

2021 年上海市夏季高考数学试卷

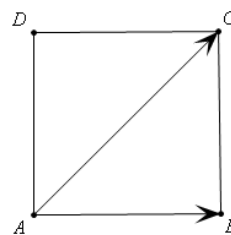
一、填空题（本大题共 12 题，满分 54 分，第 1~6 题每题 4 分，第 7~12 题每题 5 分）

1、已知 $z_1 = 1 + i, z_2 = 2 + 3i$ （其中 i 为虚数单位），则 $z_1 + z_2 =$ _____.

2、已知 $A = \{x | 2x \leq 1\}, B = \{-1, 0, 1\}$ ，则 $A \cap B =$ _____

3、若 $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$ ，则圆心坐标为 _____

4、如图边长为 3 的正方形 $ABCD$ ，则 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} =$ _____



5、已知 $f(x) = \frac{3}{x} + 2$ ，则 $f^{-1}(1) =$ _____

6、已知二项式 $(x+a)^5$ 的展开式中， x^2 的系数为 80，则 $a =$ _____.

7、已知 $\begin{cases} x \leq 3 \\ 2x - y - 2 \geq 0 \\ 3x + y - 8 \geq 0 \end{cases}$ ，目标函数 $z = x - y$ ，则 z 的最大值为 _____

8、已知无穷递缩等比数列 $a_1 = 3, b_n = a_{2n}, \{a_n\}$ 的各项和为 9，则数列 $\{b_n\}$ 的各项和为 _____

9、在圆柱底面半径为 1，高为 2， AB 为上底底面的直径，点 C 是下底底面圆弧上的一个动点，点 C 绕着下底底面旋转一周，则 $\triangle ABC$ 面积的范围 _____

10、甲、乙两人在花博会的 A、B、C、D 不同展馆中各选 2 个去参观，则两人选择中恰有一个馆相同的概率为 _____.

11、已知抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ ，若第一象限的点 A, B 在抛物线上，抛物线焦点为 F ，
 $|AF| = 2, |BF| = 4, |AB| = 3$ ，则直线 AB 的斜率为 _____

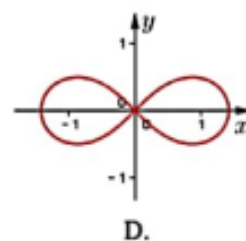
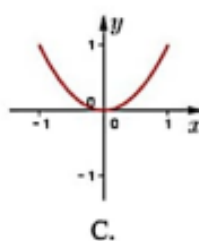
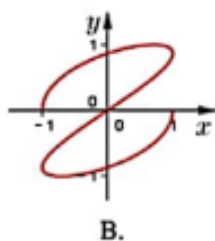
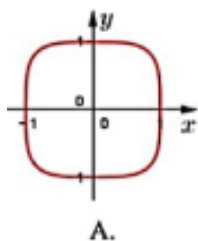
12、已知 $a_i \in \mathbb{N}^* (i = 1, 2, \dots, 9)$ ，且对任意 $k \in \mathbb{N}^* (2 \leq k \leq 8)$ 都有 $a_k = a_{k-1} + 1$ 或 $a_k = a_{k+1} - 1$ 中有且仅有一个成立， $a_1 = 6, a_9 = 9$ ，则 $a_1 + \dots + a_9$ 的最小值为 _____.

二、选择题（本大题共有 4 题，每题 5 分，满分 20 分）

13、以下哪个函数既是奇函数，又是减函数（ ）

- A. $f(x) = -3x$ B. $f(x) = x^3$ C. $f(x) = \log_3 x$ D. $f(x) = 3^x$

14、已知参数方程 $\begin{cases} x = 3t - 4t^3 \\ y = 2t + \sqrt{1-t^2} \end{cases} (t \in [-1, 1])$ ，以下哪个图像是该方程的图像（ ）



15、已知 $f(x) = 3\sin x + 2$ ，对于任意的 $x_2 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ，都存在 $x_1 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ，使得

$f(x_1) + 2f(x_2 + \theta) = 3$ 成立，则下列选项中， θ 可能的值是（ ）

- A. $\frac{3\pi}{5}$ B. $\frac{4\pi}{5}$ C. $\frac{6\pi}{5}$ D. $\frac{7\pi}{5}$

16、已知两两不同的 $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$ 满足 $x_1 + y_1 = x_2 + y_2 = x_3 + y_3$ ，

且 $x_1 < y_1, x_2 < y_2, x_3 < y_3, x_1y_1 + x_3y_3 = 2x_2y_2 > 0$, 则下列选项中恒成立的是 ()

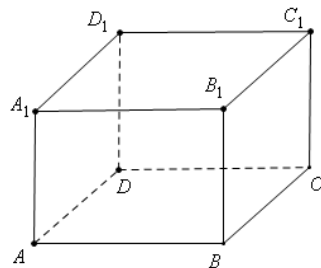
- A. $2x_2 < x_1 + x_3$ B. $2x_2 > x_1 + x_3$ C. $x_2^2 < x_1x_3$ D. $x_2^2 > x_1x_3$

三、解答题 (本大题共有 5 题, 满分 14+14+14+16+18=76 分, 解答下列各题必须写出必要的步骤)

17、如图, 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=BC=2, AA_1=3$

(1) 若 P 是边 A_1D_1 的动点, 求三棱锥 $P-ADC$ 的体积;

(2) 求 AB_1 与平面 ACC_1A_1 所成的角的大小.



18、在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $a=3, b=2c$

(1) 若 $\angle A = \frac{2\pi}{3}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积; (2) 若 $2\sin B - \sin C = 1$, 求 $\triangle ABC$

的周长.

19. 已知某企业今年 (2021 年) 第一季度的营业额为 1.1 亿元, 以后每个季度 (一年有四个季度) 营业额都比前一季度多 0.05 亿元, 该企业第一季度是利润为 0.16 亿元, 以后每一季度的利润都比前一季度增长 4%.

(1) 求 2021 第一季度起 20 季度的营业额总和;

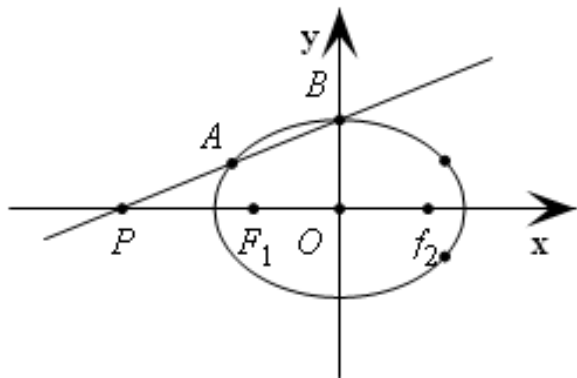
(2) 问哪一年哪个季度的利润首次超过该季度营业额的 18%?

20、已知 $\Gamma: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$, F_1, F_2 是其左右焦点, $P(m, 0) (m < -\sqrt{2})$, 直线 l 过点 P 交 Γ 于 A, B 两点, 且 A 在线段 BP 上.

(1) 若 B 是上顶点, $|\overrightarrow{BF_1}| = |\overrightarrow{PF_1}|$, 求 m 的值;

(2) 若 $\overrightarrow{F_1A} \cdot \overrightarrow{F_2A} = \frac{1}{3}$, 且原点 O 到直线 l 的距离为 $\frac{4\sqrt{15}}{15}$, 求直线 l 的方程;

(3) 证明: 证明: 对于任意 $m < -\sqrt{2}$, 总存在唯一一条直线使得 $\overrightarrow{F_1A} \parallel \overrightarrow{F_2B}$.



21、如果对任意 $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ 使得 $x_1 - x_2 \in S$ 都有 $f(x_1) - f(x_2) \in S$, 则称 $f(x)$ 是 S 关联的.

(1) 判断并证明 $f(x) = 2x - 1$ 是否是 $[0, +\infty)$ 关联? 是否是 $[0, 1]$ 关联?

(2) $f(x)$ 是 $\{3\}$ 关联的, 在 $[0, 3)$ 上有 $f(x) = x^2 - 2x$, 解不等式 $2 \leq f(x) \leq 3$;

(3) " $f(x)$ 是 $\{1\}$ 关联的, 且是 $[0, +\infty)$ 关联" 当且仅当 " $f(x)$ 是 $[1, 2]$ 关联的".

2021 年上海市夏季高考数学试卷

参考答案与试题解析

一、填空题 (本大题共 12 题, 满分 54 分, 第 1~6 题每题 4 分, 第 7~12 题每题 5 分)

1. 已知 $z_1 = 1 + i, z_2 = 2 + 3i$ (其中 i 为虚数单位), 则 $z_1 + z_2 =$ _____.

【思路分析】复数实部和虚部分别相加

【解析】: $z_1 + z_2 = 3 + 4i$

【归纳总结】本题主要考查了复数的加法运算, 属于基础题.

2. 已知 $A = \{x | 2x \leq 1\}, B = \{-1, 0, 1\}$, 则 $A \cap B =$ _____

【思路分析】求出集合 A , 再求出 $A \cap B$

【解析】: $A = \{x | 2x \leq 1\} = \left\{x \mid x \leq \frac{1}{2}\right\}$, 所以 $A \cap B = \{-1, 0\}$

【归纳总结】本题主要考查了集合的交集运算, 属于基础题.

3. 若 $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$, 则圆心坐标为 _____

【思路分析】将圆一般方程化为标准方程, 直接读取圆心坐标

【解析】: $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$ 可以化为 $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 5$ 所以圆心为 $(1, 2)$

【归纳总结】本题主要考查了圆的方程, 属于基础题.

4. 如图边长为 3 的正方形 $ABCD$, 则 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} =$ _____

【思路分析】利用向量投影转化到边上.

【解析】方法一: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}|^2 = 9$

方法二: 由已知 $|\overrightarrow{AB}| = 3, |\overrightarrow{AC}| = 3\sqrt{2}, \angle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} = \frac{\pi}{4}$,

$$\text{则 } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3 \times 3\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 9;$$

【归纳总结】本题考查了平面向量的数量积的定义、正方形的几何性质; 基础题;

5. 已知 $f(x) = \frac{3}{x} + 2$, 则 $f^{-1}(1) =$ _____

【思路分析】利用反函数定义求解.

【解析】由题意, 得原函数的定义域为: $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 结合反函数的定义, 得 $1 = \frac{3}{x} + 2$,

解得 $x = -3$, 所以, $f^{-1}(1) = -3$;

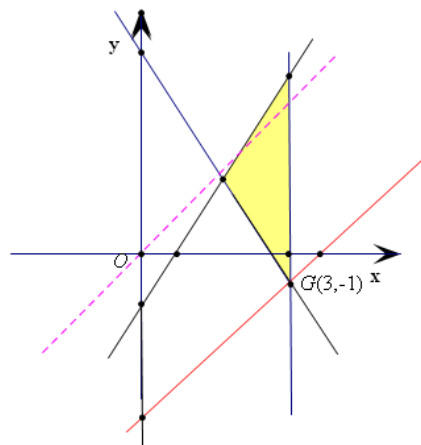
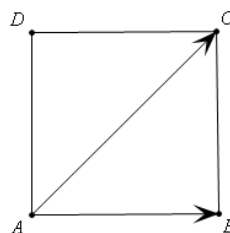
【归纳总结】本题主要考查了反函数的定义的应用, 属于基础题.

6. 已知二项式 $(x+a)^5$ 的展开式中, x^2 的系数为 80, 则 $a =$ _____.

【思路分析】利用二项式展开式通项公式求解.

【解析】 $T_{r+1} = C_5^r a^r x^{5-r} \Rightarrow r = 3, C_5^3 a^3 = 80, a = 2$

【归纳总结】本题考查了二项式定理的通项公式、组合数公式与指数幂运算; 基础题.



7、已知 $\begin{cases} x \leq 3 \\ 2x - y - 2 \geq 0 \\ 3x + y - 8 \geq 0 \end{cases}$, 目标函数 $z = x - y$, 则 z 的最大值为 _____

【思路分析】作出不等式表示的平面区域, 根据 z 的几何意义求最值.

【解析】如图, 可行域的三个顶点为: $(3, 4)$ 、 $(2, 2)$ 、 $(3, -1)$, 结合直线方程与 z 的几何意义, 得 $x = 3$, $y = -1$, 则 $z_{\text{最大值}} = 4$;

当 $x = 3, y = -1, z_{\text{max}} = 4$

【归纳总结】本题主要考查线性规划的规范、准确作图与直线方程中“参数”的几何意义与数形结合思想;

8、已知无穷递缩等比数列 $a_1 = 3, b_n = a_{2n}, \{a_n\}$ 的各项和为 9, 则数列 $\{b_n\}$ 的各项和为 _____

【思路分析】利用无穷递缩等比数列求和公式建立方程求出公比, 再得到 b_n 通项公式, 根据特点求和.

【解析】 $S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{3}{1-q} = 9 \Rightarrow q = \frac{2}{3}$,

$$b_n = a_{2n} = a_1 \times q^{2n-1} = 3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{2n-1} \Rightarrow b_1 = 2, q_0 = \frac{4}{9} \Rightarrow S_b = \frac{b_1}{1-q_0} = \frac{2}{1-\frac{4}{9}} = \frac{18}{5}$$

【归纳总结】本题考查了数列的基本问题: 等比数列与无穷递缩等比数列的各项和的概念与公式; 同时考查了学生的数学阅读与计算能力.

9、在圆柱底面半径为 1, 高为 2, AB 为上底底面的直径, 点 C 是下底底面圆弧上的一个动点, 点 C 绕着下底底面旋转一周, 则 $\triangle ABC$ 面积的范围 _____

【思路分析】注意几何题设与几何性质选择求 $\triangle ABC$ 面积的方法;

【解析】由题意, 当点 C 在下底底面圆弧上的运动时, $\triangle ABC$ 的底边 $AB = 2$, 所以, $\triangle ABC$ 面积的取值与高 C_2O_1 相关;

当 $C_2O \perp A_1C_1$ 时, C_2O_1 最大为: $C_2O_1 = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$, $\triangle ABC$ 面积的最大值为: $\frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{5} = \sqrt{5}$;

当 $AB \perp BC_1$ 时, C_2O_1 最小为: $BC_1 = 2$, $\triangle ABC$ 面积的最大值为: $\frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2$;

所以, $\triangle ABC$ 面积的取值范围为: $[2, \sqrt{5}]$;

【归纳总结】本题主要考查了圆柱的几何性质, 简单的数学建模 (选择求三角形面积的方案), 等价转化思想.

10. 甲、乙两人在花博会的 A、B、C、D 不同展馆中各选 2 个去参观, 则两人选择中恰有一个馆相同的概率为 _____.

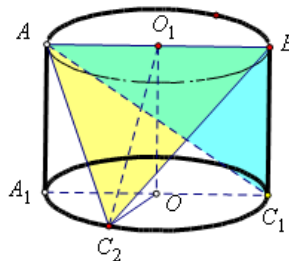
【思路分析】注意“阅读, 理解”, 等价为“两个”排列组合题;

【解析】由题意 A、B、C、D 四个不同的场馆, 每人可选择的参观方法有: C_4^2 种, 则甲、乙两个人每人选 2 个场馆的参观方法有: $C_4^2 \cdot C_4^2$ 种;

由此, 甲、乙两人恰好参观同一个场馆的参观方法有: $C_4^1 \cdot C_3^1 \cdot C_2^1$ 种;

(或等价方法 1: 甲、乙两人恰好参观同一个场馆的参观方法有: $C_4^1 \cdot P_3^2$ 种);

(或等价方法 2【补集法】: 甲、乙两人参观两个不同一个场馆的参观方法有: $C_4^2 \cdot C_2^2$ 种;



甲、乙两人参观两个相同场馆的参观方法有： C_4^2 种；

所以，甲、乙两人恰好参观同一个场馆的参观方法有： $1 - C_4^2 \cdot C_2^2 - C_4^2$ 种）；

所以，甲、乙两人恰好参观同一个场馆的概率为： $p = \frac{C_4^1 \cdot C_3^1 C_2^1}{C_4^2 \cdot C_4^2} = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$ ；

【归纳总结】本题主要考查考生的“数学阅读理解”，然后将古典概型问题等价转化为：两个排列、组合题解之；有点“区分度”；

11、已知抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ ，若第一象限的点 A 、 B 在抛物线上，抛物线焦点为 F ，

$|AF| = 2, |BF| = 4, |AB| = 3$ ，则直线 AB 的斜率为_____

【思路分析】注意理解与应用抛物线的定义以及直线斜率公式的特征；

【解析】方法一：如图，设 $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ ，再由抛物线的定义结合题

设得 $|AF| = x_1 + \frac{p}{2} = 2$ ， $|BF| = x_2 + \frac{p}{2} = 4$ ，则 $x_2 - x_1 = 2$ ，

又 $|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = 3$ ，解得 $y_2 - y_1 = \sqrt{5}$ ，

则直线 AB 的斜率为： $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ ；

方法二：过 A 、 B 分别向准线引垂线，垂足为 A_1 、 B_1 ，

直线 AB 与 x 轴的交点为 P ，

由抛物线定义，得 $AA_1 = 2$ ， $BB_1 = 4$ ， $AH \perp BB_1$ 于 H ，

则 $BN = BB_1 - HB_1 = BB_1 - AA_1 = 2$ ，又由已知 $|AB| = 3$ ，则 $|AH| = \sqrt{5}$ ，

结合平面几何中，“内错角相等”，所以，直线 AB 的斜率为： $\tan \angle BPF = \tan \angle ABH = \frac{\sqrt{5}}{2}$ ）

方法三：：结合本题是填空题的特点，数形结合并利用“二级结论”，弦长公式 $\sqrt{1+k^2} |x_2 - x_1| = 3$ ，

即 $\sqrt{1+k^2} \times 2 = 3$ ，解得 $k = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$ ，结合题设与图像 $k > 0$ ，所以 $k = \frac{\sqrt{5}}{2}$ ）

【归纳总结】本题主要考查直线与圆锥曲线的位置关系，属于解析几何的基本计算，甚至都不需要利用几何关系。定义、弦长、斜率都是解析几何的基本概念与公式；而用好抛物线的定义、数形结合与平面几何的性质，则可减少计算量；考查了学生直观想象核心素养，通过几何意义容易求出斜率来；

12. 已知 $a_i \in \mathbb{N}^* (i = 1, 2, \dots, 9)$ ，且对任意 $k \in \mathbb{N}^* (2 \leq k \leq 8)$ 都有 $a_k = a_{k-1} + 1$ 或 $a_k = a_{k-1} - 1$ 中有且仅有一个成立， $a_1 = 6$ ， $a_9 = 9$ ，则 $a_1 + \dots + a_9$ 的最小值为_____。

【思路分析】注意阅读与等价转化题设中的递推关系；

【答案】31；

【解析】方法一：由题设，知： $a_i \geq 1$ ；

$a_2 = a_1 + 1$ 或 $a_2 = a_1 - 1$ 中恰有一个成立；

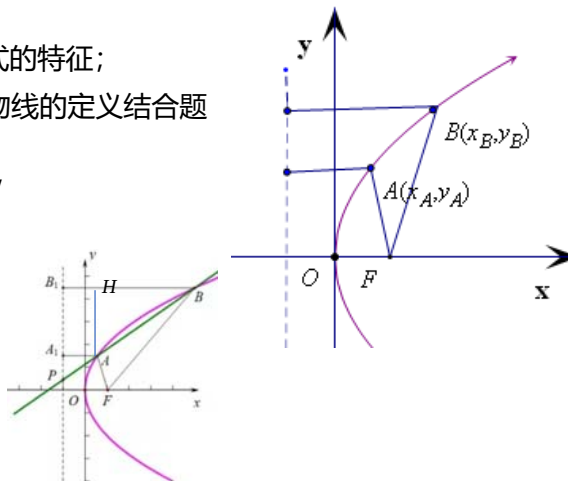
$a_3 = a_2 + 1$ 或 $a_3 = a_2 - 1$ 中恰有一个成立；

...

$a_8 = a_7 + 1$ 或 $a_8 = a_7 - 1$ 中恰有一个成立；

则① $a_2 = a_1 + 1 = 7$ ， $a_3 = a_2 - 1 = 6$ ， $a_4 = a_3 + 1 = 7$ ， $a_5 = a_4 - 1 = 6$ ， $a_6 = a_5 + 1 = 7$ ， $a_7 = a_6 - 1 = 6$ ， $a_8 = a_7 + 1 = 7$ ，

则 $a_1 + a_2 + \dots + a_9 = 25 + 2(a_3 + a_5 + a_7)$ ，当 $a_3 = a_5 = a_7 = 1$ 时， $a_1 + a_2 + \dots + a_9$ 的和为最小值为：



31;

$$\textcircled{2} a_2 = a_3 - 1, a_4 = a_5 - 1, a_6 = a_7 - 1, a_8 = a_9 - 1,$$

则 $a_1 + a_2 + \cdots + a_9 = 26 + 2(a_4 + a_6 + a_8)$, 当 $a_4 = a_6 = a_8 = 1$ 时, $a_1 + a_2 + \cdots + a_9$ 的和为最小值为: 32;

因此, $a_1 + a_2 + \cdots + a_9$ 的最小值为: 31);

方法二: : $a_2 = a_1 + 1$ 或 $a_2 = a_3 - 1$ 中恰有一个成立; 等价于: $a_2 = a_1 + 1$ 或 $a_3 = a_2 + 1$ 中恰有一个成立;

$a_3 = a_2 + 1$ 或 $a_3 = a_4 - 1$ 中恰有一个成立; 等价于: $a_3 = a_2 + 1$ 或 $a_4 = a_3 + 1$ 中恰有一个成立;

...

$a_8 = a_7 + 1$ 或 $a_8 = a_9 - 1$ 中恰有一个成立; 等价于: $a_8 = a_7 + 1$ 或 $a_9 = a_8 + 1$ 中恰有一个成立;

又要求 $a_1 + a_2 + \cdots + a_9$ 的和为最小, 所以, 希望尽量出现 1 和 2,

则有数列: 6, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 8, 9 或 6, 7, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 9;

因此, $a_1 + a_2 + \cdots + a_9$ 的最小值为: 31);

方法三: : 设 $b_k = a_{k+1} - a_k$, b_k 或 b_{k+1} 恰好只有一个为 1;

①

$$b_1 = b_3 = b_5 = b_7 = 1, a_1 = 6, a_2 = 7, a_3 \geq 1, a_4 = a_3 + 1 \geq 2, a_5 \geq 1, a_6 = a_5 + 1 \geq 2, a_7 \geq 1, a_8 = a_7 + 1 \geq 2, \\ a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 = 6 + 7 + 1 + 2 + 1 + 2 + 1 + 2 + 9 = 31$$

$$\textcircled{2} b_2 = b_4 = b_6 = b_8 = 1,$$

$$a_8 = 8, a_2 \geq 1, a_3 = a_2 + 1 \geq 2, a_4 \geq 1, a_5 = a_4 + 1 \geq 2, a_7 \geq 1, a_7 = a_6 + 1 \geq 2, \\ a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 = 6 + 1 + 2 + 1 + 2 + 1 + 2 + 8 + 9 = 32$$

$a_1 + a_2 + \cdots + a_9$ 的最小值为 31)

方法四: : 由题设, 知: $a_i \geq 1$; 由题设, 得:

$$a_2 = a_1 + 1 \quad \oplus$$

$$a_3 = a_2 + 1 \quad \otimes$$

$$a_4 = a_3 + 1 \quad \oplus$$

$$a_5 = a_4 + 1 \quad \otimes$$

$$a_6 = a_5 + 1 \quad \oplus$$

$$a_7 = a_6 + 1 \quad \otimes$$

$$a_8 = a_7 + 1 \quad \oplus$$

$$a_9 = a_8 + 1 \quad \otimes$$

再结合题设, 要使 $a_1 + a_2 + \cdots + a_9$ 的和为最小,

$$\textcircled{1} \text{考虑按 } \oplus: a_1 + a_2 + \cdots + a_9 = (a_1 + a_3 + \cdots + a_7 + a_9) + (a_2 + a_4 + a_6 + a_8) \\ = 6 + 9 + (a_3 + a_5 + a_7) + (a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + 4) = 25 + 2(a_3 + a_5 + a_7) \geq 25 + 2 \times 3 = 31$$

当且仅当 $a_3 = a_5 = a_7 = 1$ 时, 等号成立;

$$\textcircled{2} \text{考虑按 } \otimes: a_1 + a_2 + \cdots + a_9 = (a_1 + a_3 + \cdots + a_7 + a_9) + (a_2 + a_4 + a_6 + a_8) \\ = 6 + 9 + (a_3 + a_5 + a_7) + (a_1 + a_3 + a_5 + a_7 - 4) = 20 + 2(a_3 + a_5 + a_7) \\ = 20 + 2(a_2 + a_4 + a_6 + 3) = 26 + 2(a_2 + a_4 + a_6) \geq 26 + 2 \times 3 = 32 > 31$$

当且仅当 $a_2 = a_4 = a_6 = 1$ 时, 等号成立;)

【归纳总结】本题的核心点在于对于两个递推关系的理解与等价转化, 然后, 结合题设要求 “和最小”;

进行枚举或递推分析；对于考试的分析问题、解决问题能力有一定要求；主要考察了学生逻辑推理核心素养，根据题设推理出 1, 2 连续造型值最小，从而判断出整体的最小值，虽然较为简单但容易出错；

二、选择题（本大题共有 4 题，每题 5 分，满分 20 分）

13、以下哪个函数既是奇函数，又是减函数（ ）

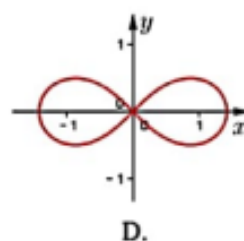
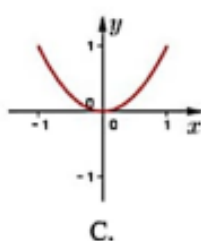
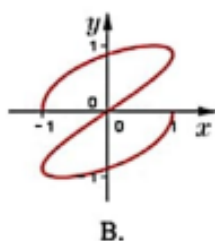
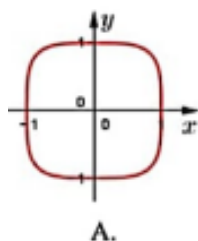
- A. $f(x) = -3x$ B. $f(x) = x^3$ C. $f(x) = \log_3^x$ D. $f(x) = 3^x$

【思路分析】注意研究函数性质的方法；

【解析】排除法：B、C、D 涉及函数都是增函数；

【归纳总结】本题主要考查函数性质的研究方法；基础题；

14、已知参数方程 $\begin{cases} x = 3t - 4t^3 \\ y = 2t + \sqrt{1-t^2} \end{cases} (t \in [-1, 1])$ ，以下哪个图像是该方程的图像（ ）



【思路分析】注意利用集合观点，根据方程研究曲线的方法；

【解析】方法一（特值法）：令 $y = 2t + \sqrt{1-t^2} = 0$ ，解得 $t = -1, 0, 1$ ，代入参数方程，得 $x = 1, 0, -1$ ，所以，方程对应的曲线一定过 $(-1, 0)$ 、 $(0, 0)$ 、 $(1, 0)$ ，故选 B；

方法二：在方程对应的曲线上任取一点 $P(x_1, y_1)$ ，对应的参数为： t_1 ，

由题意，得 $\begin{cases} x_1 = 3t_1 - 4t_1^3 \\ y_1 = 2t_1 + \sqrt{1-t_1^2} \end{cases}$ ；

当 $t = -t_1$ 时，代入已知的参数方程，得 $\begin{cases} x_2 = 3(-t_1) - 4(-t_1)^3 = -x_1 \\ y_2 = 2(-t_1) + \sqrt{1-(-t_1)^2} = -y_1 \end{cases}$ ，

所以，点 $Q(x_2, y_2) = (-x_1, -y_1)$ 也在方程对应的曲线上，

所以，方程对应的曲线关于原点成中心对称；

取 $t = \frac{1}{2}$ ，代入参数方程，则 $x = 1$ ， $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，即点 $R(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$ 在曲线上；

验证点 $S(1, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ 、 $T(-1, \frac{\sqrt{3}}{2})$ 都不在曲线上；

因为，当 $x = 3t - 4t^3 = 1$ 时， $t = -1$ 或 $t = \frac{1}{2}$ ，

当 $y = 2t + \sqrt{1-t^2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时， $t = -\frac{1}{2}$ 或 $t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，所以，点 $S(1, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ 不在方程对应的曲线上；

线上；

故，方程对应的曲线不关于 x 轴成对称；

因为，当 $x = 3t - 4t^3 = -1$ 时， $t = 1$ 或 $t = -\frac{1}{2}$ ，

当 $y = 2t\sqrt{1-t^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 时, $t = \frac{1}{2}$ 或 $t = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 所以, 点 $T(-1, \frac{\sqrt{3}}{2})$ 不在方程对应的曲线上;

故, 方程对应的曲线不关于 y 轴成对称; 故选 B;

【归纳总结】本题主要通过参数方程这个载体, 考查了根据方程研究曲线的方法与过程; 方法 1: 结合选择题的特点, 使用了“特值法”; 方法 2: 从参数方程视角实践根据方程研究曲线。

15. 已知 $f(x) = 3\sin x + 2$, 对于任意的 $x_2 \in [0, \frac{\pi}{2}]$, 都存在 $x_1 \in [0, \frac{\pi}{2}]$, 使得

$f(x_1) + 2f(x_2 + \theta) = 3$ 成立, 则下列选项中, θ 可能的值是 ()

- A. $\frac{3\pi}{5}$ B. $\frac{4\pi}{5}$ C. $\frac{6\pi}{5}$ D. $\frac{7\pi}{5}$

【思路分析】注意仔细审题, 关注关键词“任意的”、“都存在”;

【解析】**方法一:** 由题设 $f(x_1) + 2f(x_2 + \theta) = 3$, 变形得 $f(x_1) = 3 - 2f(x_2 + \theta)$,

又由题设 “ $f(x) = 3\sin x + 2$ 对任意的 $x_1 \in [0, \frac{\pi}{2}]$, 都存在 $x_2 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 使得 $f(x_1) + 2f(x_2 + \theta) = 3$ 成立”,

若设函数 $f(x) = 3\sin x + 2$ 对任意的 $x_1 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 的值域为 A ,

设函数 $y = 3 - 2f(x_2 + \theta) = -1 - 6\sin(x_2 + \theta)$, $x_2 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 的值域为 B , 则 $A \subseteq B$,

又因为 $f(x_1) \in [2, 5]$; 而 $y = 3 - 2f(x_2 + \theta) = -1 - 6\sin(x_2 + \theta)$, 当 $\theta = \frac{7\pi}{5}$ 时,

$$x_2 + \theta \in [\frac{7\pi}{5}, \frac{19\pi}{10}],$$

$y = 3 - 2f(x_2 + \theta) = -1 - 6\sin(x_2 + \theta) \in [1 - 6\sin\frac{19\pi}{10}, 5]$, 而 $1 - 6\sin\frac{19\pi}{10} \approx 0.85 < 2$ 符合题意;

方法二: 由题意, 得 $3\sin x_1 + 2 + 2[3\sin(x_2 + \theta) + 2] = 3$, 解得 $\sin(x_2 + \theta) = \frac{-\sin x_1 - 1}{2}$,

又对于任意的 $x_1 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 时, $\sin(x_2 + \theta) = \frac{-\sin x_1 - 1}{2} \in [-1, -\frac{1}{2}]$,

原问题, 等价于: 当 $x_2 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 时, 即 $x_2 + \theta \in [\theta, \theta + \frac{\pi}{2}]$ 时, $\sin(x_2 + \theta)$ 取遍 $[-1, -\frac{1}{2}]$ 能所有的数;

所以, 一定存在整数 k ,

使得: $[2k\pi + \frac{7\pi}{6}, 2k\pi + \frac{3\pi}{2}] \subseteq [\theta, \theta + \frac{\pi}{2}]$ 或者 $[2k\pi + \frac{3\pi}{2}, 2k\pi + \frac{11\pi}{6}] \subseteq [\theta, \theta + \frac{\pi}{2}]$,

解得 $\theta \in [2k\pi + \frac{6\pi}{6}, 2k\pi + \frac{7\pi}{6}]$ 或者 $\theta \in [2k\pi + \frac{8\pi}{6}, 2k\pi + \frac{9\pi}{6}]$, 所以选 D;)

方法三: $f(x_1) = 3\sin x_1 + 2, 2f(x_2 + \theta) = 6\sin(x_2 + \theta) + 4, f(x_1) + 2f(x_2 + \theta) = 3$

$$\sin x_1 + 2\sin(x_2 + \theta) = -1, \sin x_1 \in [0, 1], \sin(x_2 + \theta) \in [-1, -\frac{1}{2}]$$

$$\theta \in [2k\pi + \pi, 2k\pi + \frac{7\pi}{6}] \text{ 或 } \theta \in [2k\pi + \frac{4\pi}{3}, 2k\pi + \frac{3\pi}{2}], k \in \mathbb{Z}$$

$\theta = \frac{6\pi}{5}, x_1 = 0, x_2 \in [0, 2\pi]$ 上有 2 解, $x_2 = \frac{19\pi}{30}, \frac{59\pi}{30} \notin [0, \frac{\pi}{2}]$, 舍去 θ 的可能值是 $\frac{7\pi}{5}$, 选 D

【归纳总结】本题本质就是求三角函数的值域，通过关键词“任意”、“存在”与方程，构建了以集合间关系为解题的“切入点”，同时考查了：函数与方程、数形结合、等价转化思想；主要考查了学生数学抽象核心素养，通过整体代入法解决三角函数问题。

16、已知两两不同的 $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$ 满足 $x_1 + y_1 = x_2 + y_2 = x_3 + y_3$,

且 $x_1 < y_1, x_2 < y_2, x_3 < y_3, x_1 y_1 + x_3 y_3 = 2x_2 y_2 > 0$, 则下列选项中恒成立的是 ()

- A. $2x_2 < x_1 + x_3$ B. $2x_2 > x_1 + x_3$ C. $x_2^2 < x_1 x_3$ D. $x_2^2 > x_1 x_3$

【思路分析】注意通过审题与理解，进行合理的转化

【解析】方法一：
$$\begin{cases} x_1 = s - a, y_1 = s + a, a > 0 \\ x_2 = s - b, y_2 = s + b, b > 0 \Rightarrow a^2 + c^2 = 2b^2, s^2 - b^2 > 0 \\ x_3 = s - c, y_3 = s + c, c > 0 \end{cases}$$

$$(a+c)^2 = 2(a^2 + c^2) - (a-c)^2 = a^2 + c^2 + 2ac < 2(a^2 + c^2) = 4b^2$$

$$a, b, c > 0 \Rightarrow a + c < 2b \Leftrightarrow x_1 + x_3 < 2x_2$$

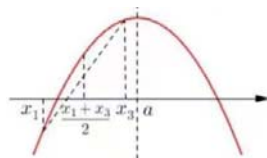
方法二：举特例去选择， $x_1 = 4, y_1 = 5, x_2 = 2, y_2 = 7, x_3 = 1, y_3 = 8$, 代入

方法三：令 $x_1 + y_1 = x_2 + y_2 = x_3 + y_3 = 2a$, 则由已知 $x_1 < a, x_2 < a, x_3 < a$,

又由 $x_1(2a - x_1) + x_3(2a - x_3) = 2x_2(2a - x_2)$ (*) , 构造函数 $f(x) = x(2a - x)$,

(*) 即为 $f(x_1) + f(x_3) = 2f(x_2)$, 结合函数图像,

$$f\left(\frac{x_1 + x_3}{2}\right) > \frac{f(x_1) + f(x_3)}{2} = f(x_2), \text{ 又函数在 } (-\infty, a) \text{ 递增, 所以 } \frac{x_1 + x_3}{2} > x_2$$



【归纳总结】本题主要考察了考学生数学数据处理与数学建模核心素养，通过换元、引入参数或根据条件结构转化为二次函数问题，再通过函数的凹凸性确定出答案，难度较大；

三、解答题 (本大题共有 5 题, 满分 76 分, 解答下列各题必须写出必要的步骤)

17、如图, 在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB = BC = 2, AA_1 = 3$

(1)若 P 是边 A_1D_1 的动点, 求三棱锥 $P - ADC$ 的体积; (2)求 AB_1 与平面 ACC_1A_1 所成的角的大小.

【思路分析】(1)利用体积计算公式计算; (2)证明 $OB_1 \perp$ 平面 ACC_1A_1 , 找到线面角度, 再计算

【解析】(1)如图 1, $V_{P-ADC} = \frac{1}{3} S_{\triangle ADC} \times h = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times 3 = 2$;

(2) 如图 2, $\because OB_1 \perp A_1C_1, OB_1 \perp OO_1 \therefore OB_1 \perp$ 平面 $ACC_1A_1 \therefore \theta = \angle B_1AO_1$ 为 AB_1 与平面 ACC_1A_1

所成的角; 在 $Rt\triangle B_1AO_1$ 中 $B_1O_1 = \sqrt{2}, AB_1 = \sqrt{13}, \sin \theta = \frac{B_1O_1}{AB_1} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{26}}{13}, \theta = \arcsin \frac{\sqrt{26}}{13}$

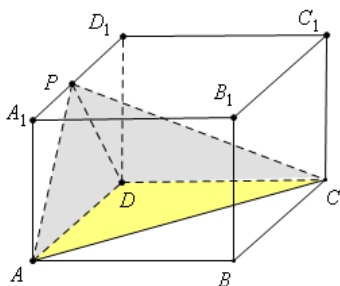


图 1

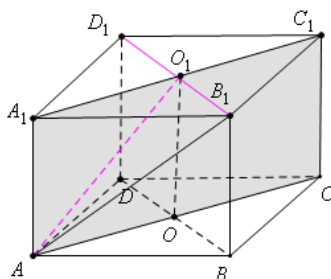


图 2

【归纳总结】本题考查棱锥的体积、线面角的求法，理解线面角的定义，考查学生的空间立体感、逻辑推理能力和运算能力，属于基础题。

18、在 ΔABC 中, 已知 $a=3, b=2c$

(1)若 $\angle A = \frac{2\pi}{3}$, 求 ΔABC 的面积; (2)若 $2\sin B - \sin C = 1$, 求 ΔABC 的周长.

【思路分析】(1) 由已知利用余弦定理即可求解 b, c 的值; 再利用面积公式求 ΔABC 的面积.

(2) 根据 $b=2c$ 与 $2\sin B - \sin C = 1$ 建立关于角度的三角方程, 求解 $\sin C, \sin B$ 的值, 在求 $\sin A$, 则根据正弦定理以及 $a=3$, 则三边可求.

【解析】(1) $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \Rightarrow \frac{(2c)^2 + c^2 - 3^2}{2 \times (2c)c} = -\frac{1}{2} \Rightarrow c = \frac{3\sqrt{7}}{7}, b = \frac{6\sqrt{7}}{7};$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \times 2c^2 \times \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2} \times 2 \times \left(\frac{3\sqrt{7}}{7}\right)^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{14}$$

(2) $b=2c \Rightarrow \sin B = 2\sin C \Rightarrow 2 \times 2\sin C - \sin C = 1 \Rightarrow \sin C = \frac{1}{3}, \sin B = \frac{2}{3}$

$$\sin A = \sin(B+C) = \sin B \cos C + \cos B \sin C = \frac{4\sqrt{2}}{9} \pm \frac{\sqrt{5}}{9}$$

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A} = \frac{4\sqrt{2} \pm \sqrt{5}}{3}, \text{ 三角形周长 } l = a + b + c = a + 3c = 3 + 4\sqrt{2} \pm \sqrt{5}$$

【归纳总结】本题主要考查了正弦定理, 余弦定理, 两角差的余弦公式在解三角形中的应用, 考查了计算能力和转化思想, 属于中档题.

19. 已知某企业今年(2021年)第一季度的营业额为1.1亿元, 以后每个季度(一年有四个季度)营业额都比前一季度多0.05亿元, 该企业第一季度是利润为0.16亿元, 以后每一季度的利润都比前一季度增长4%.

(1) 求2021年第一季度起20季度的营业额总和;

(2) 问哪一年哪个季度的利润首次超过该季度营业额的18%?

【思路分析】(1) 根据每个季度比上个季度营业额增加0.05亿元可以知道数列为一个等差数列, 求解20季度营业收入总额为即为等差数列前20项的和; (2) 通过数列通项公式建立数列不等式, 利用计算器计算求解不等式即可.

【解析】(1) 设 a_n 为第 n 季度的营业额, b_n 为利润, 由题意得, a_n 的首项为1.1亿元, 公差为0.05亿元, 所以2021到2025年,

$$20 \text{ 季度营业收入总额为: } S_{20} = 20a_1 + \frac{20 \times 19}{2} \times d = 31.5 \text{ (亿元)}$$

(2) 由已知得, $a_n = a_1 + (n-1)d = 1.1 + 0.05(n-1)$

由已知的, b_n 的首项为0.16亿元, 公比为1.04, 即 $b_n = b_1 \cdot q^{n-1} = 0.16 \times 1.04^{n-1}$

所以 $a_n \cdot 18\% < b_n$, 利用计算器991可得, $n_{\min} = 26$

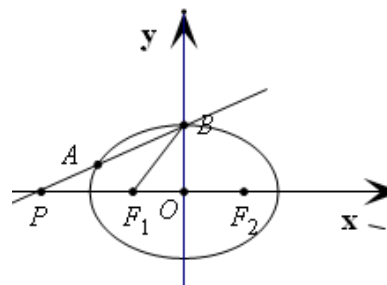
所以2027年第二季度该公司的利润首次超过该季度营业收入的18%

【归纳总结】本题主要考查了等差、比数列的通项公式与前 n 项和公式的应用, 考查了阅读理解能力、计算能力, 属于中档题.

20、已知 $\Gamma: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1, F_1, F_2$ 是其左右焦点, $P(m, 0) (m < -\sqrt{2})$, 直线 l 过

点 P 交 Γ 于 A, B 两点, 且 A 在线段 BP 上.

(1) 若 B 是上顶点, $|\overrightarrow{BF_1}| = |\overrightarrow{PF_1}|$, 求 m 的值;



(2) 若 $\overrightarrow{F_1A} \cdot \overrightarrow{F_2A} = \frac{1}{3}$, 且原点 O 到直线 l 的距离为 $\frac{4\sqrt{15}}{15}$, 求直线 l 的方程;

(3) 证明: 对于任意 $m < -\sqrt{2}$, 总存在唯一一条直线使得 $\overrightarrow{F_1A} // \overrightarrow{F_2B}$.

【思路分析】(1) 根据椭圆的定义以及 $|\overrightarrow{BF_1}| = |\overrightarrow{PF_1}|$ 建立关于 m 的方程; (2) 通过原点 O 到直线 l 的距离建立关于直线斜率的方程, 求解斜率; (3) 找到直线斜率与 m 的函数关系, 结合函数关系式判断 $m < -\sqrt{2}$ 是否是唯一解使得 $\overrightarrow{F_1A} // \overrightarrow{F_2B}$;

【解析】(1) $\Gamma: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1, F_1(-1, 0), F_2(1, 0), |\overrightarrow{BF_1}| = \sqrt{2}, |\overrightarrow{PF_1}| = -1 - m$;

$$|\overrightarrow{BF_1}| = |\overrightarrow{PF_1}|, -1 - m = \sqrt{2}, m = -1 - \sqrt{2}$$

(2) 设 $A(x_1, y_1), \overrightarrow{F_1A} = (x_1 + 1, y_1), \overrightarrow{F_2A} = (x_1 - 1, y_1)$;

$$\overrightarrow{F_1A} \cdot \overrightarrow{F_2A} = \frac{1}{3} = x_1^2 + y_1^2 - 1, x_1^2 + y_1^2 = \frac{4}{3},$$

$$\begin{cases} x_1^2 + y_1^2 = \frac{4}{3}, \\ \frac{x_1^2}{2} + y_1^2 = 1 \end{cases} \therefore A(-\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3})$$

设 $l: y = k(x + \frac{\sqrt{6}}{3}) + \frac{\sqrt{6}}{3} = kx + \frac{\sqrt{6}}{3}(k+1)$, 原点 O 到直线 l 的距离为

$$\frac{4\sqrt{15}}{15}$$

$$d = \frac{|\frac{\sqrt{6}}{3}k + \frac{\sqrt{6}}{3}|}{\sqrt{1+k^2}} = \frac{4\sqrt{15}}{15} \Rightarrow 3k^2 - 10k + 3 = 0 \Rightarrow k = 3 \text{ 或 } k = \frac{1}{3} \quad (A \text{ 在线段 } BP \text{ 上, } k = 3, \text{ 舍去})$$

$$l: 3x - 9y + 4\sqrt{6} = 0$$

(3) 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 直线 $l: x = hy + m$

$$\overrightarrow{F_1A} // \overrightarrow{F_2B}, \text{ 则 } \frac{y_2}{y_1} = \frac{1-m}{-1-m} = \frac{m-1}{m+1}, \therefore y_2 = \frac{m-1}{m+1}y_1$$

联立直线与椭圆得

$$\begin{cases} x = hy + m \\ \frac{x^2}{2} + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow (h^2 + 2)y^2 + 2mhy + m^2 - 2 = 0.$$

$$\text{即 } y_1 + y_2 = -\frac{2mh}{h^2 + 2}, y_1 y_2 = \frac{m^2 - 2}{h^2 + 2} \quad \text{所 以}$$

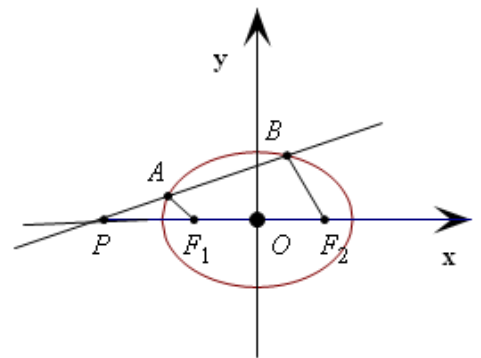
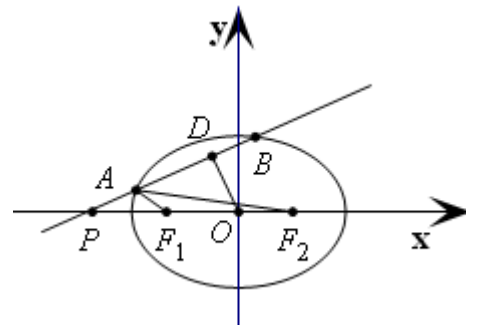
$$\left(1 + \frac{m-1}{m+1}\right)y_1 = -\frac{2mh}{h^2 + 2}, \frac{m-1}{m+1}y_1^2 = \frac{m^2 - 2}{h^2 + 2}$$

$$\text{代入 } y_1 = \frac{-h(2n+1)}{h^2 + 2}, \frac{m-1}{m+1} \times \frac{h^2(m+1)^2}{(h^2 + 2)^2} = \frac{m^2 - 2}{h^2 + 2}$$

$$\text{所以 } (m^2 - 1)h^2 = (m^2 - 2)(h^2 + 2), m^2 h^2 - h^2 = m^2 h^2 - 2h^2 + 2m^2 - 4$$

$$\therefore h > 0 \therefore h^2 = 2m^2 - 4 \Rightarrow h = \sqrt{2m^2 - 4} \Rightarrow k = \frac{1}{\sqrt{2m^2 - 4}},$$

即对于任意 $m < -\sqrt{2}$, 使得 $\overrightarrow{F_1A} // \overrightarrow{F_2B}$ 的直线有且仅有一条;



【归纳总结】本题主要考查直线与椭圆的位置关系以及根与系数的关系的应用，属于难题.

21、如果对任意 $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ 使得 $x_1 - x_2 \in S$ 都有 $f(x_1) - f(x_2) \in S$, 则称 $f(x)$ 是 S 关联的.

(1) 判断并证明 $f(x) = 2x - 1$ 是否是 $[0, +\infty)$ 关联? 是否是 $[0, 1]$ 关联?

(2) $f(x)$ 是 $\{3\}$ 关联的, 在 $[0, 3)$ 上有 $f(x) = x^2 - 2x$, 解不等式 $2 \leq f(x) \leq 3$;

(3) “ $f(x)$ 是 $\{1\}$ 关联的, 且是 $[0, +\infty)$ 关联” 当且仅当 “ $f(x)$ 是 $[1, 2]$ 关联的” .

【思路分析】(1) 根据 “关联” 定义进行判断;

(2) 根据 “ $f(x)$ 是 $\{3\}$ 关联” 有: $f(x+3) - f(x) = 3$; 以及函数解析式作出函数图像, 利用图像解不等式;

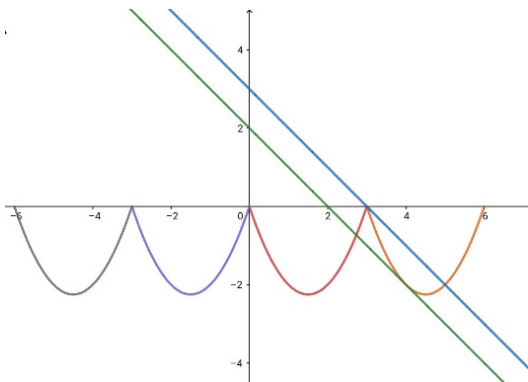
(3) 分为充分性、必要性两个方面证明;

【解析】(1) $x_1 - x_2 \in [0, +\infty)$, $f(x_1) - f(x_2) = (2x_1 - 1) - (2x_2 - 1) = x_1 - x_2 \in [0, +\infty)$, $f(x) = 2x - 1$ 是 $[0, +\infty)$ 关联;

$x_1 - x_2 \in [0, 1]$, $f(x_1) - f(x_2) = (2x_1 - 1) - (2x_2 - 1) = 2(x_1 - x_2) \in [0, 2]$, $f(x) = 2x - 1$ 不是 $[0, 1]$ 关联;

(2) $f(x) - x = x^2 - 3x$ 是以 3 为周期的函数, 然后就是要在 $[2 - x, 3 - x]$ 里面,

可以看出只有 $[0, 3), [3, 6)$ 两个周期中可以找到解, 答案是 $[1 + \sqrt{3}, 5]$



(3) 充分性: $\because f(x+1) = f(x) + 1$, 且 $f(x)$ 递增, 所以对于 $x+1 \leq y \leq x+2$

$f(x) + 1 = f(x+1) \leq f(y) \leq f(x+2) = f(x) + 2$ 成立.

必要性: $\because f(x+1) - f(x) \geq 1$, $f(x+2) - f(x+1) \geq 1$, $f(x+2) - f(x) \leq 2$

可以得到 $f(x+1) = f(x) + 1$

故对 $x < y \leq x+1$, 我们对 $x, y+1$ 用 $[1, 2]$ 关联的条件得到 $f(x) + 1 \leq f(y+1) = f(y) + 1$

于是 $f(x) \leq f(y)$. 对于正整数 n , $x+n < y \leq x+n+1$

则有 $f(y) = f(y-n) + n \geq f(x) + n > f(x)$. 也成立.

方法二: (1) ① 设 $x_1 - x_2 \in [0, +\infty)$, $x_1 - x_2 \geq 1$ 且为 $[0, +\infty)$,

$f(x_1) - f(x_2) = 2x_1 - 1 - 2x_2 + 1 = 2(x_1 - x_2) \geq 2$ 且满足 $[0, +\infty)$, $f(x) = 2x - 1$ 是 $[0, +\infty)$ 关联的.

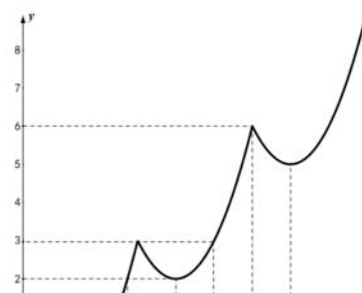
② 设 $x_1 - x_2 \in [0, 1]$, $f(x_1) - f(x_2) = 2x_1 - 1 - 2x_2 + 1 = 2(x_1 - x_2) \in [0, 2]$,

故 $f(x) = 2x - 1$ 不是 $[0, 1]$ 关联的.

(2) 因为 $f(x)$ 是 $\{3\}$ 关联的, 所以当任意的 $x \in \mathbb{R}$ 时, $f(x+3) - f(x) = 3$,

又 $\because x \in [0, 3)$ 时, $f(x) = x^2 - 2x$, 函数图像如下图:

易知, $a = 1 + \sqrt{3}$, $\therefore$ 原不等式的解为 $[a, 5]$ 即为 $[1 + \sqrt{3}, 5]$.



(3) 证明: $\because f(x)$ 是 $\{1\}$ 关联, 可知对任意的 $x \in \mathbf{R}$ 有 $f(x+1) - f(x) = 1$,

$\because f(x)$ 是 $[0, +\infty)$ 关联, 可知对任意的 $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ 有 $\begin{cases} x_1 - x_2 \geq 0 \\ f(x_1) - f(x_2) \geq 0 \end{cases}$, 为不减函数;

可以设 $g(\Delta x) = f(x + \Delta x) - f(x)$,

当 $\Delta x = 1$ 时, $g(1) = f(x+1) - f(x) = 1$,

当 $\Delta x = 2$ 时, $g(2) = f(x+2) - f(x) = f(x+1) + 1 - f(x) = 2$,

因为当 x 确定时, $g(\Delta x)$ 是关于 Δx 的不减函数, 所以 $\Delta x \in [1, 2]$, $g(\Delta x) \in [1, 2]$

$\therefore$ 有 $f(x)$ 是 $[1, 2]$ 关联.

②当 $f(x)$ 是 $[1, 2]$ 关联, 有 $\Delta x \in [1, 2]$, $\therefore g(\Delta x) = f(x + \Delta x) - f(x) \in [1, 2]$,

当 $g(1) = f(x+1) - f(x) \in [1, 2]$, $g(2) = f(x+2) - f(x) \in [1, 2]$ 时,

假设 $g(1) > 1$, 有 $f(x+1) - f(x) > 1 \therefore f(x+2) - f(x) > f(x+1) + 1 - f(x) > 2$,

又 $\because g(2) = f(x+2) - f(x) \in [1, 2]$, 矛盾.

故只有 $g(1) = 1$, 易得 $g(2) = 2$.

利用 $f(x+1) - f(x) = 1$, 得 $f(x)$ 是 $\{1\}$ 关联,

依次可得 $g(n) = n$, $n \in \mathbf{Z}^+$,

即当 $\Delta x \in [n, n+1]$, 有 $g(\Delta x) \in [n, n+1]$,

当在 $n \rightarrow +\infty$ 时, $\Delta x \in [0, +\infty)$, $g(\Delta x) \in [0, +\infty)$.

【归纳总结】本题主要考查了新定义以及函数性质的综合应用, 体现了数形结合思想的应用, 同时考查了学生分析理解能力、推理能力、计算能力, 属于难题.