江苏省仪征中学 2020 届高三年级数学寒假作业（1）答案

1.【答案】4

【解析】因为 $a_1a_3a_5a_7a_9=32$，$a_n>0$，所以 $a_5=2$，所以 $a_2+a_8\geqslant 2\sqrt{a_2a_8}=4$.

2.【答案】4

【解析】$y=2x^2+\ln x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$y'=4x+\dfrac{1}{x}\geqslant 2\sqrt{4x\cdot\dfrac{1}{x}}=4$，当且仅当 $x=\dfrac{1}{2}$ 时取等号，即直线 l 的斜率的最小值是 4.

3.【答案】$3+2\sqrt{2}$

【解析】由题意可知，令 $x+3=1$，则 $x=-2$，$y=-1$，所以 $A(-2,-1)$，可得 $2m+n=1$，所以 $\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=\left(\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}\right)(2m+n)=3+\dfrac{n}{m}+\dfrac{2m}{n}\geqslant 3+2\sqrt{2}$，当且仅当 $\begin{cases}\dfrac{n}{m}=\dfrac{2m}{n},2m+n=1,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}m=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2},n=\sqrt{2}-1\end{cases}$ 时等号成立，所以 $\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}$ 的最小值为 $3+2\sqrt{2}$.

4.【答案】9

【解析】因为 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，所以 $4x+(1-x)y=0$. 又 $x>0$，$y>0$，所以 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{y}=1$，故 $x+y=\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{y}\right)(x+y)=5+\dfrac{y}{x}+\dfrac{4x}{y}\geqslant 9$，当且仅当 $\dfrac{y}{x}=\dfrac{4x}{y}$，$\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{y}=1$ 时等号成立，即 $x=3$，$y=6$ 时，等号成立. 故 $(x+y)_{\min}=9$.

5.【答案】3

【解析】因为 $x>0$，$y>0$，$x+y=\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{y}$，所以 $(x+y)^2=(x+y)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{y}\right)=5+\dfrac{y}{x}+\dfrac{4x}{y}\geqslant 9$，当且仅当 $y=2x$，又 $x+y=\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{y}$，即 $x=1$ 时取等号，故 $(x+y)_{\min}=3$.

6.【答案】$\dfrac{25}{8}$

【解析】由题知 $\dfrac{|2a+b|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$，且 $a>0$，$b>0$，从而 $2a+b=5$，所以 $5=2a+b\geqslant 2\sqrt{2ab}$，所以 $ab\leqslant\dfrac{25}{8}$，当且仅当 $2a=b$，即 $a=\dfrac{5}{4}$，$b=\dfrac{5}{2}$ 时取等号，从而 ab 的最大值为 $\dfrac{25}{8}$.

7.【答案】4

【解析】因为正数 x，y 满足 $x+\dfrac{y}{x}=1$，所以 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{x}{y}=\left(x+\dfrac{y}{x}\right)\times\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{x}{y}\right)=2+\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y}{x^2}\geqslant 2+2\sqrt{\dfrac{x^2}{y}\times\dfrac{y}{x^2}}=4$，当且仅当 $\begin{cases}x^4=y^2,\\ x+\dfrac{y}{x}=1,\end{cases}$ 即 $x=\dfrac{1}{2}$，$y=\dfrac{1}{4}$ 时取等号，故 $\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{x}{y}\right)_{\min}=4$.

8.【答案】18

【解析】因为 $2x+y+6=xy$，所以 $xy-6=2x+y\geqslant 2\sqrt{2xy}$，令 $t=\sqrt{2xy}$，则 $\dfrac{1}{2}t^2-6\geqslant 2t$，即 $t^2-4t-12\geqslant 0$，所以 $t\geqslant 6$，所以 $xy\geqslant 18$，当且仅当 $2x=y=6$ 时“=”成立，所以 xy 的最小值为 18.

9.【答案】$2-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

【解析】设 $m=2a+b>0$，$n=2b+a>0$，则 $a=\dfrac{2m-n}{3}$，$b=\dfrac{2n-m}{3}$，所以原式 $=\dfrac{\frac{2m-n}{3}}{m}+\dfrac{\frac{4n-2m}{3}}{n}=2-\dfrac{n}{3m}-\dfrac{2m}{3n}\leqslant 2-2\sqrt{\dfrac{n}{3m}\cdot\dfrac{2m}{3n}}=2-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，当且仅当 $\dfrac{n}{3m}=\dfrac{2m}{3n}$，即 $n=\sqrt{2}m$，即 $b=\dfrac{3\sqrt{2}+2}{2}a$ 时等号成立.

10.【答案】$\dfrac{3}{2}+\sqrt{2}$

【解析】由 $f(x)=|\log_3 x|$，且 $f(a-1)=f(2b-1)$，$a\neq 2b$，所以 $\log_3(a-1)=-\log_3(2b-1)$，即 $\log_3(a-1)(2b-1)=0$，所以 $(a-1)(2b-1)=1$，得 $\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b}=2$，所以 $a+b=\dfrac{1}{2}(a+b)\left(\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b}\right)=\dfrac{1}{2}\left(3+\dfrac{2b}{a}+\dfrac{a}{b}\right)\geqslant\dfrac{3}{2}+\sqrt{2}$，当且仅当 $\dfrac{2b}{a}=\dfrac{a}{b}$，即 $a=\sqrt{2}b$ 时等号成立，综上，$a+b$ 的最小值为 $\dfrac{3}{2}+\sqrt{2}$.

11.【答案】$\dfrac{5}{2}$

【解析】由题知 $\Delta=(2\sqrt{a})^2-4(-b+1)=0$，即 $a+b=1$. 因为 $a>0$，$b>0$，所以 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{2a}{b+1}=\dfrac{a+b}{a}+\dfrac{2a}{a+2b}=\dfrac{2a+2b}{2a}+\dfrac{2a}{a+2b}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{a+2b}{2a}+\dfrac{2a}{a+2b}\geqslant\dfrac{1}{2}+2\sqrt{\dfrac{a+2b}{2a}\cdot\dfrac{2a}{a+2b}}=\dfrac{5}{2}$，当且仅当 $\dfrac{a+2b}{2a}=\dfrac{2a}{a+2b}$，即 $a=\dfrac{2}{3}$，$b=\dfrac{1}{3}$ 时取等号.

12.【答案】3

【解析】因为 $m+n=3$，所以 $\dfrac{m^2+1}{m}+\dfrac{n^2}{n+1}=m+\dfrac{1}{m}+n-1+\dfrac{1}{n+1}=2+\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n+1}=2+\left(\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n+1}\right)\dfrac{m+(n+1)}{4}=2+\dfrac{1}{4}\left(2+\dfrac{m}{n+1}+\dfrac{n+1}{m}\right)\geqslant 2+\dfrac{1}{4}\left(2+2\sqrt{\dfrac{m}{n+1}\cdot\dfrac{n+1}{m}}\right)=3$，当且仅当 $\dfrac{m}{n+1}=\dfrac{n+1}{m}$，即 $m=2$，$n=1$ 时取等号.

13.【解答】(1) 因为 $f(x)=2^x+2^{-x}$，

方程 $f(x)=2$，即 $2^x+2^{-x}=2$，即 $(2^x)^2-2\times 2^x+1=0$，

所以 $(2^x-1)^2=0$，所以 $2^x=1$，解得 $x=0$.

(2) 由条件知 $f(2x)=2^{2x}+2^{-2x}=(2^x+2^{-x})^2-2=[f(x)]^2-2$.

因为 $f(2x)\geqslant mf(x)-6$ 对于 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，且 $f(x)>0$，

所以 $m\leqslant\dfrac{[f(x)]^2+4}{f(x)}$ 对于 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立.

而 $\dfrac{[f(x)]^2+4}{f(x)}=f(x)+\dfrac{4}{f(x)}\geqslant 2\sqrt{f(x)\cdot\dfrac{4}{f(x)}}=4$，且 $\dfrac{[f(0)]^2+4}{f(0)}=4$，

所以 $m\leqslant 4$，故实数 m 的最大值为 4.

14. (1) 因为 $x>-1$，所以 $x+1>0$，

所以 $y=\dfrac{x^2+7x+10}{x+1}=\dfrac{(x+1)^2+5(x+1)+4}{x+1}$

$=(x+1)+\dfrac{4}{x+1}+5\geqslant 2\sqrt{(x+1)\cdot\dfrac{4}{x+1}}+5=9$.

当且仅当 $x+1=\dfrac{4}{x+1}$，即 $x=1$ 时“=”成立.

所以当 $x=1$ 时，函数 $y=\dfrac{x^2+7x+10}{x+1}(x>-1)$ 的最小值为 9.

(2) 因为 $x>0$，$y>0$，且 $3x+4y=12$，

所以 $xy=\dfrac{1}{12}(3x)\cdot(4y)\leqslant\dfrac{1}{12}\left(\dfrac{3x+4y}{2}\right)^2=3$，

所以 $\lg x+\lg y=\lg xy\leqslant\lg 3$.

当且仅当 $3x=4y=6$，即 $x=2$，$y=\dfrac{3}{2}$ 时“=”成立，

所以当 $x=2$，$y=\dfrac{3}{2}$ 时，$\lg x+\lg y$ 取最大值 $\lg 3$.

1. 解：由题意得$|\boldsymbol{A}|=2\times3-(-1)\times(-4)=2\neq0$，

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{3}{|\boldsymbol{A}|} & -\frac{-1}{|\boldsymbol{A}|}\\ -\frac{-4}{|\boldsymbol{A}|} & \frac{2}{|\boldsymbol{A}|}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{2} & \frac{1}{2}\\ 2 & 1\end{bmatrix}.$$

∵ $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$，

$$\therefore\ \boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\frac{3}{2} & \frac{1}{2}\\ 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & -1\\ -3 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{9}{2} & -1\\ 5 & -1\end{bmatrix}.$$

2. 解：由直线方程 l 为 $x+y-1=0$ 可设直线的参数方程为$\begin{cases}x=1+t\cos\frac{3\pi}{4},\\ y=t\sin\frac{3\pi}{4}\end{cases}$（$t$ 为参数），

即$\begin{cases}x=1-\frac{\sqrt{2}}{2}t,\\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}t.\end{cases}$

椭圆的普通方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

设 $A\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}t_1,\frac{\sqrt{2}}{2}t_1\right)$，$B\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}t_2,\frac{\sqrt{2}}{2}t_2\right)$，则把直线$\begin{cases}x=1-\frac{\sqrt{2}}{2}t,\\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$代入椭圆$\frac{x^2}{4}+y^2=1$，

得 $5t^2-2\sqrt{2}t-6=0$，∴ $t_1t_2=-\frac{6}{5}$.

∵ $P(1,0)$，

∴ 点 P 到 A，B 两点的距离之积为 $PA\cdot PB=|t_1t_2|=\frac{6}{5}$.

3. 解：(1)如图，以点 A 为坐标原点，建立空间直角坐标系 A-xyz，则 $A(0,0,0)$，$P(0,0,2)$，$B(1,0,0)$，$C(1,2,0)$，$D(0,2,0)$，$PD=(0,2,-2)$.

设$\overrightarrow{PM}=\lambda\overrightarrow{PD}=(0,2\lambda,-2\lambda)$，则 $M(0,2\lambda,2-2\lambda)$，

∴ $\overrightarrow{BM}=(-1,2\lambda,2-2\lambda)$.

又 $BM\perp PD$，

∴ $\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{PD}=8\lambda-4=0$，解得 $\lambda=\frac{1}{2}$，

∴ $M(0,1,1)$.

由题意，得$\overrightarrow{AC}=(1,2,0)$，$\overrightarrow{AM}=(0,1,1)$，$CD=(-1,0,0)$.

设平面 ACM 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

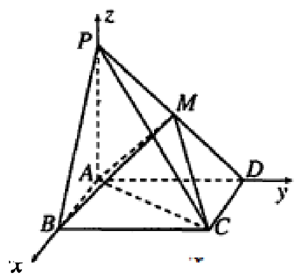
由 $\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{AC}$，$\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{AM}$，可得$\begin{cases}x+2y=0,\\ y+z=0.\end{cases}$

令 $z=1$，得 $x=2$，$y=-1$，∴ $\boldsymbol{n}=(2,-1,1)$.

设直线 CD 与平面 ACM 所成角为 α，则

$\sin\alpha=\frac{|\overrightarrow{CD}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{CD}||\boldsymbol{n}|}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，∴ $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

∴ 直线 CD 与平面 ACM 所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{3}}{3}$.



(2)由(1)知平面 ACM 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(2,-1,1)$，且平面 ACB 的一个法向量 $\boldsymbol{k}=(0,0,1)$.

设平面 ACM 与平面 ACB 的夹角为 θ，则 $\cos\theta=\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{k}\rangle=\frac{2\times0+(-1)\times0+1\times1}{1\times\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$.

又点 M 在平面 ACB 的射影在平面 ACD 上，

∴ 二面角 $M-AC-B$ 的余弦值为$-\frac{\sqrt{6}}{6}$.

4. 解：(1)分类讨论，只取数字 1 或 10 或 100 时，共 3 种；

取 1 和 10，可分为 1 个 10，2 个 10，…，9 个 10，共 9 种，

∴ 相应的选法种数为 3+9=12(种).

(2)由(1)知当 $n=1$ 时，$a_1=12$；当 $n\geqslant2$ 时，若至少选 1 张写有 100 的卡片时，则除去 1 张写有 100 的卡片，其余数字之和为 $100(n-1)$，有 a_{n-1} 种选法；若不选含有 100 的卡片，则有 $(10n+1)$ 种选法，

∴ 当 $n\geqslant2$ 时，$a_n=10n+1+a_{n-1}$，

∴ $a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_2-a_1)+a_1$

$=10n+1+10(n-1)+1+\cdots+10\times2+1+a_1$

$=10\times\frac{(n+2)(n-1)}{2}+n-1+a_1$

$=5n^2+6n+1$.

∵ 当 $n=1$ 时，$a_1=12$ 满足上式，

∴ 数列$\{a_n\}$的通项公式是 $a_n=5n^2+6n+1$.

江苏省仪征中学 2020 届高三年级数学寒假作业（2）答案

1.【答案】$[e^2,+\infty)$

【解析】因为函数 $f(x)=\sqrt{\ln x-2}$，所以 $x>0$ 且 $\ln x-2>0$，所以 $x\geqslant e^2$，所以函数 $f(x)=\sqrt{\ln x-2}$的定义域为$[e^2,+\infty)$.

2.【答案】2

【解析】若函数 $f(x)=1+\dfrac{m}{a^x-1}$是奇函数，则 $f(-x)=1+\dfrac{m}{a^{-x}-1}=1-\dfrac{ma^x}{a^x-1}=-1-\dfrac{m}{a^x-1}$，即 $2=m\cdot\dfrac{a^x-1}{a^x-1}$，解得 $m=2$.

3.【答案】-1

【解析】因为 $f(x)$为定义在 **R** 上的奇函数，所以 $f(0)=0$，$f(-1)=-f(1)=-(2-1)=-1$，因此 $f(0)+f(-1)=-1$.

4.【答案】$\dfrac{1}{2}$

【解析】由题意可得 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=f\left(\dfrac{7}{2}\right)=\left|\log_4\left(\dfrac{7}{2}-\dfrac{3}{2}\right)\right|=\dfrac{1}{2}$.

5.【答案】$[0,1]$

【解析】根据题意，$f(x)$为 **R** 上的奇函数，且 $f(1)=2$，则 $f(-1)=-2$，且 $f(0)=0$. 又由 $f(x)$是 **R** 上的增函数，若$-2\leqslant f(x-1)\leqslant 0$，则有 $f(-1)\leqslant f(x-1)\leqslant f(0)$，即$-1\leqslant x-1\leqslant 0$，解得 $0\leqslant x\leqslant 1$，故原不等式的解集为$[0,1]$.

6.【答案】$-\sqrt{2}$

【解析】因为 $f(x+1)=-f(x)$，所以 $f(x+2)=-f(x+1)=f(x)$，所以函数 $f(x)$的周期 $T=2$，$f\left(-\dfrac{5}{2}\right)=f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-2^{\frac{1}{2}}=-\sqrt{2}$，又 $f(4)=f(0)=0$，所以$f\left(-\dfrac{5}{2}\right)+f(4)=-\sqrt{2}$.

7.【答案】-4

【解析】由 $f(x)$为定义在 **R** 上的奇函数可知 $f(0)=0$，已知 $g(0)=0$，所以 $f(0)-g(0)=2^0+b=0$，得 $b=-1$，所以 $f(1)-g(1)=4$，于是 $f(-1)+g(-1)=-f(1)+g(1)=-[f(1)-g(1)]=-4$.

8.【答案】$(-\infty,1)\cup\left(\dfrac{3}{2},+\infty\right)$

【解析】因为 $f(x)$是奇函数且满足 $f(x+2)=-f(x)$，所以 $f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$，所以函数 $f(x)$的周期为 4，$f(-7)=f(-7+8)=f(1)=-f(-1)$. 又 $f(-1)>-2$，所以 $f(-7)=\dfrac{a+1}{3-2a}<2$，解得 $a\in(-\infty,1)\cup\left(\dfrac{3}{2},+\infty\right)$.

9.【答案】$(0,1)\cup(3,+\infty)$

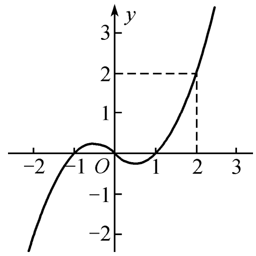
【解析】由函数 $f(x)$的解析式易得，该函数为奇函数且在定义域 **R** 上是单调增函数. 故 $f(1)+f(\log_{\frac{1}{a}}3)>0$，即 $f(\log_{\frac{1}{a}}3)>-f(1)=f(-1)$，即 $\log_{\frac{1}{a}}3>-1=\log_{\frac{1}{a}}a$. 所以$\begin{cases}\dfrac{1}{a}>1,\\3>a\end{cases}$或$\begin{cases}0<\dfrac{1}{a}<1,\\3<a,\end{cases}$解得 $0<a<1$ 或 $a>3$.

10.【答案】2

【解析】由 $f(x)$是定义域为$(-\infty,+\infty)$的奇函数，得 $f(-x)=-f(x)$，又 $f(1-x)=f(1+x)$，则 $f(x+2)=f(-x)=-f(x)$，进而得到 $f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$，所以 $f(x)$是周期为 4 的函数. 若 $f(1)=2$，可得 $f(3)=f(-1)=-f(1)=-2$，$f(2)=f(0)=0$，$f(4)=f(0)=0$，则 $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=2+0-2+0=0$，可得 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(2\,018)=504\times 0+2+0=2$.

11.【答案】$(-\infty,2)$

【解析】因为 $f(x)$为奇函数，所以 $f(-x)=-f(x)$，所以 $f(a)<4+f(-a)$可转化为 $f(a)<2$，由题意可作出 $f(x)$的图象如图所示，由图易知 $a<2$.



（第 11 题）

12.【答案】-1

【解析】方法一：因为函数 $f(x)$为奇函数，所以 $f(-1)=-f(1)$，$f(-2)=-f(2)$，即$\begin{cases}1(1-b)=a(-1+2),\\2(2-b)=2a(-2+2),\end{cases}$解得$\begin{cases}a=-1,\\b=2.\end{cases}$经验证 $a=-1$，$b=2$ 满足题设条件，所以 $f(a+b)=f(1)=-1$.

方法二：因为函数 $f(x)$为奇函数，所以 $f(x)$的图象关于原点对称，当 $x>0$，二次函数图象的顶点为$\left(\dfrac{b}{2},-\dfrac{b^2}{4}\right)$；当 $x<0$，二次函数图象的顶点为$(-1,-a)$，所以$-\dfrac{b}{2}=-1$，$-\dfrac{b^2}{4}=a$，解得 $a=-1$，$b=2$. 经验证 $a=-1$，$b=2$ 满足题设条件，所以 $f(a+b)=f(1)=-1$.

13.【解答】(1) 函数 $f(x)$为奇函数. 证明如下：

函数 $f(x)$的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，

因为 $f(-x)=-x+\dfrac{2a}{-x}=-f(x)$，所以函数 $f(x)$为奇函数.

(2) 由题意知对任意的 $x\in(1,2)$，$x+\dfrac{2a}{x}>3$ 恒成立，

从而对任意的 $x\in(1,2)$，$\dfrac{2a}{x}>3-x$ 恒成立，即对任意的 $x\in(1,2)$，$a>\dfrac{3x-x^2}{2}$恒成立.

设 $g(x)=\dfrac{3x-x^2}{2}$，则当 $x=\dfrac{3}{2}$时 $g(x)$有最大值$\dfrac{9}{8}$，所以 $a>\dfrac{9}{8}$.

故 a 的取值范围为$\left(\dfrac{9}{8},+\infty\right)$.

14.【解答】由 $f(-x)=-f(x)$，得$-bx+c=-(bx+c)$，得 $c=0$.

又 $f(1)=2$，得 $a+1=2b$.

由 $f(2)<3$，得$\dfrac{4a+1}{a+1}<3$，解得$-1<a<2$. 又 $a\in\mathbf{Z}$，所以 $a=0$ 或 1.

若 $a=0$，则 $b=\dfrac{1}{2}\notin\mathbf{Z}$，应舍去；若 $a=1$，则 $b=1\in\mathbf{Z}$.

所以 $a=1$，$b=1$，$c=0$.

(2) 由(1)知 $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$，设存在一点(x_0,y_0)在 $y=f(x)$的图象上，且关于$(1,0)$的对称点$(2-x_0,-y_0)$也在 $y=f(x)$的图象上，则
$\begin{cases}\dfrac{x_0^2+1}{x_0}=y_0,\\\dfrac{(2-x_0)^2+1}{2-x_0}=-y_0,\end{cases}$消去 y_0得 $x_0^2-2x_0-1=0$，解得 $x_0=1\pm\sqrt{2}$，

所以 $y=f(x)$图象上存在两点$(1+\sqrt{2},2\sqrt{2})$，$(1-\sqrt{2},-2\sqrt{2})$关于点$(1,0)$对称.

1. 解：(1)由$\begin{bmatrix}1 & -1\\ a & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ -3\end{bmatrix}$，得$a+1=-3$，解得$a=-4$.

(2)由(1)知$A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -4 & 1\end{bmatrix}$，矩阵$A$的特征多项式为$f(x)=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 1\\ 4 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2-4=\lambda^2-2\lambda-3$.

令$f(\lambda)=0$，解得矩阵A的特征值为-1或3.

当$\lambda=-1$时，由二元一次方程$\begin{cases}(\lambda-1)x+y=0,\\ 4x+(\lambda-1)y=0\end{cases}$

解得$y=2x$，

∴ 矩阵A的属于特征值-1的一个特征向量为$\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}$.

当$\lambda=3$时，由二元一次方程组$\begin{cases}(\lambda-1)x+y=0,\\ 4x+(\lambda-1)y=0\end{cases}$

解得$y=-2x$，

∴ 矩阵A的属于特征值3的一个特征向量为$\begin{bmatrix}1\\ -2\end{bmatrix}$.

∴ 矩阵A的属于特征值-1的一个特征向量为$\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}$，矩阵$A$的属于特征值3的一个特征向量为$\begin{bmatrix}1\\ -2\end{bmatrix}$.

2. 解：直线l的直角坐标系方程为$y=x$，
曲线C化为普通方程为$(x-1)^2+(y-2)^2=4$.

∴ 圆心$(1,2)$到直线$y=x$的距离$d=\frac{|1-2|}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

∴ $AB=2\sqrt{4-\frac{1}{2}}=\sqrt{14}$.

3. 解：(1)∵ 随意抽取4件产品检查是随机事件，又第一天有9件正品，

∴ 第一天通过检查的概率为$P_1=\frac{C_9^4}{C_{10}^4}=\frac{3}{5}$.

(2)两天的所得分ξ的可取值分别为0，1，2.

第二天通过检查的概率为$P_2=\frac{C_8^4}{C_{10}^4}=\frac{1}{3}$.

∵ $P(\xi=0)=\frac{2}{5}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{15}$，$P(\xi=1)=\frac{3}{5}\times\frac{2}{3}+\frac{2}{5}\times\frac{1}{3}=\frac{8}{15}$，$P(\xi=2)=\frac{3}{5}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{5}$，

∴ $E(\xi)=0\times\frac{4}{15}+1\times\frac{8}{15}+2\times\frac{1}{5}=\frac{14}{15}$.

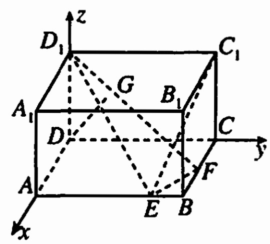
4. 解：(1)以D为原点，$\overrightarrow{DA}$，$\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{DD_1}$分别为x轴，y轴，z轴的正方向建立如图所示的空间直角坐标系，则$D(0,0,0)$，$D_1(0,0,2)$，$C_1(0,4,2)$，$E(3,3,0)$，$F(2,4,0)$，

于是$\overrightarrow{EC_1}=(-3,1,2)$，$\overrightarrow{FD_1}=(-2,-4,2)$.

设EC_1与FD_1所成角为α，则

$$\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{EC_1}\cdot\overrightarrow{FD_1}}{|\overrightarrow{EC_1}||\overrightarrow{FD_1}|}=\frac{(-3)\times(-2)+1\times(-4)+2\times2}{\sqrt{(-3)^2+1^2+2^2}\times\sqrt{(-2)^2+(-4)^2+2^2}}=\frac{\sqrt{21}}{14},$$

∴ 异面直线EC_1与FD_1所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{21}}{14}$.



(2)∵ 点G在平面$A_1B_1C_1D_1$上，

∴ 可设$G(x,y,2)$，

∴ $\overrightarrow{DG}=(x,y,2)$，$\overrightarrow{FD_1}=(-2,-4,2)$，$\overrightarrow{EF}=(-1,1,0)$.

由$\begin{cases}\overrightarrow{DG}\cdot\overrightarrow{FD_1}=0,\\ \overrightarrow{DG}\cdot\overrightarrow{EF}=0\end{cases}$得$\begin{cases}-2x-4y+4=0,\\ -x+y=0,\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=\frac{2}{3},\\ y=\frac{2}{3},\end{cases}$即$G\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},2\right)$.

故当点G在平面$A_1B_1C_1D_1$上，且到A_1D_1，C_1D_1距离均为$\frac{2}{3}$时，$DG\perp$平面D_1EF.

江苏省仪征中学 2020 届高三年级数学寒假作业（3）答案

1.【答案】 3

【解析】 由余弦定理得 $5=b^2+4-2\times b\times 2\times\frac{2}{3}$，解得 $b=3$ 或 $b=-\frac{1}{3}$（舍去）.

2.【答案】 $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$

【解析】 在$\triangle ABC$中，已知 $c=1$，$b=\sqrt{2}$，$B=45°$，由余弦定理 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，得 $a^2-\sqrt{2}a-1=0$. 因为 $a>0$，所以 $a=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$，即 $BC=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$.

3.【答案】 1

【解析】 $\frac{\sin 2A}{\sin C}=\frac{2\sin A\cos A}{\sin C}=\frac{2a\cos A}{c}=\frac{4}{3}\cos A=\frac{4}{3}\times\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=1$.

4.【答案】 $\frac{\pi}{4}$

【解析】 因为 $b=c$，$a^2=2b^2(1-\sin A)$，所以 $2b^2\sin A=2b^2-a^2=b^2+c^2-a^2=2bc\cos A=2b^2\cos A$，所以 $\tan A=1$，所以 $A=\frac{\pi}{4}$.

5.【答案】 $\frac{\pi}{6}$

【解析】 由 $\sin B+\sin A(\sin C-\cos C)=0$，得 $\sin(A+C)+\sin A(\sin C-\cos C)=0$，即 $\sin A\sin C+\cos A\sin C=0$. 因为 $\sin C>0$，所以 $\sin A+\cos A=0$，即 $\tan A=-1$，$A=\frac{3\pi}{4}$. 由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$，所以 $\sin C=\frac{c\sin A}{a}=\frac{\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}=\frac{1}{2}$. 由大边对大角知 $C<\frac{\pi}{2}$，所以 $C=\frac{\pi}{6}$.

6.【答案】 $\frac{21}{13}$

【解析】 因为在$\triangle ABC$中，$\cos A=\frac{4}{5}$，$\cos C=\frac{5}{13}$，所以 $\sin A=\frac{3}{5}$，$\sin C=\frac{12}{13}$，$\sin B=\sin[\pi-(A+C)]=\sin(A+C)=\sin A\cos C+\cos A\sin C=\frac{63}{65}$. 因为$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，所以 $b=\frac{a\sin B}{\sin A}=\frac{21}{13}$.

7.【答案】 $-\frac{1}{2}$

【解析】 由正弦定理得$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，因为$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin\frac{B}{2}}{b}$，所以 $\sin B=\sin\frac{B}{2}$，所以 $2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}=\sin\frac{B}{2}$. 因为 $\sin\frac{B}{2}\neq 0$，所以 $\cos\frac{B}{2}=\frac{1}{2}$，所以 $\cos B=2\cos^2\frac{B}{2}-1=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2-1=-\frac{1}{2}$.

8.【答案】 $\frac{\sqrt{41}}{2}$

【解析】 由余弦定理得 $\cos B=\frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2\cdot AB\cdot BC}=\frac{1}{9}$，解得 $AB=3$，又由余弦定理，得$\cos B=\frac{AB^2+BD^2-AD^2}{2\cdot AB\cdot BD}=\frac{9+\frac{9}{4}-AD^2}{2\cdot 3\cdot\frac{3}{2}}=\frac{1}{9}$，解得 $AD=\frac{\sqrt{41}}{2}$.

9.【答案】 600 m

【解析】 设 $AB=x$，则 $BC=x$，$BD=\sqrt{3}x$，在$\triangle BCD$中，由余弦定理知 $\cos 120°=\frac{BC^2+CD^2-BD^2}{2BC\cdot CD}=\frac{x^2+600^2-3x^2}{2\cdot 600\cdot x}=-\frac{1}{2}$，解得 $x=600$（$x=-300$ 舍去），故铁塔的高为 600 m.

10.【答案】 $\sqrt{7}$

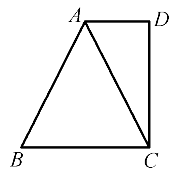
【解析】 由题得 $1+\cos(A+B)-(2\cos^2C-1)=1$，即 $2\cos^2C+\cos C-1=0$，解得 $\cos C=\frac{1}{2}$. 又 $3\sin B=2\sin A$，由正弦定理得 $3b=2a$，且 $a-b=1$，所以 $a=3$，$b=2$，所以 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=7$，即 $c=\sqrt{7}$.

11.【答案】 $\frac{5\pi}{12}$

【解析】 因为 $C=\frac{\pi}{3}$，$b=\sqrt{6}$，$c=3$，由正弦定理可得$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，即$\frac{\sqrt{6}}{\sin B}=\frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$，解得 $\sin B=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 又 $b<c$，所以 B 为锐角，所以 $B=\frac{\pi}{4}$，所以 $A=\pi-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{12}$.

12.【答案】 $\sqrt{7}$

【解析】 如图，在 Rt$\triangle ADC$ 中，$\angle D=90°$，$AD=1$，$AC=2$，所以$\angle DAC=60°$，又$\angle BAD=120°$，所以$\angle CAB=60°$. 在$\triangle ABC$中，$AB=3$，由余弦定理得 $BC^2=AC^2+AB^2-2AB\times AC\cos\angle CAB=7$，所以 $BC=\sqrt{7}$.



（第 12 题）

13.【解答】（1）在$\triangle ABC$中，由正弦定理及 $a\cos B+b\cos A=2c\cos C$，

得 $\sin A\cos B+\sin B\cos A=2\sin C\cos C$，

即 $\sin C=2\sin C\cos C$，

因为 $C\in(0,\pi)$，所以 $\sin C\neq 0$，

所以 $\cos C=\frac{1}{2}$，所以 $C=\frac{\pi}{3}$.

（2）由已知得$\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{\sqrt{3}ab}{4}=\sqrt{3}$，

所以 $ab=4$.

由已知及余弦定理得 $a^2+b^2-2ab\cos C=4$，

故 $a^2+b^2=8$，

从而$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab=16$，

所以 $a+b=4$，

所以$\triangle ABC$的周长为 6.

14.【解答】（1）由 $\tan A+\tan C+\sqrt{3}=\sqrt{3}\tan A\tan C$，

得$\frac{\tan A+\tan C}{1-\tan A\tan C}=-\sqrt{3}$，即 $\tan(\pi-B)=-\sqrt{3}$，

所以 $\tan B=\sqrt{3}$. 因为 $0<B<\pi$，所以 $B=\frac{\pi}{3}$.

（2）因为$\triangle ABC$的外接圆的半径为$\sqrt{3}$，

由正弦定理得$\frac{b}{\sin B}=2\sqrt{3}$，

所以 $b=2\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{3}=3$，所以 $ac=\frac{2}{3}b^2=6$.

由余弦定理知 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，

即 $9=(a+c)^2-3ac$，所以$(a+c)^2=27$，即 $a+c=3\sqrt{3}$.

因为 $a<c$，所以 $a=\sqrt{3}$，$c=2\sqrt{3}$，

所以$\triangle ABC$为直角三角形，且$\angle A=\frac{\pi}{6}$，

所以$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=3\times 2\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6}=9$.

1. 解：(1)$M_1=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$，$M_2=\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}$.

(2)$\because M=M_2M_1=\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$，

$\therefore M\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$.

故点C在两次连续的变换作用下所得到的点的坐标是$(1,2)$.

2. 解：由椭圆的定义可知$A(4,0)$，$B(0,2)$，

故直线AB的方程为$x+2y-4=0$.

设$P(4\cos\theta,2\sin\theta)$（$\theta$为锐角）为椭圆上在第一象限内的一个动点，可得点$P$到直线$AB$的距离$d=\frac{|4\cos\theta+4\sin\theta-4|}{\sqrt{5}}$

$=\frac{|4\sqrt{2}\sin(\theta+45^\circ)-4|}{\sqrt{5}}$.

$\because\theta$为锐角，$\therefore 45^\circ<\theta+45^\circ<135^\circ$，

$\therefore\frac{\sqrt{2}}{2}<\sin(\theta+45^\circ)\leqslant 1$，

$\therefore 0<4\sqrt{2}\sin(\theta+45^\circ)-4\leqslant 4\sqrt{2}-4$，

$\therefore$当$\theta=45^\circ$时，d取最大值为$\frac{4\sqrt{2}-4}{\sqrt{5}}$，

此时$\triangle PAB$的面积S取最大值为$\frac{1}{2}\times 2\sqrt{5}\times\frac{4\sqrt{2}-4}{\sqrt{5}}=4\sqrt{2}-4$.

3. 解：(1)该参加者单独闯第一关、第二关、第三关成功的概率分别为$p_1=\frac{1}{2}$，$p_2=\frac{1}{3}$，$p_3=\frac{1}{4}$.

设该参加者有资格闯第三关为事件A，则$P(A)=p_1(1-p_2)+(1-p_1)p_2+p_1p_2=\frac{2}{3}$.

(2)由题意可知，ξ的可能取值为0，3，6，7，10，

$P(\xi=0)=(1-p_1)(1-p_2)=\frac{1}{3}$，

$P(\xi=3)=p_1(1-p_2)(1-p_3)+(1-p_1)p_2(1-p_3)=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$，

$P(\xi=6)=p_1p_2(1-p_3)=\frac{1}{8}$，

$P(\xi=7)=p_1(1-p_2)p_3+(1-p_1)p_2p_3=\frac{1}{12}+\frac{1}{24}=\frac{1}{8}$，

$P(\xi=10)=p_1p_2p_3=\frac{1}{24}$，

$\therefore\xi$的分布列为

ξ	0	3	6	7	10
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{24}$

$\therefore\xi$的数学期望$E(\xi)=0\times\frac{1}{3}+3\times\frac{3}{8}+6\times\frac{1}{8}+7\times\frac{1}{8}+10\times\frac{1}{24}=\frac{19}{6}$.

4. 解：当$n=1,2$时，$n^{n+1}<(n+1)^n$；

当$n\geqslant 3$，$n^{n+1}>(n+1)^n$（$n\in\mathbf{N}^*$）恒成立.

证明：当$n=1,2$时，$n^{n+1}<(n+1)^n$显然成立；

当$n=3$时，$3^4=81>64=4^3$成立.

假设当$n=k(k\geqslant 3)$时成立，即$k^{k+1}>(k+1)^k$成立，即$\frac{k^{k+1}}{(k+1)^k}>1$，

则当$n=k+1$时，

$\because\frac{(k+1)^{k+2}}{(k+2)^{k+1}}=(k+1)\cdot\left(\frac{k+1}{k+2}\right)^{k+1}>(k+1)\cdot\left(\frac{k}{k+1}\right)^{k+1}=\frac{k^{k+1}}{(k+1)^k}>1$，

$\therefore (k+1)^{k+2}>(k+2)^{k+1}$，即当$n=k+1$时也成立.

$\therefore$当$n\geqslant 3$时，$n^{n+1}>(n+1)^n$（$n\in\mathbf{N}^*$）恒成立.

江苏省仪征中学 2020 届高三年级数学寒假作业（4）答案

1.【答案】 $\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

【解析】 满足$\overrightarrow{MF_1}\cdot\overrightarrow{MF_2}=0$的点 M 的轨迹是以 F_1F_2 为直径的圆，若其总在椭圆内部，则有 $c<b$，即 $c^2<b^2$. 又 $b^2=a^2-c^2$，所以 $c^2<a^2-c^2$，即 $2c^2<a^2$，所以 $e^2<\frac{1}{2}$，又因为 $0<e<1$，所以 $0<e<\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2.【答案】 $\left[\frac{1}{3},1\right)$

【解析】 由 $PF_1+PF_2=2a$，$PF_1=2PF_2$，得 $PF_1=\frac{4a}{3}$，$PF_2=\frac{2a}{3}$. 又 $PF_1-PF_2\leqslant 2c$，即 $2c\geqslant\frac{2a}{3}$，得$\frac{1}{3}\leqslant e<1$，故离心率的取值范围为$\left[\frac{1}{3},1\right)$.

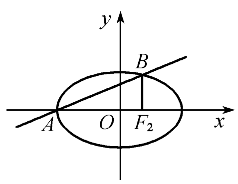
3.【答案】 $\left[\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$

【解析】方法一： 因为$\overrightarrow{F_1M}\cdot\overrightarrow{F_2M}=0$，所以$\angle F_1MF_2=90^\circ$，只需要焦点三角形的顶角最大值$\geqslant 90^\circ$即可，故只需保证当点 M 落在椭圆短轴端点处情形时$\angle F_1MF_2\geqslant 90^\circ$即可，所以 $\frac{c}{a}=\sin\frac{\angle F_1MF_2}{2}\geqslant\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 又因为 $e<1$，故所求的椭圆离心率的取值范围是$\left[\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$.

方法二： 由椭圆的定义知 $MF_1+MF_2=2a$，在$\triangle F_1MF_2$中，$\angle F_1MF_2=90^\circ$. 由勾股定理得 $F_1M^2+F_2M^2=F_1F_2^2=4c^2$，将上式化简得 $F_1M\cdot F_2M=2(a^2-c^2)$，根据韦达定理，可知 F_1M,F_2M 是方程 $x^2-2ax+2(a^2-c^2)=0$ 的两个根，则 $\Delta=4a^2-8(a^2-c^2)\geqslant 0$，则$\left(\frac{c}{a}\right)^2\geqslant\frac{1}{2}$，即 $e\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$. 又因为 $e<1$，故所求的椭圆离心率的取值范围是$\left[\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$.

4.【答案】 $\left(\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right)$

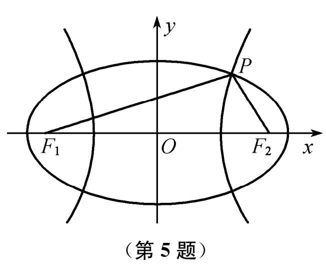
【解析】 如图所示，$AF_2=a+c$，$BF_2=\frac{a^2-c^2}{a}$，所以 $k=\tan\angle BAF_2=\frac{BF_2}{AF_2}=\frac{\frac{a^2-c^2}{a}}{a+c}=\frac{a-c}{a}=1-e$. 又因为$\frac{1}{3}<k<\frac{1}{2}$，所以$\frac{1}{3}<1-e<\frac{1}{2}$，解得$\frac{1}{2}<e<\frac{2}{3}$.



（第 4 题）

5.【答案】 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$

【解析】 如图所示，设椭圆与双曲线的焦距为 $F_1F_2=2c$，$PF_1=t$，由题意可得 $t+c=2a_1$，$t-c=2a_2$，所以 $t=2a_1-c$，$t=2a_2+c$，所以 $2a_1-c=2a_2+c$，即 $a_1-a_2=c$，所以$\frac{1}{e_1}-\frac{1}{e_2}=1$，即 $e_1=\frac{e_2}{e_2+1}$，所以 $e_2-e_1=e_2-\frac{e_2}{e_2+1}=\frac{e_2^2}{e_2+1}=\frac{1}{\left(\frac{1}{e_2}\right)+\frac{1}{e_2^2}}$. 由 $e_2>1$ 可知 $0<\frac{1}{e_2}<1$，令 $x=\frac{1}{e_2}\in(0,1)$，所以 $y=x^2+x\in(0,2)$，所以 $e_2-e_1>\frac{1}{2}$.

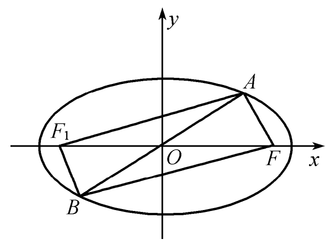


（第 5 题）

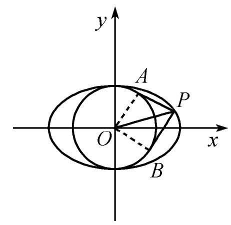
6.【答案】 $\left[\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{3}-1\right]$

【解析】 由题知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的焦点在 x 轴上，设其左焦点为 F_1，如图，连接 AF,AF_1,BF,BF_1，所以四边形 $AFBF_1$ 为长方形. 根据椭圆的定义知 $AF+AF_1=2a$. 又$\angle ABF=\alpha$，则$\angle AF_1F=\alpha$，所以 $2a=2c\cos\alpha+2c\sin\alpha$，椭圆的离心率 $e=\frac{2c}{2a}=\frac{1}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\frac{1}{\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}$，$\alpha\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right]$，所以 $\frac{5\pi}{12}\leqslant\alpha+\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{\pi}{2}$，则 $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}\leqslant\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\leqslant 1$，所以$\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}\leqslant\sqrt{3}-1$，

所以椭圆离心率 e 的取值范围为$\left[\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{3}-1\right]$.



（第 6 题）



（第 7 题）

7.【答案】 $\left[\frac{\sqrt{3}}{2},1\right)$

【解析】 如图，连接 OA,OB,OP，由题意知 O,P,A,B 四点共圆. 因为$\angle BPA=\frac{\pi}{3}$，所以$\angle APO=\angle BPO=\frac{\pi}{6}$. 在 Rt$\triangle OAP$ 中，$\angle AOP=\frac{\pi}{3}$，所以 $\cos\angle AOP=\frac{b}{OP}=\frac{1}{2}$，所以 $OP=2b$. 因为 $b<OP\leqslant a$，所以 $2b\leqslant a$，即 $4(a^2-c^2)\leqslant a^2$，即$\frac{c^2}{a^2}\geqslant\frac{3}{4}$，所以 $e\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$. 又 $0<e<1$，所以椭圆 C_1 的离心率的取值范围是$\left[\frac{\sqrt{3}}{2},1\right)$.

8.【答案】 $\left[\frac{\sqrt{5}}{2},+\infty\right)$

【解析】 由已知 $OP^2=2ab$，又 P 为双曲线上一点，从而 $OP\geqslant a$，所以 $2ab\geqslant a^2$，所以 $2b\geqslant a$. 又因为 $c^2=a^2+b^2\geqslant a^2+\frac{a^2}{4}=\frac{5}{4}a^2$，所以$e=\frac{c}{a}\geqslant\frac{\sqrt{5}}{2}$.

9.【答案】 $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},1\right)$.

【解析】 ①当点 P 为椭圆的两个短轴端点时，$\triangle F_1F_2P$ 为等腰三角形，此时有 2 个. ②若点 P 不在短轴端点时，要使$\triangle F_1F_2P$ 为等腰三角形，则 $PF_1=F_1F_2=2c$ 或 $PF_2=F_1F_2=2c$. 当 $PF_1=F_1F_2$ 时，点 P 在以 F_1 为圆心，$2c$ 为半径的圆上，因此当此圆与椭圆 C 有 2 个交点时，存在 2 个满足条件的等腰三角形 F_1F_2P，此时 $a-c<2c$，解得 $a<3c$，所以 $e>\frac{1}{3}$. 当 $e=\frac{1}{2}$时，$\triangle F_1F_2P$ 为等边三角形，故舍去. 同理，当 $PF_2=F_1F_2$ 时，可得当 $e>\frac{1}{3}$且 $e\neq\frac{1}{2}$时存在 2 个满足条件

的等腰三角形.综上,离心率 $e\in\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},1\right)$.

【答案】 $\left(\frac{\sqrt{6}}{3},1\right)$

【解析】 设 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, AB 的中点为 $P(x_0,y_0)$,因为 A,B 在椭圆 C 上,所以 $\begin{cases}mx_1^2+y_1^2=1,\\mx_2^2+y_2^2=1,\end{cases}$ 两式相减,整理得 $\frac{m(x_1+x_2)}{y_1+y_2}=-\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$,即 $-\frac{mx_0}{y_0}=k_{AB}$,故 $k_{AB}\cdot k_{OP}=-m$.又因为 $k_{AB}=-1$,所以 $k_{OP}=m$,所以直线 OP 的方程为 $y=mx$.联立方程 $\begin{cases}y=mx,\\y=x+1,\end{cases}$ 得 $P\left(\frac{1}{m-1},\frac{m}{m-1}\right)$.由点 P 在椭圆内,所以 $m\left(\frac{1}{m-1}\right)^2+\left(\frac{m}{m-1}\right)^2<1$,解得 $0<m<\frac{1}{3}$,所以离心率 $e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1-m}\in\left(\frac{\sqrt{6}}{3},1\right)$.

【答案】 $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2},1\right)$

【解析】 **方法一**:直线 A_2B_1:$bx+ay-ab=0$,直线 B_2F_2:$bx-cy-bc=0$,联立可得 $P\left(\frac{2ac}{a+c},\frac{b(a-c)}{a+c}\right)$,则 $\overrightarrow{PB_2}=\left(-\frac{2ac}{a+c},-\frac{2ab}{a+c}\right)$, $\overrightarrow{PA_2}=\left(\frac{a(a-c)}{a+c},-\frac{b(a-c)}{a+c}\right)$.因为 $\angle B_2PA_2$ 是钝角,所以 $\overrightarrow{PA_2}\cdot\overrightarrow{PB_2}<0$,即 $b^2=a^2-c^2<ac$,解得 $e>\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 或 $e<-\frac{\sqrt{5}+1}{2}$,又 $0<e<1$,所以 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}<e<1$.

方法二:因为 $\angle B_2PA_2$ 是钝角,所以 $\overrightarrow{B_1A_2}\cdot\overrightarrow{F_2B_2}<0$,即 $(a,-b)\cdot(-c,-b)<0$,即 $b^2<ac$,即 $a^2-c^2-ac<0$,所以 $e^2+e-1>0$,解得 $e>\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 或 $e<-\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.又 $0<e<1$,所以椭圆 E 的离心率 e 的取值范围是 $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2},1\right)$.

【答案】 8

【解析】 由题意设焦距为 $2c$,椭圆长轴长 $2a_1$,双曲线实轴长为 $2a_2$,取椭圆与双曲线在一象限的交点为 P,由椭圆和双曲线定义分别有 $PF_1+PF_2=2a_1$①, $PF_1-PF_2=2a_2$②, 因为 $PF_1\perp PF_2$,所以 $PF_1^2+PF_2^2=4c^2$③. ①^2+②^2,得 $PF_1^2+PF_2^2=2a_1^2+2a_2^2$④,将④代入③得 $a_1^2+a_2^2=2c^2$,则 $9e_1^2+e_2^2=\frac{9c^2}{a_1^2}+\frac{c^2}{a_2^2}=5+\frac{9a_2^2}{2a_1^2}+\frac{a_1^2}{2a_2^2}\geqslant 8$,故 $9e_1^2+e_2^2$ 的最小值为 8.

【解答】(1)由点 P 在圆 O:$x^2+y^2=b^2$ 上,得 $b=3$.

又点 Q 在椭圆 C 上,所以 $\frac{(-4)^2}{a^2}+\frac{(-1)^2}{3^2}=1$,解得 $a^2=18$,

所以椭圆 C 的方程是 $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{9}=1$.

(2)由 $\begin{cases}y=kx+b,\\x^2+y^2=b^2,\end{cases}$ 得 $(1+k^2)x^2+2kbx=0$,

则 $x_A=0$ 或 $x_P=-\frac{2kb}{1+k^2}$.

由 $\begin{cases}y=kx+b,\\\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\end{cases}$ 得 $(a^2k^2+b^2)x^2+2kba^2x=0$,

则 $x_A=0$ 或 $x_Q=-\frac{2kba^2}{k^2a^2+b^2}$.

因为 $\overrightarrow{AP}=3\overrightarrow{PQ}$,所以 $\overrightarrow{AP}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AQ}$,

所以 $\frac{2kba^2}{a^2k^2+b^2}\cdot\frac{3}{4}=\frac{2kb}{1+k^2}$,即 $\frac{a^2}{k^2a^2+b^2}\cdot\frac{3}{4}=\frac{1}{1+k^2}$,

所以 $k^2=\frac{3a^2-4b^2}{a^2}=4e^2-1$.

因为 $k^2>0$,所以 $4e^2>1$,即 $e>\frac{1}{2}$.

又 $0<e<1$,所以 $\frac{1}{2}<e<1$,

故椭圆 C 的离心率 e 的取值范围为 $\left(\frac{1}{2},1\right)$.

14.【解答】(1)因为 F_1,F_2 为椭圆 C 的两焦点,且 P,Q 为椭圆上的点,所以 $PF_1+PF_2=QF_1+QF_2=2a$,

从而 $\triangle PQF_2$ 的周长为 $4a$,

由题意得 $4a=8$,解得 $a=2$.

因为点 P 的坐标为 $\left(1,\frac{3}{2}\right)$,

所以 $\frac{1}{a^2}+\frac{9}{4b^2}=1$,解得 $b^2=3$.

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

(2)**方法一**:因为 $PF_2\perp x$ 轴,且 P 在 x 轴上方,所以可设 $P(c,y_0)$ $(y_0>0)$, $Q(x_1,y_1)$.

因为点 P 在椭圆上,所以 $\frac{c^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$,

解得 $y_0=\frac{b^2}{a}$,即 $P\left(c,\frac{b^2}{a}\right)$.

因为 $F_1(-c,0)$,所以 $\overrightarrow{PF_1}=\left(-2c,-\frac{b^2}{a}\right)$, $\overrightarrow{F_1Q}=(x_1+c,y_1)$.

由 $\overrightarrow{PF_1}=\lambda\overrightarrow{F_1Q}$,得 $-2c=\lambda(x_1+c)$, $-\frac{b^2}{a}=\lambda y_1$,解得 $x_1=-\frac{\lambda+2}{\lambda}c$, $y_1=-\frac{b^2}{\lambda a}$,所以 $Q\left(-\frac{\lambda+2}{\lambda}c,-\frac{b^2}{\lambda a}\right)$.

因为点 Q 在椭圆上,所以 $\left(\frac{\lambda+2}{\lambda}\right)^2e^2+\frac{b^2}{\lambda^2a^2}=1$,

即 $(\lambda+2)^2e^2+(1-e^2)=\lambda^2$,即 $(\lambda^2+4\lambda+3)e^2=\lambda^2-1$.

因为 $\lambda+1\neq0$,所以 $(\lambda+3)e^2=\lambda-1$,

从而 $\lambda=\frac{3e^2+1}{1-e^2}=\frac{4}{1-e^2}-3$.

因为 $e\in\left[\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$,所以 $\frac{1}{4}\leqslant e^2\leqslant\frac{1}{2}$,即 $\frac{7}{3}\leqslant\lambda\leqslant5$.

所以 λ 的取值范围为 $\left[\frac{7}{3},5\right]$.

3

方法二:由于 $PF_2\perp x$ 轴,且 P 在 x 轴上方,故设 $P(c,y_0)(y_0>0)$.

因为点 P 在椭圆上,所以 $\frac{c^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$,解得 $y_0=\frac{b^2}{a}$,即 $P\left(c,\frac{b^2}{a}\right)$.

因为 $F_1(-c,0)$,所以直线 PF_1 的方程为 $y=\frac{b^2}{2ac}(x+c)$.

联立 $\begin{cases}y=\frac{b^2}{2ac}(x+c),\\\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\end{cases}$

得 $(4c^2+b^2)x^2+2b^2cx+c^2(b^2-4a^2)=0$.

因为直线 PF_1 与椭圆有一个交点为 $P\left(c,\frac{b^2}{a}\right)$,

设 $Q(x_1,y_1)$,则 $x_1+c=-\frac{2b^2c}{4c^2+b^2}$,

因为 $\overrightarrow{PF_1}=\lambda\overrightarrow{F_1Q}$,所以 $\lambda=\frac{-2c}{c+x_1}=\frac{4c^2+b^2}{b^2}=\frac{3c^2+a^2}{a^2-c^2}=\frac{3e^2+1}{1-e^2}=\frac{4}{1-e^2}-3$.

以下同方法一.

1. 解：$MN=\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0\\0&2\end{bmatrix}$.

设(x,y)是曲线$y=\sin x$上的任意一点，在矩阵MN变换下对应的点为(x',y')，

则$\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0\\0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}$，

∴ $\begin{cases}x'=\frac{1}{2}x,\\y'=2y,\end{cases}$即$\begin{cases}x=2x',\\y=\frac{1}{2}y',\end{cases}$，

代入$y=\sin x$，得$\frac{1}{2}y'=\sin 2x'$，即$y'=2\sin 2x'$，

∴ 曲线$y=\sin x$在矩阵MN变换下的曲线方程为$y=2\sin 2x$.

2. 解：(1)直线l的极坐标方程$\rho\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=3\sqrt{2}$，则$\frac{\sqrt{2}}{2}\rho\sin\theta-\frac{\sqrt{2}}{2}\rho\cos\theta=3\sqrt{2}$，

即$\rho\sin\theta-\rho\cos\theta=6$，

∴ 直线l的直角坐标方程为$x-y+6=0$.

(2)设$P(4\cos\alpha,3\sin\alpha)$，其中$\alpha\in[0,2\pi)$，

则点P到直线l的距离$d=\frac{|4\cos\alpha-3\sin\alpha+6|}{\sqrt{2}}=\frac{|5\cos(\alpha+\varphi)+6|}{\sqrt{2}}$，其中$\cos\varphi=\frac{4}{5}$，

∴ 当$\cos(\alpha+\varphi)=1$时，d取最大值为$\frac{11\sqrt{2}}{2}$.

3. 解：(1)设正三棱柱的棱长为2，建立如图所示的空间直角坐标系，则$A(0,-1,0)$，$B(\sqrt{3},0,0)$，$C(0,1,0)$，$A_1(0,-1,2)$，$B_1(\sqrt{3},0,2)$，$C_1(0,1,2)$，

∴ $\overrightarrow{AB}=(\sqrt{3},1,0)$，$\overrightarrow{CA_1}=(0,-2,2)$，$\overrightarrow{A_1B}=(\sqrt{3},1,-2)$.

∵ $PC\perp AB$，∴ $\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，

∴ $(\overrightarrow{CA_1}+\lambda\overrightarrow{A_1B})\cdot\overrightarrow{AB}=0$，解得$\lambda=\frac{1}{2}$.

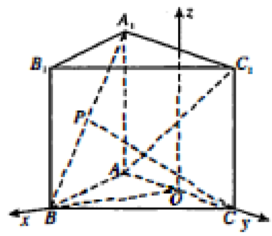
(2)由(1)易知$\overrightarrow{CP}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{3}{2},1\right)$，$\overrightarrow{AC_1}=(0,2,2)$，

$\cos\langle\overrightarrow{CP},\overrightarrow{AC_1}\rangle=$

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\times0+\left(-\frac{3}{2}\right)\times2+1\times2}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(-\frac{3}{2}\right)^2+1^2}\times\sqrt{0^2+2^2+2^2}}$$

$=-\frac{\sqrt{2}}{8}$，

∴ 异面直线PC与AC_1所成角的余弦值是$\frac{\sqrt{2}}{8}$.



4. 解：(1)从六个点中任取三个不同的点共有$C_6^3=20$(个)基本事件，事件"$X\geqslant\frac{1}{2}$"所含基本事件有$2\times3+1=7$(个).

从而$P\left(X\geqslant\frac{1}{2}\right)=\frac{7}{20}$.

(2)由题意知X的取值为$0,\frac{1}{4},\frac{1}{2},1$，

∴ $P(X=0)=\frac{3}{C_6^3}=\frac{3}{20}$，$P\left(X=\frac{1}{4}\right)=\frac{10}{20}$，

$P\left(X=\frac{1}{2}\right)=\frac{6}{20}$，$P(X=1)=\frac{1}{20}$.

X的分布列为：

X	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1
P	$\frac{3}{20}$	$\frac{10}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{1}{20}$

则$E(X)=0\times\frac{3}{20}+\frac{1}{4}\times\frac{10}{20}+\frac{1}{2}\times\frac{6}{20}+1\times\frac{1}{20}=\frac{13}{40}$.

江苏省仪征中学 2020 届高三年级数学寒假作业（5）答案

1.【答案】1

【解析】因为四边形 $ABCD$ 为矩形，所以$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AB}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE})\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}|^2+\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}|^2=1$.

2.【答案】$-\frac{3}{2}$

【解析】若△ABC 是边长为 1 的等边三角形，则$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}=1\times1\times\cos\frac{2\pi}{3}+1\times1\times\cos\frac{2\pi}{3}+1\times1\times\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{3}{2}$.

3.【答案】-5

【解析】$\overrightarrow{AD}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC})=(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{ED})\cdot(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EC})=(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{ED})\cdot(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{DE})=(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{ED})\cdot(\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{ED})=|\overrightarrow{AE}|^2-|\overrightarrow{ED}|^2=2^2-3^2=-5$.

4.【答案】$\sqrt{3}$

【解析】由$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$，得$\overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BD})=0$，即$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，所以 $AC\perp AB$，于是 $AC\perp CD$. 又$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD})=|\overrightarrow{AC}|^2+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CD}=|\overrightarrow{AC}|^2$，即$|\overrightarrow{AC}|^2=3$，所以 $AC=\sqrt{3}$.

5.【答案】6

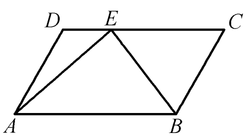
【解析】因为$\overrightarrow{CP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})$，所以$|\overrightarrow{CP}|^2=\frac{1}{4}(|\overrightarrow{CA}|^2+|\overrightarrow{CB}|^2+2\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB})$，所以 $3=\frac{1}{4}(16+|\overrightarrow{CB}|^2-4|\overrightarrow{CB}|)$，所以$|\overrightarrow{CB}|=2$，所以$\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{CA}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})\cdot\overrightarrow{CA}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{CA}|^2+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}=\frac{1}{2}\times16+\frac{1}{2}\times2\times4\times\left(-\frac{1}{2}\right)=6$.

6.【答案】22

【解析】由题意知$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DP}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{BC}+\frac{3}{4}\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$，所以$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=\left(\overrightarrow{AD}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AD}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}\right)=|\overrightarrow{AD}|^2-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}-\frac{3}{16}|\overrightarrow{AB}|^2$，即 $2=25-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}-\frac{3}{16}\times64$，解得$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=22$.

7.【答案】$-\frac{3}{2}$

【解析】如图，因为$\overrightarrow{CE}=2\overrightarrow{ED}$，所以 $DE=\frac{1}{3}DC=\frac{1}{3}AB$，$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{BC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$，所以$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BE}=\left(\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AD}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\right)=\overrightarrow{AD}^2-\frac{2}{9}\overrightarrow{AB}^2-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=1-2-\frac{1}{3}\times3\times1\times\cos60^\circ=-\frac{3}{2}$.



（第 7 题）

7

8.【答案】-5

【解析】以 BC 为 x 轴，BC 的垂直平分线为 y 轴建立平面直角坐标系，则 $B(-3,0)$，$C(3,0)$，设 $A(2,m)$，则$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(-5,-m)\cdot(1,-m)=m^2-5$，所以当 $m=0$ 时，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$取得最小值$-5$.

9.【答案】$-\frac{4}{3}$

【解析】因为$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DC}$，所以$\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})$，又因为$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$，所以$\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=-\frac{1}{2}$，即$\overrightarrow{AB}^2-\overrightarrow{CB}^2=1$，所以$\overrightarrow{AB}^2=1+4=5$，所以 $AB=AC=\sqrt{5}$. 又$\overrightarrow{CE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}$，故$\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}$. 由余弦定理得 $\cos A=\frac{5+5-4}{2\times5}=\frac{3}{5}$，则$\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}\times5-5\times\frac{3}{5}=-\frac{4}{3}$.

10.【答案】-4

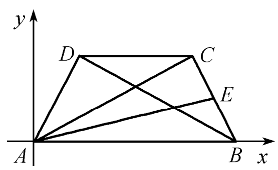
【解析】因为 $AC=4$，$BC=3$，$\angle ACB=60^\circ$，所以$\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}=3\times4\times\frac{1}{2}=6$. 因为 E 为边 AC 的中点，所以$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{CE}-\overrightarrow{CB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}$. 因为$\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，所以$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}=\frac{2}{3}(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA})+\frac{2}{3}\overrightarrow{CA}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$，所以$\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{BE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}\cdot\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}\right)=\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}-\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}^2=2-6=-4$.

11.【答案】$[2,5]$

【解析】因为 $A=\frac{\pi}{3}$，$AB=2$，$AD=1$，所以$\overrightarrow{AB}^2=4$，$\overrightarrow{AD}^2=1$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=1$. 设$\frac{|\overrightarrow{BM}|}{|\overrightarrow{BC}|}=\frac{|\overrightarrow{CN}|}{|\overrightarrow{CD}|}=\lambda$，且 $\lambda\in[0,1]$，则$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AD}+(1-\lambda)\overrightarrow{AB}$，所以$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}=-\lambda^2-2\lambda+5$，由 $\lambda\in[0,1]$，得$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}\in[2,5]$.

12.【答案】$2\sqrt{3}$

【解析】设 $CD=m$，以 A 为坐标原点建立如图平面直角坐标系 xAy，则 $A(0,0)$，$B(4,0)$，因为 $AD=2$，$\angle BAD=\frac{\pi}{3}$，所以 $D(1,\sqrt{3})$，$C(m+1,\sqrt{3})$. 因为 E 为 BC 的中点，所以 $E\left(\frac{m+5}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，所以$\overrightarrow{DB}=(3,-\sqrt{3})$，$\overrightarrow{AE}=\left(\frac{m+5}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，所以$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{DB}=\frac{3m+15}{2}-\frac{3}{2}=9$，解得 $m=2$，所以 $C(3,\sqrt{3})$，则 $AC=\sqrt{3^2+(\sqrt{3})^2}=2\sqrt{3}$.



（第 12 题）

13.【解答】设$\angle BAD=\theta(0\leqslant\theta\leqslant2\pi)$，则$\angle CAE=\theta$，

则$\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AM}=(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}^2+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE})$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\times2\times1\times\cos\theta-\frac{1}{2}\times2\times1\times\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$

$=\frac{3}{4}-\cos\theta-\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$

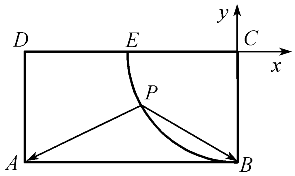
$=\frac{3}{4}-\cos\theta-\frac{1}{2}\cos\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta$

$=\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta-\frac{3}{2}\cos\theta$

$=\frac{3}{4}+\sqrt{3}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)$.

故当$\theta=\frac{5\pi}{6}$时，$\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AM}$取得最大值$\frac{3}{4}+\sqrt{3}$，此时$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{AM}$共线且反向，故$\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AM}$的最大值为$\frac{3}{4}+\sqrt{3}$.

14.【解答】以C为原点，建立如图所示平面直角坐标系，则$A(-4,-2)$，$B(0,-2)$，



（第14题）

点P的轨迹方程为$x^2+y^2=4$，点P的坐标为$(2\cos\theta,2\sin\theta)\left(\theta\in\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right]\right)$.

又$\overrightarrow{PA}=(-4-2\cos\theta,-2-2\sin\theta)$，$\overrightarrow{PB}=(0-2\cos\theta,-2-2\sin\theta)$，

则$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=8\cos\theta+8\sin\theta+8=8\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)+8$.

因为$\theta\in\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right]$，所以$\theta+\frac{\pi}{4}\in\left[\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right]$.

当$\theta+\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{2}$，即$\theta=\frac{5\pi}{4}$时，$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$取到最小值$8-8\sqrt{2}$；

当$\theta+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}$或$\frac{7\pi}{4}$，即$\theta=\pi$或$\frac{3\pi}{2}$时，$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$取到最大值0，

所以$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$的取值范围是$[8-8\sqrt{2},0]$.

1. 解：(1)矩阵A的特征多项式为$f(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2\\ 1 & \lambda-4\end{vmatrix}=\lambda^2-5\lambda+6=0$，解得$\lambda_1=2,\lambda_2=3$.

当$\lambda_1=2$时，解得$\alpha_1=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$；当$\lambda_2=3$时，解得$\alpha_2=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$.

(2)由$\alpha=m\alpha_1+n\alpha_2$得$\begin{cases}2m+n=7,\\ m+n=4,\end{cases}$

解得$m=3,n=1$.

$A^5\alpha=A^5(3\alpha_1+\alpha_2)=3(A^5\alpha_1)+A^5\alpha_2=3(\lambda_1^5\alpha_1)+\lambda_2^5\alpha_2=3\times2^5\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}+3^5\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}435\\339\end{bmatrix}$.

2. 解：点$A(2,-2)$，圆$E:(x-2)^2+(y-2)^2=8$，

则点A到圆心E的距离$d=\sqrt{(2-2)^2+(-2-2)^2}=4>r=2\sqrt{2}$，

∴ 点A在圆E外.

3. 解：(1)建立如图所示的空间直角坐标系，则$A(1,0,0)$，$B(1,1,0)$，$P(0,1,m)$，$C(0,1,0)$，$D(0,0,0)$，$B_1(1,1,2)$，$D_1(0,0,2)$，

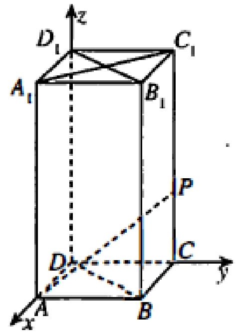
∴ $\overrightarrow{BD}=(-1,-1,0)$，$\overrightarrow{BB_1}=(0,0,2)$，$\overrightarrow{AP}=(-1,1,m)$，$\overrightarrow{AC}=(-1,1,0)$.

由$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BB_1}=0$知，$\overrightarrow{AC}$为平面$BB_1D_1D$的一个法向量.

设AP与平面BDD_1B_1所成的角为θ，

则$\sin\theta=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{|\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AP}|\,|\overrightarrow{AC}|}=\frac{2}{\sqrt{2}\times\sqrt{2+m^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，解得$m=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

故当$m=\frac{\sqrt{6}}{3}$时，直线AP与平面BDD_1B_1所成角为60°.



(2)假设在A_1C_1上存在这样的点Q，设点Q的横坐标为x，则$Q(x,1-x,2)$，$\overrightarrow{D_1Q}=(x,1-x,0)$.

依题意，得$\overrightarrow{D_1Q}\perp\overrightarrow{AP}$，即$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{D_1Q}=0$，

∴ $-x+(1-x)=0$，解得$x=\frac{1}{2}$，

∴ 当Q为A_1C_1的中点时，满足题设的要求.

4. 证明：(1)当$n=1$时，$a_1=\frac{1}{4}$，有$0<a_1<\frac{1}{3}$，结论成立；

假设当$n=k$时，不等式成立，即$a_k\in\left(0,\frac{1}{3}\right)$.

则当$n=k+1$时，$a_{k+1}=f(a_k)=2a_k-3a_k^2=-3\left(a_k-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}$.

∵ $a_k\in\left(0,\frac{1}{3}\right)$，

∴ $a_{k+1}\in\left(0,\frac{1}{3}\right)$，

∴ 当$n=k+1$时，结论成立.

综上，对$\forall n\in\mathbf{N}^*$，都有$0<a_n<\frac{1}{3}$.

(2)由(1)知$\frac{1}{3}-a_{n+1}=3\left(\frac{1}{3}-a_n\right)^2$，

则有$\log_3\left(\frac{1}{3}-a_{n+1}\right)=1+2\log_3\left(\frac{1}{3}-a_n\right)$，

∴ $\left\{1+\log_3\left(\frac{1}{3}-a_n\right)\right\}$是以$\log_3\frac{1}{4}$为首项，2为公比的等比数列，

∴ $1+\log_3\left(\frac{1}{3}-a_n\right)=2^{n-1}\log_3\frac{1}{4}$，

即$\frac{1}{\frac{1}{3}-a_n}=3\times4^{2^{n-1}}$.

∵ $n\geqslant2$，

∴ $2^{n-1}=C_{n-1}^0+C_{n-1}^1+\cdots+C_{n-1}^{n-1}\geqslant1+n-1=n$，

当$n=1$时，$2^{n-1}=1$，

∴ $n\in\mathbf{N}^*$时，$2^{n-1}\geqslant n$，

∴ $\frac{1}{\frac{1}{3}-a_n}=3\times4^{2^{n-1}}\geqslant4^n\times3$，

∴ $\frac{1}{\frac{1}{3}-a_1}+\frac{1}{\frac{1}{3}-a_2}+\cdots+\frac{1}{\frac{1}{3}-a_n}\geqslant3(4^1+4^2+\cdots+4^n)=4^{n+1}-4$，

∴ $\frac{3}{1-3a_1}+\frac{3}{1-3a_2}+\cdots+\frac{3}{1-3a_n}\geqslant4^{n+1}-4$.

江苏省仪征中学 2020 届高三年级数学寒假作业（6）答案

1. **【答案】** $(x-1)^2+(y+4)^2=8$

【解析】方法一： 设圆心为 $(a,-4a)$，则有 $r=\dfrac{|a-4a-1|}{\sqrt{2}}=\sqrt{(a-3)^2+(-4a+2)^2}$，解得 $a=1$，$r=2\sqrt{2}$，则圆的方程为 $(x-1)^2+(y+4)^2=8$.

方法二： 过点 $P(3,-2)$ 且垂直于直线 $x+y-1=0$ 的直线方程为 $x-y-5=0$，联立方程组 $\begin{cases}x-y-5=0,\\ y=-4x,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=1,\\ y=-4,\end{cases}$ 则圆心坐标为 $(1,-4)$，半径为 $r=\sqrt{(1-3)^2+(-4+2)^2}=2\sqrt{2}$，故圆的方程为 $(x-1)^2+(y+4)^2=8$.

2. **【答案】** -1

【解析】 因为 $\triangle ABC$ 为直角三角形，所以 $BC=AC=r=4$，所以圆心 C 到直线 AB 的距离为 $2\sqrt{2}$，从而有 $\dfrac{|a+a-2|}{\sqrt{a^2+1}}=2\sqrt{2}$，解得 $a=-1$.

3. **【答案】** $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{9}{2}\right)$

【解析】 圆 $x^2+y^2-4x-2y+t=0$ 的方程可化为 $(x-2)^2+(y-1)^2=5-t$，设点 P 到直线 AB 的距离为 h，则 $S_{\triangle PAB}=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}\times h=\dfrac{1}{2}$，解得 $h=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. 而圆心到直线 AB 的距离为 $\sqrt{2}$，欲使得圆 $x^2+y^2-4x-2y+t=0$ 上恰有两个不同的点 P，使得 $\triangle PAB$ 的面积为 $\dfrac{1}{2}$，则需要圆上有且只有两个点到直线 AB 的距离为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，故圆的半径 $\sqrt{5-t}\in\left(\sqrt{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$，解得 $t\in\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{9}{2}\right)$.

4. **【答案】** $(x-1)^2+(y+2)^2=2$

【解析】方法一：（几何法）点 $A(2,-1)$ 在直线 $x+y=1$ 上，故点 A 是切点. 过点 $A(2,-1)$ 与直线 $x+y-1=0$ 垂直的直线方程为 $x-y=3$. 由 $\begin{cases}x-y=3,\\ y=-2x,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=1,\\ y=-2,\end{cases}$ 所以圆心 $C(1,-2)$.

又 $AC=\sqrt{(2-1)^2+(-1+2)^2}=\sqrt{2}$，

所以圆 C 的标准方程为 $(x-1)^2+(y+2)^2=2$.

方法二：（方程法）由圆心在直线 $y=-2x$ 上，可设圆心为 $(a,-2a)$，圆的标准方程为 $(x-a)^2+(y+2a)^2=r^2(r>0)$. 要确定两个待定量 a,r^2 的值，只需建立两个含 a,r^2 的等式，建立方程组求解. 由圆 C 过点 $A(2,-1)$，且与直线 $x+y=1$ 相切，得 $\begin{cases}(2-a)^2+(-1+2a)^2=r^2,\\ \dfrac{|a-2a-1|}{\sqrt{2}}=r,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}5a^2-8a+5=r^2,\\ a^2+2a+1=2r^2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=1,\\ r^2=2,\end{cases}$ 所以圆 C 的标准方程为 $(x-1)^2+(y+2)^2=2$.

5. **【答案】** -2

【解析】 圆 $x^2-2ax+y^2+a=0$ 可化为 $(x-a)^2+y^2=a^2-a$，所以圆心为 $(a,0)$，半径为 $\sqrt{a^2-a}$，圆心到直线 $ax+y+1=0$ 的距离为 $d=\dfrac{a^2+1}{\sqrt{a^2+1}}=\sqrt{a^2+1}$. 因为直线 $ax+y+1=0$ 被圆 $x^2-2ax+y^2+a=0$ 截得的弦长为 2，所以 $a^2+1+1=a^2-a$，解得 $a=-2$.

6. **【答案】** $-\dfrac{4}{3}$

【解析】 圆 $(x-2)^2+(y-2)^2=1$ 关于 x 轴的对称圆的方程为 $(x-2)^2+(y+2)^2=1$，由题意得圆心 $(2,-2)$ 到直线 $kx+y+3=0$ 的距离 $d=\dfrac{|2k-2+3|}{\sqrt{k^2+1}}\leqslant 1$，解得 $-\dfrac{4}{3}\leqslant k\leqslant 0$，所以实数 k 的最小值为 $-\dfrac{4}{3}$.

7. **【答案】** $\left\{-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right\}$

【解析】 联立 $\begin{cases}y=-ax+2a,\\ x^2+y^2=1\end{cases}$ 消去 y，得 $(a^2+1)x^2-4a^2x+4a^2-1=0$，由题知 $x_1+x_2=\dfrac{4a^2}{a^2+1}=\dfrac{4}{5}$，解得 $a^2=\dfrac{1}{4}$. 经验证，当 $a^2=\dfrac{1}{4}$ 时，$\Delta>0$，满足题意，所以 a 的取值集合为 $\left\{-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right\}$.

8. **【答案】** $[\sqrt{2}-1,\sqrt{2}+1]$

【解析】 设圆 C_1 上存在点 $P(x_0,y_0)$ 满足题意，点 P 关于直线 $x-y=0$ 的对称点 $Q(y_0,x_0)$，则 $\begin{cases}x_0^2+(y_0-1)^2=r^2,\\ (y_0-2)^2+(x_0-1)^2=1,\end{cases}$ 故只需圆 $x^2+(y-1)^2=r^2$ 与圆 $(x-1)^2+(y-2)^2=1$ 有交点即可，所以 $|r-1|\leqslant\sqrt{(1-0)^2+(2-1)^2}\leqslant r+1$，解得 $\sqrt{2}-1\leqslant r\leqslant\sqrt{2}+1$.

9. **【答案】** $y=\pm\sqrt{3}x$

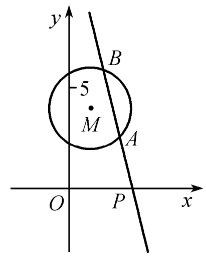
【解析】 由题可得直线 l 的斜率存在，因为 $k_{AN}\cdot k_{AP}=1$，$k_{AN}\cdot k_l=-1$，所以 $(k_{AP}+k_l)\cdot k_{AN}=0$，即 $k_{AP}+k_l=0$. 设 $P(x_0,y_0)(y_0\neq 0)$，则 $A(-1,0)$，$k_l=\dfrac{y_0}{x_0}$，$k_{AP}=\dfrac{y_0}{x_0+1}$，所以 $\dfrac{y_0}{x_0+1}+\dfrac{y_0}{x_0}=0$，解得 $x_0=-\dfrac{1}{2}$. 又 $x_0^2+y_0^2=1$，所以 $y_0=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$k_l=\pm\sqrt{3}$，故所求直线 l 的方程为 $y=\pm\sqrt{3}x$.

10. **【答案】** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

【解析】 由圆的方程可得 $(x-m)^2+(y-\sqrt{3}m)^2=m^2+1$，所以圆心为 $(m,\sqrt{3}m)$，$R=\sqrt{m^2+1}$，圆心到直线的距离 $d=\dfrac{|\sqrt{3}m-km|}{\sqrt{1+k^2}}$. 由题意 $R^2-d^2=m^2+1-\dfrac{(\sqrt{3}-k)^2m^2}{1+k^2}$，不论 m 取何值时，此式为定值，所以 $\dfrac{(\sqrt{3}-k)^2}{1+k^2}=1$ 时，R^2-d^2 为定值 1，解得 $k=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

11. **【答案】** $[1-2\sqrt{5},1+2\sqrt{5}]$

【解析】 因为圆 M：$(x-1)^2+(y-4)^2=4$，所以圆心为 $M(1,4)$，半径 $r=2$，直径为 4，故弦长 AB 的取值范围是 $(0,4]$. 又因为 $PA=BA$，所以动点 P 到圆 M 的最近的点的距离小于或等于 4. 如图，因为圆与 x 轴相离，可得 P 到圆上的点的距离恒大于 0，所以点 P 到圆心 M 的距离小于或等于 6，根据两点间的距离公式有 $\sqrt{(a-1)^2+4^2}\leqslant 6$，解得 $1-2\sqrt{5}\leqslant a\leqslant 1+2\sqrt{5}$，即 a 的取值范围为 $[1-2\sqrt{5},1+2\sqrt{5}]$.



（第 11 题）

12.【答案】$\{a|a\geqslant\sqrt{5}\}$

【解析】由 $x^2+y^2=1$，所以 $3-x-2y>0$. 由 $|x+2y+a|+|3-x-2y|$ 的取值与 x,y 均无关，则 $x+2y+a\geqslant0$ 对任意 x,y 成立，$a\geqslant(-x-2y)_{\max}$. 设 $x=\cos\theta$，则 $y=\sin\theta$，$x+2y=\cos\theta+2\sin\theta=\sqrt{5}\sin(\theta+\varphi)$，$(-x-2y)_{\max}=\sqrt{5}$，所以 $a\geqslant\sqrt{5}$.

13.【解答】(1) 将圆 C：$x^2+y^2+4x-2y+m=0$ 化为 $(x+2)^2+(y-1)^2=5-m$.

因为圆 C：$x^2+y^2+4x-2y+m=0$ 与直线 $x-\sqrt{3}y+\sqrt{3}-2=0$ 相切，

所以圆心 $(-2,1)$ 到直线 $x-\sqrt{3}y+\sqrt{3}-2=0$ 的距离 $d=\dfrac{4}{\sqrt{1+3}}=2=r$，

所以圆 C 的方程为 $(x+2)^2+(y-1)^2=4$.

(2) 若圆 C 上有两点 M,N 关于直线 $x+2y=0$ 对称，则可设直线 MN 的方程为 $2x-y+c=0$.

因为 $MN=2\sqrt{3}$，半径 $r=2$，

所以圆心 $(-2,1)$ 到直线 MN 的距离为 $\sqrt{2^2-(\sqrt{3})^2}=1$，

即 $\dfrac{|-4-1+c|}{\sqrt{5}}=1$，所以 $c=5\pm\sqrt{5}$.

所以直线 MN 的方程为 $2x-y+5\pm\sqrt{5}=0$.

14.【解答】(1) 设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，l：$x=my+2$.

由 $\begin{cases}x=my+2,\\ y^2=2x,\end{cases}$ 得 $y^2-2my-4=0$，则 $y_1y_2=-4$.

又 $x_1=\dfrac{y_1^2}{2}$，$x_2=\dfrac{y_2^2}{2}$，故 $x_1x_2=\dfrac{(y_1y_2)^2}{4}=4$.

因此 $k_{OA}\cdot k_{OB}=\dfrac{y_1}{x_1}\cdot\dfrac{y_2}{x_2}=\dfrac{-4}{4}=-1$，所以 $OA\perp OB$，

故坐标原点 O 在圆 M 上.

(2) 由 (1) 可得 $y_1+y_2=2m$，$x_1+x_2=m(y_1+y_2)+4=2m^2+4$，

故圆心 M 的坐标为 (m^2+2,m)，圆 M 的半径 $r=\sqrt{(m^2+2)^2+m^2}$.

由于圆 M 过点 $P(4,-2)$，因此 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$，故 $(x_1-4)(x_2-4)+(y_1+2)(y_2+2)=0$，

即 $x_1x_2-4(x_1+x_2)+y_1y_2+2(y_1+y_2)+20=0$.

由 (1) 可得 $y_1y_2=-4$，$x_1x_2=4$，

所以 $2m^2-m-1=0$，解得 $m=1$ 或 $m=-\dfrac{1}{2}$.

当 $m=1$ 时，直线 l 的方程为 $x-y-2=0$，圆心 M 的坐标为 $(3,1)$，圆 M 的半径为 $\sqrt{10}$，圆 M 的方程为 $(x-3)^2+(y-1)^2=10$；

当 $m=-\dfrac{1}{2}$ 时，直线 l 的方程为 $2x+y-4=0$，圆心 M 的坐标为 $\left(\dfrac{9}{4},-\dfrac{1}{2}\right)$，圆 M 的半径为 $\dfrac{\sqrt{85}}{4}$，圆 M 的方程为 $\left(x-\dfrac{9}{4}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{85}{16}$.

1. 解：(1) 由题意得，变换矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&0\\0&4\end{bmatrix}$.

(2) 设圆 C：$x^2+y^2=1$ 上的任意一点 $P(x,y)$ 在 A 的变换下得到 $P'(x',y')$，

则 $\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0\\0&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$，

$\therefore\begin{cases}x'=2x,\\y'=4y,\end{cases}\therefore\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}x',\\ y=\dfrac{1}{4}y',\end{cases}$

代入 $x^2+y^2=1$，得 $\left(\dfrac{1}{2}x'\right)^2+\left(\dfrac{1}{4}y'\right)^2=1$，

$\therefore\dfrac{x'^2}{4}+\dfrac{y'^2}{16}=1$，即所得曲线为椭圆.

2. 解：曲线 C 的极坐标方程 $\rho=\sqrt{2}\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 可化为 $\rho=\cos\theta-\sin\theta$，

化为直角坐标方程为 $x^2+y^2-x+y=0$，

即 $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{2}$.

直线 l：$\begin{cases}x=1+\dfrac{4}{5}t,\\ y=-1-\dfrac{3}{5}t\end{cases}$（$t$ 为参数），

可化为 $3x+4y+1=0$，

$\therefore$ 圆心到直线的距离 $d=\dfrac{\left|3\times\dfrac{1}{2}-4\times\dfrac{1}{2}+1\right|}{5}=\dfrac{1}{10}$，

$\therefore$ 弦长 $L=2\sqrt{R^2-d^2}=\dfrac{7}{5}$.

3. 解：(1) 在 $(x^2+2x+2)^5=a_0+a_1(x+1)+a_2(x+1)^2+\cdots+a_9(x+1)^9+a_{10}(x+1)^{10}$ 中，

令 $x=-1$，得 $a_0=1$.

令 $x=0$，得 $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_9+a_{10}=2^5=32$.

$\therefore\sum\limits_{n=1}^{10}a_n=a_1+a_2+\cdots+a_{10}=31$.

(2) 等式 $(x^2+2x+2)^5=a_0+a_1(x+1)+a_2(x+1)^2+\cdots+a_9(x+1)^9+a_{10}(x+1)^{10}$ 两边对 x 求导，

得 $5(x^2+2x+2)^4\cdot(2x+2)=a_1+2a_2(x+1)+\cdots+9a_9(x+1)^8+10a_{10}(x+1)^9$，

令 $x=0$，得 $5\times2^4\times2=a_1+2a_2+3a_3+\cdots+10a_{10}$，

即 $\sum\limits_{n=1}^{10}na_n=a_1+2a_2+\cdots+9a_9+10a_{10}=160$.

4. 解：(1) 甲总得分情况有 6 分，7 分，8 分，9 分四种可能，记 ξ 为甲总得分.

$P(\xi=6)=\left(\dfrac{3}{5}\right)^3=\dfrac{27}{125}$，

$P(\xi=7)=C_3^1\times\dfrac{2}{5}\times\left(\dfrac{3}{5}\right)^2=\dfrac{54}{125}$，

$P(\xi=8)=C_3^2\times\left(\dfrac{2}{5}\right)^2\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{36}{125}$，

$P(\xi=9)=\left(\dfrac{2}{5}\right)^3=\dfrac{8}{125}$.

$\therefore\xi$ 的分布列为

ξ	6	7	8	9
P	$\dfrac{27}{125}$	$\dfrac{54}{125}$	$\dfrac{36}{125}$	$\dfrac{8}{125}$

(2) 甲总得分 ξ 的期望 $E(\xi)=6\times\frac{27}{125}+7\times\frac{54}{125}+8\times\frac{36}{125}+9\times\frac{8}{125}=\frac{36}{5}$.

江苏省仪征中学 2020 届高三年级数学寒假作业（7）答案

1.【答案】$\frac{7}{6}$

【解析】由题意得 $a_4+3a_4\cdot q^7=0$，又 $a_4\neq0$，所以 $q^7=-\frac{1}{3}$，所以 $\frac{S_{21}}{S_{14}}=\frac{1-q^{21}}{1-q^{14}}=\frac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^3}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{7}{6}$.

2.【答案】$\frac{55}{2}$

【解析】由题意知，$a_1+a_3+a_5+a_7+a_9=5a_5=10$，即 $a_5=2$. 又 $a_8^2-a_2^2=(a_8-a_2)(a_8+a_2)=6d\times2a_5=36$，所以 $d=\frac{3}{2}$，所以 $a_1=a_5-4d=2-4\times\frac{3}{2}=-4$，所以 $S_{10}=10a_1+\frac{10\times9}{2}d=10\times(-4)+\frac{10\times9}{2}\times\frac{3}{2}=\frac{55}{2}$.

3.【答案】1 013

【解析】由 $a_{n+1}-2a_n=1$，得 $a_{n+1}+1=2(a_n+1)$，即$\frac{a_{n+1}+1}{a_n+1}=2$，所以数列$\{a_n+1\}$是以 2 为首项，2 为公比的等比数列. 设数列$\{a_n+1\}$的前 n 项和为 T_n，则 $T_9=\frac{2(1-2^9)}{1-2}=1\ 022$，则 $S_9=T_9-9=1\ 013$.

4.【答案】$\frac{20}{11}$

【解析】由题意得 $a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_2-a_1)+a_1=n+n-1+\cdots+2+1=\frac{n(n+1)}{2}$，所以$\frac{1}{a_n}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$，所以 $S_{10}=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{10}}=2\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)=2\left(1-\frac{1}{11}\right)=\frac{20}{11}$.

5.【答案】10

【解析】因为 $a_1=2,a_2=8,a_{n+2}+a_n=a_{n+1}$，所以 $a_{n+2}=a_{n+1}-a_n$，所以 $a_3=a_2-a_1=8-2=6$，同理可得 $a_4=-2,a_5=-8,a_6=-6,a_7=2,a_8=8,\cdots$，所以 $a_{n+6}=a_n$. 又 $2\ 018=336\times6+2$，所以 $\sum_{n=1}^{2\ 018}a_n=336\times(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6)+a_1+a_2=2+8=10$.

6.【答案】$\frac{10}{11}$

【解析】设 S_n 是数列$\{a_n\}$的前 n 项和，且 $a_1=1,a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$，则 $S_{n+1}-S_n+S_n\cdot S_{n+1}=0$，得$\frac{1}{S_{n+1}}-\frac{1}{S_n}=1$，因此$\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$是以 1 为首项，1 为公差的等差数列，故$\frac{1}{S_n}=n$，所以 $S_n=\frac{1}{n}$，$S_n\cdot S_{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$，所以 $T_{10}=1-\frac{1}{11}=\frac{10}{11}$.

7.【答案】1 893

【解析】设$\{a_n\}$的公差为 d，则由题知 $7+21d=28$，解得 $d=1$，所以$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=n$，故 $b_1=[\lg 1]=0$，$b_{11}=[\lg 11]=1$，$b_{101}=[\lg 101]=2$. 因为 $b_n=\begin{cases}0,1\leqslant n<10,\\1,10\leqslant n<100,\\2,100\leqslant n<1\ 000,\\3,n=1\ 000,\end{cases}$ 所以数列$\{b_n\}$的前 1 000 项和为 $1\times90+2\times900+3\times1=1\ 893$.

8.【答案】$\frac{19}{10}$

【解析】由 $S_{n+1}=2S_n$可知，数列$\{S_n\}$是首项为 $S_1=a_1=2$，公比为 2 的等比数列，所以 $S_n=2^n$. 当 $n\geqslant2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=2^n-2^{n-1}=2^{n-1}$，所以 $b_n=\log_2 a_n=\begin{cases}1,n=1,\\n-1,n\geqslant2,\end{cases}$ 所以$\frac{1}{b_1b_2}+\frac{1}{b_2b_3}+\cdots+\frac{1}{b_{10}b_{11}}=\frac{1}{1\times1}+\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\cdots+\frac{1}{9\times10}=1+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)=2-\frac{1}{10}=\frac{19}{10}$.

9.【答案】$\frac{4}{9}-\frac{3n+4}{9\cdot4^n}$

【解析】设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d，则 $\begin{cases}a_1+4d=0,\\a_1+9d=10,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a_1=-8,\\d=2,\end{cases}$ 所以 $a_n=-8+(n-1)\times2=2n-10$，则 $b_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-10+10}=\left(\frac{1}{4}\right)^n$，所以 $nb_n=\frac{n}{4^n}$，所以 $S_n=\frac{1}{4^1}+\frac{2}{4^2}+\cdots+\frac{n}{4^n}$ ①，$\frac{1}{4}S_n=\frac{1}{4^2}+\frac{2}{4^3}+\cdots+\frac{n}{4^{n+1}}$ ②，①－②，得$\frac{3}{4}S_n=\frac{1}{4^1}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{4^n}-\frac{n}{4^{n+1}}=\frac{\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)}{\frac{3}{4}}-\frac{n}{4^{n+1}}$，所以 $S_n=\frac{4}{9}-\frac{3n+4}{9\cdot4^n}$.

10.【答案】$-1\ 010$

【解析】由 $b_n=(n+1)\cos\frac{(n+1)\pi}{2}$，可得数列$\{b_n\}$的前 2 018 项和为$(b_1+b_2+b_3+b_4)+\cdots+(b_{2\ 013}+b_{2\ 014}+b_{2\ 015}+b_{2\ 016})+b_{2\ 017}+b_{2\ 018}=504\times2-2\ 018+0=-1\ 010$.

11.【答案】$\frac{2\ 019}{1\ 010}$

【解析】令 $m=1$，则 $a_{n+1}=a_1+a_n+n$，又 $a_1=1$，所以 $a_{n+1}=a_n+n+1$，即 $a_{n+1}-a_n=n+1$，所以 $a_2-a_1=2,a_3-a_2=3,\cdots,a_n-a_{n-1}=n(n\geqslant2)$，把以上 $n-1$ 个式子相加，得 $a_n-a_1=2+3+\cdots+n$，所以 $a_n=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$，当 $n=1$ 时，上式也成立，所以$a_n=\frac{n(n+1)}{2}$，所以$\frac{1}{a_n}=\frac{2}{n(n+1)}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$，所以$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots\frac{1}{a_{2\ 019}}=2\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2\ 019}-\frac{1}{2\ 020}\right)\right]=2\left(1-\frac{1}{2\ 020}\right)=\frac{2\ 019}{1\ 010}$.

12.【答案】10

【解析】因为对任意的正整数 n，都有$\frac{2^n}{(2^n-1)(2^{n+1}-1)}=\frac{1}{2^n-1}-\frac{1}{2^{n+1}-1}$，所以$\left\{\frac{2^n}{(2^n-1)(2^{n+1}-1)}\right\}$的前 k 项和为

$\frac{2^1}{(2^1-1)(2^2-1)}+\frac{2^2}{(2^2-1)(2^3-1)}+\cdots+\frac{2^k}{(2^k-1)(2^{k+1}-1)}$

$=\frac{1}{2^1-1}-\frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{2^2-1}-\frac{1}{2^3-1}+\cdots+\frac{1}{2^k-1}-\frac{1}{2^{k+1}-1}$

$=1-\frac{1}{2^{k+1}-1}$，

则 $1-\frac{1}{2^{k+1}-1}\geqslant\frac{2\ 017}{2\ 018}$，即 $2^{k+1}-1\geqslant2\ 018$，解得 $k\geqslant10$，因此 k 的最小值为 10.

13.【解答】(1) 设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d，由题意得

$d=\frac{a_4-a_1}{3}=\frac{12-3}{3}=3$，所以 $a_n=a_1+(n-1)d=3n$.

设等比数列$\{b_n-a_n\}$的公比为 q，则

$q^3=\frac{b_4-a_4}{b_1-a_1}=\frac{20-12}{4-3}=8$，所以 $q=2$，

所以 $b_n-a_n=(b_1-a_1)q^{n-1}=2^{n-1}$，所以 $b_n=3n+2^{n-1}$.

(2) 由(1)知 $b_n=3n+2^{n-1}$，

因为数列$\{a_n\}$的前 n 项和为$\frac{3}{2}n(n+1)$，

数列$\{2^{n-1}\}$的前 n 项和为 $1\times\frac{1-2^n}{1-2}=2^n-1$，

所以数列$\{b_n\}$的前 n 项和为 $S_n=\frac{3}{2}n(n+1)+2^n-1$.

14.【解答】（1）由题意知，当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=6n+5$.

当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=11$，符合上式，

所以 $a_n=6n+5$.

设等差数列 $\{b_n\}$ 的公差为 d，

由 $\begin{cases}a_1=b_1+b_2,\\a_2=b_2+b_3,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}11=2b_1+d,\\17=2b_1+3d,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}b_1=4,\\d=3,\end{cases}$ 所以 $b_n=3n+1$.

（2）由（1）知 $c_n=\dfrac{(6n+6)^{n+1}}{(3n+3)^n}=3(n+1)\cdot 2^{n+1}$.

又 $T_n=c_1+c_2+\cdots+c_n$，

得 $T_n=3\times[2\times 2^2+3\times 2^3+\cdots+(n+1)\times 2^{n+1}]$，

则 $2T_n=3\times[2\times 2^3+3\times 2^4+\cdots+(n+1)\times 2^{n+2}]$，

两式作差，得

$-T_n=3\times[2\times 2^2+2^3+2^4+\cdots+2^{n+1}-(n+1)\times 2^{n+2}]$

$=3\times\left[4+\dfrac{4(1-2^n)}{1-2}-(n+1)\times 2^{n+2}\right]=-3n\cdot 2^{n+2}$，

所以 $T_n=3n\cdot 2^{n+2}$.

1. 解·设$M=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & b \\ 2c & 2d \end{bmatrix}$，

$\begin{bmatrix} a & b \\ 2c & 2d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & -b \\ 2c & -2d \end{bmatrix}$，

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & -b \\ 2c & -2d \end{bmatrix}$，

$\therefore \begin{cases} a=1, \\ 2=-b, \\ 3-2c, \\ 4=-2d \end{cases}$ 解得$\begin{cases} a=1, \\ b=-2, \\ c=\frac{3}{2}, \\ d--2, \end{cases}$

$\therefore M=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ \frac{3}{2} & -2 \end{bmatrix}$.

2. 解：∵ 直线 l 的极坐标方程为$\theta=\frac{\pi}{3}(\rho\in \mathbf{R})$，

∴ 直线 l 的普通方程为 $y=\sqrt{3}x$.

又曲线 C 的参数方程为$\begin{cases} x=2\cos\alpha, \\ y=1+\cos 2\alpha \end{cases}$（$\alpha$ 为参数），

∴ 曲线 C 的直角坐标方程为 $y=\frac{1}{2}x^2$（$x\in[-2,2]$）.

联立解方程组得$\begin{cases} x=0, \\ y=0 \end{cases}$ 或$\begin{cases} x=2\sqrt{3}, \\ y=6. \end{cases}$

根据 x 的取值范围应舍去$\begin{cases} x=2\sqrt{3}, \\ y=6, \end{cases}$

故点 P 的直角坐标为(0,0).

3. 解：(1)从 9 个不同的元素中任取 3 个不同元素，其基本事件总数为 $n=C_9^3$.

记“a,b,c 中任意两数之差的绝对值均不小于 2”为事件 A.

由题意，得 a,b,c 均不相邻，可采用插空法.

假设有 6 个元素排成一列，则 6 个元素之间和两端共有 7 个空位，现另取 3 个元素插入空位，共有 C_7^3 种插法，然后将这 9 个元素从左到右编号，依次为 1,2,3,…,9，则插入的这 3 个元素中任意两者编号之差的绝对值均不小于 2，

∴ 事件 A 包含的基本事件数 $m=C_7^3$，

$\therefore P(A)=\frac{C_7^3}{C_9^3}=\frac{5}{12}$，

∴ a,b,c 中任意两数之差的绝对值均不小于 2 的概率为$\frac{5}{12}$.

(2)ξ的所有可能取值为 0,1,2，

$P(\xi=0)=\frac{5}{12}$，

$P(\xi=1)=\frac{42}{C_9^3}=\frac{1}{2}$，

$P(\xi=2)=\frac{C_7^1}{C_9^3}=\frac{1}{12}$.

∴ ξ 的分布列为

ξ	0	1	2
P	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}$

$E(\xi)=0\times\frac{5}{12}+1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{12}=\frac{2}{3}$.

4. 解：(1)由已知 $f(1)=S_2=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$，$f(2)=S_4-S_1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{13}{12}$，$f(3)=S_6-S_2=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=\frac{19}{20}$.

(2)由(1)知 $f(1)>1$，$f(2)>1$；下面用数学归纳法证明：当 $n\geqslant 3$ 时，$f(n)<1$.

①由(1)知当 $n=3$ 时，$f(n)<1$；

②假设 $n=k(k\geqslant 3)$时，$f(k)<1$，即 $f(k)=\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\cdots+\frac{1}{2k}<1$，那么

$$f(k+1)=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}$$

$$=\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{2k}\right)+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}-\frac{1}{k}$$

$$<1+\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k}\right)+\left(\frac{1}{2k+2}-\frac{1}{2k}\right)$$

$$=1+\frac{2k-(2k+1)}{2k(2k+1)}+\frac{2k-(2k+2)}{2k(2k+2)}$$

$$=1-\frac{1}{2k(2k+1)}-\frac{1}{k(2k+2)}<1,$$

∴ 当 $n=k+1$ 时，$f(n)<1$ 也成立.

由①和②知，当 $n\geqslant 3$ 时，$f(n)<1$.

∴ 当 $n=1$ 和 $n=2$ 时，$f(n)>1$；当 $n\geqslant 3$ 时，$f(n)<1$.