

江苏省仪征中学 2019-2020 学年第一学期高三数学
中档大题训练 (9) 11.29

班级 _____

姓名 _____

1. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $\frac{\sqrt{3}a}{c} = \frac{2 - \cos A}{\sin C}$.

(1) 求角 A 的大小;

(2) 若 $\cos(B + \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{4}$, 求 $\cos C$ 的值.

2. 设椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 点 O 为坐标原点 , 点 A 的坐标为 $(a, 0)$, 点 B 的坐标为

$(0, b)$, 点 M 在线段 AB 上 , 满足 $|BM| = 2|MA|$, 直线 OM 的斜率为 $\frac{\sqrt{5}}{10}$.

(I) 求 E 的离心率 e ;

(II) 设点 C 坐标为 $(0, -b)$, N 为线段 AC 的中点 , 点 N 关于直线 AB 的对称点的纵坐标为 $\frac{7}{2}$, 求 E 的方程.

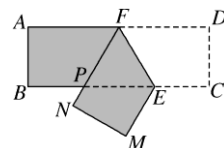
3. 已知 $\{a_n\}$ 是公差不为 0 的等差数列, $a_5=6$, a_1, a_3, a_7 成等比数列.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n = \frac{a_n}{2^n}$, T_n 为数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和, 求 T_n ;

(3) 设 $c_n = 4^n + (-1)^{n-1} \lambda \cdot 2^{a_n}$ (λ 为整数, $n \in \mathbb{N}^*$), 试确定整数 λ 的值, 使得对任意的 $n \in \mathbb{N}^*$, 总有 $c_{n+1} > c_n$ 成立.

4. 如图，某机械厂要将长 6 m，宽 2 m 的长方形铁皮 ABCD 进行裁剪．已知点 F 为 AD 的中点，点 E 在边 BC 上，裁剪时先将四边形 CDFE 沿直线 EF 翻折到 MNFE 处(点 C，D 分别落在直线 BC 下方点 M，N 处，FN 交边 BC 于点 P)，再沿直线 PE 裁剪．



(1) 当 $\angle EFP = \frac{\pi}{4}$ 时，试判断四边形 MNPE 的形状，并求其面积；

(2) 若使裁剪得到的四边形 MNPE 面积最大，请给出裁剪方案，并说明理由．

江苏省仪征中学 2019-2020 学年第一学期高三数学 中档大题训练 (9) 答案 11.29

1、

解: (1) 由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$, 且 $\frac{\sqrt{3}a}{c} = \frac{2 - \cos A}{\sin C}$,1 分

得 $\frac{\sqrt{3} \sin A}{\sin C} = \frac{2 - \cos A}{\sin C}$,2 分

则有 $\sqrt{3} \sin A = 2 - \cos A$, 即 $\sqrt{3} \sin A + \cos A = 2$, $2 \sin(A + \frac{\pi}{6}) = 2$,

则 $\sin(A + \frac{\pi}{6}) = 1$,4 分

因为 $A \in (0, \pi)$, 则 $A + \frac{\pi}{6} \in (\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6})$, 则 $A + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$, 即 $A = \frac{\pi}{3}$6 分

(2) 在 $\triangle ABC$ 中, 因为 $A = \frac{\pi}{3}$, 则 $B \in (0, \frac{2\pi}{3})$, $B + \frac{\pi}{6} \in (\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6})$, 则 $\sin(B + \frac{\pi}{6}) > 0$.

又因为 $\cos(B + \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{4}$, 则 $\sin(B + \frac{\pi}{6}) = \sqrt{1 - \cos^2(B + \frac{\pi}{6})} = \frac{\sqrt{15}}{4}$8 分

又在 $\triangle ABC$ 中, $A + B + C = \pi$,9 分

所以 $\cos C = \cos(\pi - A - B) = -\cos(A + B) = -\cos(B + \frac{\pi}{3})$ 10 分

$$= -\cos[(B + \frac{\pi}{6}) + \frac{\pi}{6}] = -\cos(B + \frac{\pi}{6})\cos\frac{\pi}{6} + \sin(B + \frac{\pi}{6})\sin\frac{\pi}{6}$$
$$= -\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{\sqrt{15} - \sqrt{3}}{8}$$
14 分

2、(I) 由题设条件知, 点 M 的坐标为 $(\frac{2}{3}a, \frac{1}{3}b)$, 又 $k_{OM} = \frac{\sqrt{5}}{10}$, 从而 $\frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{5}}{10}$, 进而得

$a = \sqrt{5}b, c = \sqrt{a^2 - b^2} = 2b$, 故 $e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

(II) 由题设条件和 (I) 的计算结果可得, 直线 AB 的方程为 $\frac{x}{\sqrt{5}b} + \frac{y}{b} = 1$, 点 N 的坐标

为 $(\frac{\sqrt{5}}{2}b, -\frac{1}{2}b)$, 设点 N 关于直线 AB 的对称点 S 的坐标为 $(x_1, \frac{7}{2})$, 则线段 NS 的中点 T 的

坐标为 $(\frac{\sqrt{5}}{4}b + \frac{x_1}{2}, -\frac{1}{4}b + \frac{7}{4})$. 又点 T 在直线 AB 上, 且 $k_{NS} \cdot k_{AB} = -1$, 从而有

$$\begin{cases} \frac{\frac{\sqrt{5}}{4}b + \frac{x_1}{2}}{\sqrt{5}b} + \frac{-\frac{1}{4}b + \frac{7}{4}}{b} = 1 \\ \frac{\frac{7}{2} + \frac{1}{2}b}{x_1 - \frac{\sqrt{5}b}{2}} = \sqrt{5} \end{cases} \quad \text{解得 } b = 3, \text{ 所以 } a = 3\sqrt{5}, \text{ 故椭圆 } E \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{45} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

3、解析 (1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $d (d \neq 0)$.

$\because a_1, a_3, a_7$ 成等比数列, $\therefore a_1(a_1 + 6d) = (a_1 + 2d)^2, \therefore 2a_1d = 4d^2, \because d \neq 0, \therefore a_1 = 2d,$

又 $a_5 = a_1 + 4d = 6, \therefore d = 1, a_1 = 2, \therefore a_n = 2 + (n-1) \times 1 = n + 1.$

$$(2) b_n = \frac{a_n}{2^n} = \frac{n+1}{2^n}, T_n = \frac{2}{2^1} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \dots + \frac{n+1}{2^n},$$

$$\frac{1}{2}T_n = \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{n}{2^n} + \frac{n+1}{2^{n+1}},$$

$$\therefore \frac{1}{2}T_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} - \frac{n+1}{2^{n+1}} = 1 + \frac{\frac{1}{4}(1 - \frac{1}{2^{n-1}})}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{n+1}{2^{n+1}} = \frac{3}{2} - \frac{n+3}{2^{n+1}},$$

$$\therefore T_n = 3 - \frac{n+3}{2^n}.$$

(3) $c_n = 4^n + (-1)^{n-1} \lambda \cdot 2^{n+1}, c_{n+1} = 4^{n+1} + (-1)^n \lambda \cdot 2^{n+2}$, 对任意的 $n \in \mathbb{N}^*$, 要 $c_{n+1} > c_n$ 恒成立, 则

① 当 n 为偶数时, $4^{n+1} + \lambda \cdot 2^{n+2} > 4^n - \lambda \cdot 2^{n+1}, \therefore 3\lambda \cdot 2^{n+1} > -3 \cdot 4^n, \therefore \lambda > -2^{n-1} (n=2, 4, 6, \dots).$

$\because n$ 为偶数, $\therefore$ 当 $n=2$ 时, $(-2^{n-1})_{\max} = -2, \therefore \lambda > -2;$

② 当 n 为奇数时, $4^{n+1} - \lambda \cdot 2^{n+2} > 4^n + \lambda \cdot 2^{n+1}, \therefore 3\lambda \cdot 2^{n+1} < 3 \cdot 4^n, \therefore \lambda < 2^{n-1} (n=1, 3, 5, \dots).$

$\because n$ 为奇数, $\therefore$ 当 $n=1$ 时, $(2^{n-1})_{\min} = 1, \therefore \lambda < 1.$

由①②得 $-2 < \lambda < 1, \because \lambda$ 为整数, $\therefore \lambda = -1$ 或 $0.$

4、解：(1)当 $\angle EFP = \frac{\pi}{4}$ 时，由条件得 $\angle EFP = \angle EFD = \angle FEP = \frac{\pi}{4}$ ，

所以 $\angle FPE = \frac{\pi}{2}$ ，即 $FN \perp BC$ ，

所以四边形 MNPE 为矩形，此时 $PN = FN - PF = 3 - 2 = 1$ (m)，所以四边形 MNPE 的面积

$$S = PN \cdot MN = 2(\text{m}^2).$$

(2)法一：设 $\angle EFD = \theta \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ ，

由条件，知 $\angle EFP = \angle EFD = \angle FEP = \theta$ 。

$$\text{所以 } PF = \frac{2}{\sin \pi - 2\theta} = \frac{2}{\sin 2\theta},$$

$$NP = NF - PF = 3 - \frac{2}{\sin 2\theta}, \quad ME = 3 - \frac{2}{\tan \theta}.$$

$$\text{由 } \begin{cases} 3 - \frac{2}{\sin 2\theta} > 0, \\ 3 - \frac{2}{\tan \theta} > 0, \\ 0 < \theta < \frac{\pi}{2}, \end{cases} \quad \text{得 } \begin{cases} \sin 2\theta > \frac{2}{3}, \\ \tan \theta > \frac{2}{3}, \\ 0 < \theta < \frac{\pi}{2}. \end{cases} \quad *$$

所以四边形 MNPE 面积为 $S = \frac{1}{2}(NP + ME)MN$

$$= \frac{1}{2} \left[3 - \frac{2}{\sin 2\theta} + \left(3 - \frac{2}{\tan \theta} \right) \right] \times 2 = 6 - \frac{2}{\tan \theta} - \frac{2}{\sin 2\theta}$$

$$= 6 - \frac{2}{\tan \theta} - \frac{2}{2 \sin \theta \cos \theta} = 6 - \left(\tan \theta + \frac{3}{\tan \theta} \right)$$

$$\leq 6 - 2 \sqrt{\tan \theta \cdot \frac{3}{\tan \theta}} = 6 - 2\sqrt{3}.$$

当且仅当 $\tan \theta = \frac{3}{\tan \theta}$ ，即 $\tan \theta = \sqrt{3}$ ， $\theta = \frac{\pi}{3}$ 时取“=”。

此时，(*)成立。

答：当 $\angle EFD = \frac{\pi}{3}$ 时，沿直线 PE 裁剪，四边形 MNPE 的面积最大，最大值为 $(6 - 2\sqrt{3})$

m2.

法二：设 $BE = t$ m, $3 < t < 6$ ，则 $ME = 6 - t$.

因为 $\angle EFP = \angle EFD = \angle FEP$ ，

所以 $PE = PF$ ，即 $\sqrt{3 - BP^2 + 22} = t - BP$.

$$\text{所以 } BP = \frac{13 - t^2}{2 \cdot 3 - t},$$

$$NP = 3 - PF = 3 - PE = 3 - (t - BP) = 3 - t + \frac{13 - t^2}{2 \cdot 3 - t}.$$

$$\text{由 } \begin{cases} 3 < t < 6, \\ \frac{13 - t^2}{2 \cdot 3 - t} > 0, \\ 3 - t + \frac{13 - t^2}{2 \cdot 3 - t} > 0, \end{cases} \quad \text{得 } \begin{cases} 3 < t < 6, \\ t > \sqrt{13}, \\ t^2 - 12t + 31 < 0. \end{cases} \quad *$$

所以四边形 MNPE 面积为

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}(NP + ME)MN \\ &= \frac{1}{2} \left[3 - t + \frac{13 - t^2}{2 \cdot 3 - t} + 6 - t \right] \times 2 = \frac{3t^2 - 30t + 67}{2 \cdot 3 - t} \\ &= 6 - \left[\frac{3}{2}t - 3 + \frac{2}{t - 3} \right] \leq 6 - 2\sqrt{3}. \end{aligned}$$

当且仅当 $\frac{3}{2}(t - 3) = \frac{2}{t - 3}$ ，即 $t = 3 + \sqrt{\frac{4}{3}} = 3 + \frac{2\sqrt{3}}{3}$ 时取“=”. 此时，(*)成立.

答：当点 E 距 B 点 $3 + \frac{2\sqrt{3}}{3}$ m 时，沿直线 PE 裁剪，四边形 MNPE 的面积最大，最大值

为 $(6 - 2\sqrt{3})$ m2.