.

本题主要考查了由 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的部分图象确定其解析式，正弦函数的图象和性质，属于中档题.

20. 【答案】解：（1）由题意知，当 $30 < x < 100$ 时，

$$f(x) = 2x + \frac{1800}{x} - 90 > 40,$$

$$\text{即 } x^2 - 65x + 900 > 0,$$

$$\text{解得 } x < 20 \text{ 或 } x > 45,$$

$\therefore x \in (45, 100)$ 时，公交群体的人均通勤时间少于自驾群体的人均通勤时间；

（2）当 $0 < x \leq 30$ 时，

$$g(x) = 30 \cdot x\% + 40(1 - x\%) = 40 - \frac{x}{10};$$

当 $30 < x < 100$ 时，

$$g(x) = (2x + \frac{1800}{x} - 90) \cdot x\% + 40(1 - x\%) = \frac{x^2}{50} - \frac{13}{10}x + 58;$$

$$\therefore g(x) = \begin{cases} 40 - \frac{x}{10} \\ \frac{x^2}{50} - \frac{13}{10}x + 58 \end{cases};$$

当 $0 < x < 32.5$ 时， $g(x)$ 单调递减；

当 $32.5 < x < 100$ 时， $g(x)$ 单调递增；

说明该地上班族 S 中有小于 32.5% 的人自驾时，人均通勤时间是递减的；

有大于 32.5% 的人自驾时，人均通勤时间是递增的；

当自驾人数为 32.5% 时，人均通勤时间最少.

【解析】

(1) 由题意知求出 $f(x) > 40$ 时 x 的取值范围即可；

(2) 分段求出 $g(x)$ 的解析式，判断 $g(x)$ 的单调性，再说明其实际意义.

本题考查了分段函数的应用问题,也考查了分类讨论与分析问题、解决问题的能力.

21.【答案】解: (1) 设任意 x_1, x_2 , 满足 $-2 \leq x_1 < x_2 \leq 2$, 由题意可得

$$f(x_1) - f(x_2) = f(x_1) + f(-x_2) = \frac{f(x_1) + f(-x_2)}{x_1 + (-x_2)} (x_1 - x_2) < 0,$$

即 $f(x_1) < f(x_2)$,

$\therefore f(x)$ 在定义域 $[-2, 2]$ 上是增函数.

(2) 由 (1) 知, $f(2a-1) < f(a^2-2a+2)$ 可化为

$$-2 \leq 2a-1 < a^2-2a+2 \leq 2,$$

解得 $0 \leq a < 1$,

$\therefore a$ 的取值范围为 $[0, 1)$.

(3) 由 (1) 知, 不等式 $f(x) \leq (5-2a)t+1$ 对任意 $x \in [-2, 2]$ 和 $a \in [-1, 2]$ 都恒成立,

$f_{\max}(x) \leq (5-2a)t+1$ 对任意的 $a \in [-1, 2]$ 都恒成立,

$\therefore 3 \leq (5-2a)t+1$ 恒成立,

即 $2ta-5t+2 \leq 0$ 对任意的 $a \in [-1, 2]$ 都恒成立,

令 $g(a) = 2ta-5t+2, a \in [-1, 2]$,

则只需 $\begin{cases} g(-1) = -5t+2 \leq 0 \\ g(2) = -t+2 \leq 0 \end{cases}$,

解得 $t \geq 2$,

$\therefore t$ 的取值范围是 $[2, +\infty)$.

【解析】

(1) 设任意 x_1, x_2 , 满足 $-2 \leq x_1 < x_2 \leq 2$, 利用函数单调性的定义证明;

(2) 由 (1) 知, $f(2a-1) < f(a^2-2a+2)$ 可化为 $-2 \leq 2a-1 < a^2-2a+2 \leq 2$, 从而解得.

(3) 不等式 $f(x) \leq (5-2a)t+1$ 对任意 $x \in [-2, 2]$ 和 $a \in [-1, 2]$ 都恒成立, $f_{\max}(x) \leq (5-2a)t+1$ 对任意的 $a \in [-1, 2]$ 都恒成立, 令 $g(a) = 2ta-5t+2, a \in [-1, 2]$, 从而求 t .

本题考查了函数的单调性的判断与证明,同时考查了单调性的应用及恒成立问题,属于难题.

22.【答案】解: (1) 当 $m=n=1$ 时, $f(x) = x^2 \cdot x + \frac{1}{4}$,

$$\therefore f(\log_2 x) = (\log_2 x)^2 \cdot \log_2 x + \frac{1}{4},$$

令 $\log_2 x = t$,

$\therefore x \in [1, 4], \therefore t \in [0, 2]$,

$$\therefore f(t) = t^2 \cdot t + \frac{1}{4},$$

$\therefore$ 此二次函数的对称轴为 $t = \frac{1}{2} \in [0, 2]$,

$$\therefore f(\log_2 x) \in [0, \frac{9}{4}].$$

$$(2) n=1 \text{ 时, } f(x) = mx^2 \cdot x \cdot \frac{3}{4} + m,$$

$$\text{当 } m=0 \text{ 时, } f(x) = x \cdot \frac{3}{4} = 0,$$

$$\therefore x = -\frac{3}{4} \in [-1, 1],$$

则 $m=0$ 符合题意;

当 $m \neq 0$ 时,

$$(i) \Delta = -4m^2 + 3m + 1 = 0 \text{ 且 } \frac{1}{2m} \in [-1, 1], \text{ 解得 } m=1 \text{ 或 } m=-\frac{1}{4} \text{ (舍)};$$

$$(ii) f(-1)f(1) = (2m + \frac{1}{4})(2m - \frac{7}{4}) < 0, \text{ 解得 } -\frac{1}{8} < m < \frac{7}{8},$$

$$(iii) \text{ 当 } f(-1) = 0 \text{ 时, } m = -\frac{1}{8}, \text{ 此时 } f(x) = -\frac{1}{8}x^2 \cdot x \cdot \frac{7}{8},$$

解得 $x=1$ 或 $-\frac{1}{7}$, 在 $[-1, 1]$ 有两个零点, 不合题意;

$$(iv) \text{ 当 } f(1) = 0 \text{ 时, } m = \frac{7}{8}, \text{ 此时 } f(x) = \frac{7}{8}x^2 \cdot x + \frac{1}{8},$$

解得 $x=1$ 或 $\frac{1}{7}$, 在 $[-1, 1]$ 有两个零点, 不合题意.

综上所述 m 的取值范围为 $-\frac{1}{8} < m < \frac{7}{8}$ 或 $m=1$

$$(3) m=1 \text{ 时, } f(x) = x^2 \cdot nx + \frac{1}{4},$$

当 $\frac{n}{2} \leq n-1$, 即 $n \geq 2$ 时, 此时对任意的 $x_1, x_2 \in [n-1, n+1]$,

都有 $|f(x_1) - f(x_2)| \leq f(x)_{\max} - f(x)_{\min} = f(n+1) - f(n-1) \leq 6$, 解得 $2 \leq n \leq 3$;

当 $n-1 < \frac{n}{2} < n+1$, 即 $2 < n < 2$ 时,

$$\text{此时需要满足 } \begin{cases} f(n+1) - f(\frac{n}{2}) \leq 6 \\ f(n-1) - f(\frac{n}{2}) \leq 6 \end{cases}, \text{ 解得 } 2 < n < 2;$$

当 $\frac{n}{2} \geq n+1$ 时, 即 $n \leq 2$, 此时对任意的 $x_1, x_2 \in [n-1, n+1]$,

都有 $|f(x_1) - f(x_2)| \leq f_{\max}(x) - f_{\min}(x) = f(n-1) - f(n+1) \leq 6$,

解得 $3 \leq n \leq 2$.

综上所述 n 的取值范围为 $3 \leq n \leq 3$.

【解析】

本题考查二次函数的最值、零点、恒成立问题, 具有较大难度.

- (1) 求复合函数的值域, 通过换元转化成二次函数求解;
- (2) 考查根据函数的零点, 求实数 m 的取值范围, 注意分类讨论;
- (3) 考查不等式恒成立的问题, 注意分类讨论. 属难题.