线是 $y=\frac{3}{4}x-\frac{3}{4}$,其中取等条件是 $a=\frac{3}{4},b=-\frac{3}{4}$.

解法 2:(三角不等式法)根据题意有 $M\geqslant|f(x)|$ 在 $x\in[0,2]$ 恒成立,所以 $M\geqslant|f(0)|=|1+b|$,$M\geqslant|f(2)|=|2a+b-1|$,$M\geqslant\left|f(\frac{1}{2})\right|=\left|\frac{1}{2}a+b+\frac{1}{8}\right|$,$M\geqslant\left|f(\frac{3}{2})\right|=\left|\frac{3}{2}a+b-\frac{1}{8}\right|$,从而 $6M\geqslant|f(0)|+|f(2)|+2\left|f(\frac{1}{2})\right|+2\left|f(\frac{3}{2})\right|\geqslant\left|f(0)-f(2)+2f(\frac{1}{2})-2f(\frac{3}{2})\right|=\frac{3}{2}$,$\therefore M\geqslant\frac{1}{4}$,其中取等条件是 $f(2)=f(\frac{1}{2})=-f(0)=-f(\frac{3}{2})=\frac{1}{4}$,即 $a=\frac{3}{4},b=-\frac{3}{4}$.

评注:本例中,采用的是曲线段的两个端点和内部两个切点,共四个点.

如果修改题目条件 $a>0$ 为 $a\leqslant0$,那么夹曲线的筷子距离最小的状态是一根过 A,另一根过 B,且都平行于 x 轴,$M(a,b)$ 的最小值是 1,此时 $a=0,b=0$.

三、结束语

《普通高中数学课程标准解读(实验)》指出:“我们不但要继续强调数学基础知识和基本技能的学习,而且还要赋予基础知识和基本技能新内涵,要始终重视对数学基础知识和基本技能价值的深入剖析,以及加强对其发展性的足够认识”. 故此,我们要善于抓住绝对值和函数最值等核心知识,追根溯源,从不同角度观察、比较、抽象并感悟数学思想方法,提升探究“所以然”的能力,真正把数学核心素养的教学落到实处.

参考文献

[1] 王淼生,黄勇. 知其然更要知其所以然[J]. 中学数学杂志(高中),2020(3).

2021 年全国新高考Ⅰ卷解几压轴题的解法探究及试题溯源*

广东省中山市实验中学 (528404) 杨沛娟

广东省中山市濠头中学 (528437) 张 宇

1 试题呈现

(2021 年全国新高考 I 卷第 21 题)在平面直角坐标系 xOy 中,已知点 $F_1(-\sqrt{17},0)$,$F_2(\sqrt{17},0)$,点 M 满足 $|MF_1|-|MF_2|=2$. 记 M 的轨迹为 C.

(1)求 C 的方程;

(2)设点 T 在直线 $x=\frac{1}{2}$ 上,过 T 的两条直线分别交 C 于 A,B 两点和 P,Q 两点,且 $|TA|\cdot|TB|=|TP|\cdot|TQ|$,求直线 AB 的斜率与直线 PQ 的斜率之和.

2 试题分析

第(1)小题比较简单,由已知可求出 C 的方程为 $x^2-\frac{y^2}{16}=1\ (x>0)$. 这里我们要注意的是容易出现错误的是忽视 $x>0$ 这个条件,即 M 的轨迹为双曲线的右半支.

第(2)小题是本题的重点,事实上,因为 T 是直线 $x=\frac{1}{2}$ 上任一点,所以我们在探求直线 AB 的斜率与直线 PQ 的斜率时取 $T(\frac{1}{2},0)$,由对称性很容易得出直线 AB 的斜率与直线 PQ 的斜率之和为 0. 因此我们可以猜测 T 为直线 $x=\frac{1}{2}$ 上任一点都有直线 AB 的斜率与直线 PQ 的斜率之和为 0. 剩下的就是我们通过一般情形对此结论进行计算验证即可.

设 P 点的坐标为 $T\left(\frac{1}{2},n\right)$,可得直线 AB:$y-n$

* 本文系广东教育学会教师继续教育学会 2020 年度规划课题《基于提升高中青年数学教师听评课能力的实践研究》(课题编号:2020gh070),广东教育研究院规划课题《基于 STEM 教育理念下图形计算器在高中数学教学中的实践与研究》(课题编号:GDJY-2020-Ab-259),中山市市级科研立项一般课题《基于 GeoGeBra 在高中数学“可视化课堂导入”的实践与探究》(课题编号:B2020196)三个基金项目的阶段性成果.

$=k_1\left(x-\frac{1}{2}\right)$,联立$\begin{cases}y-n=k_1\left(x-\frac{1}{2}\right),\\x^2-\frac{y^2}{16}=1,\end{cases}$可得$|TA|=\sqrt{1+k_1^2}\left(x_1-\frac{1}{2}\right)$,$|TB|=\sqrt{1+k_1^2}\left(x_2-\frac{1}{2}\right)$,从而得出$\therefore |TA|\cdot|TB|=(1+k_1^2)\cdot\left(x_1-\frac{1}{2}\right)\left(x_2-\frac{1}{2}\right)=\frac{(n^2+12)(1+k_1^2)}{k_1^2-16}$,同样的方法可以得出$|TP|\cdot|TQ|=\frac{(n^2+12)(1+k_2^2)}{k_2^2-16}$,$|TA|\cdot|TB|=|TP|\cdot|TQ|$,$\therefore k_1+k_2=0$,这种方法思路清晰,但在具体问题中怎样求,则是一个带有技巧性的问题,方法不同,解题过程中的繁简度不度,计算量相差特别大.

此题的解法较多,另一个比较简单的解法是利用参数方程,同样思路比较清晰,并且计算量小,是一个不错的解法.

3 试题解答

(1)轨迹 C 为 $x^2-\frac{y^2}{16}=1(x>0)$. 过程略.

(2)解法 1:(普通方程解)设 $T\left(\frac{1}{2},n\right)$,设 AB:$y-n=k_1\left(x-\frac{1}{2}\right)$,联立$\begin{cases}y-n=k_1\left(x-\frac{1}{2}\right),\\x^2-\frac{y^2}{16}=1,\end{cases}$

$\therefore (16-k_1^2)x^2+(k_1^2-2k_1n)x-\frac{1}{4}k_1^2-n^2+k_1n-16=0$,$\therefore x_1+x_2=\frac{k_1^2-2k_1n}{k_1^2-16}$,$x_1x_2=\frac{\frac{1}{4}k_1^2+n^2-k_1n+16}{k_1^2-16}$. 由$|TA|=\sqrt{1+k_1^2}\left(x_1-\frac{1}{2}\right)$,$|TB|=\sqrt{1+k_1^2}\left(x_2-\frac{1}{2}\right)$,则$|TA|\cdot|TB|=(1+k_1^2)\left(x_1-\frac{1}{2}\right)\left(x_2-\frac{1}{2}\right)=\frac{(n^2+12)(1+k_1^2)}{k_1^2-16}$. 设 PQ:$y-n=k_2\left(x-\frac{1}{2}\right)$,同理$|TP|\cdot|TQ|=\frac{(n^2+12)(1+k_2^2)}{k_2^2-16}$,$\because |TA|\cdot|TB|=|TP|\cdot|TQ|$,$\therefore \frac{1+k_1^2}{k_1^2-16}=\frac{1+k_2^2}{k_2^2-16}$,$1+\frac{17}{k_1^2-16}=1+\frac{17}{k_2^2-16}$,$\therefore k_1^2-16=k_2^2-16$,即 $k_1^2=k_2^2$,$\because k_1\neq k_2$,$\therefore k_1+k_2=0$.

评注:用普通方程联立原方程组,运用韦达定理,最后得出斜率间的关系,优点是思路比较清晰,但计算量比较大.

解法 2:设 $T\left(\frac{1}{2},n\right)$,设 AB:$y-n=k_1\left(x-\frac{1}{2}\right)$,联立$\begin{cases}y-n=k_1\left(x-\frac{1}{2}\right),\\x^2-\frac{y^2}{16}=1,\end{cases}$则$\left(1-\frac{k_1^2}{16}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(1-\frac{k_1n}{8}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)-\frac{n^2+12}{16}=0$,由于$|TA|=\sqrt{1+k_1^2}\left(x_1-\frac{1}{2}\right)$,$|TB|=\sqrt{1+k_1^2}\left(x_2-\frac{1}{2}\right)$,$\therefore |TA|\cdot|TB|=(1+k_1^2)\left(x_1-\frac{1}{2}\right)\left(x_2-\frac{1}{2}\right)=\frac{(n^2+12)(1+k_1^2)}{k_1^2-16}$,同理$|TP|\cdot|TQ|=\frac{(n^2+12)(1+k_2^2)}{k_2^2-16}$,$\because |TA|\cdot|TB|=|TP|\cdot|TQ|$,$\therefore \frac{1+k_1^2}{k_1^2-16}=\frac{1+k_2^2}{k_2^2-16}$,$1+\frac{17}{k_1^2-16}=1+\frac{17}{k_2^2-16}$,$\therefore k_1^2-16=k_2^2-16$,即 $k_1^2=k_2^2$,$\because k_1\neq k_2$,$\therefore k_1+k_2=0$.

评注:此解法通过构造方程得出斜率间的关系,本质上和解法 1 是相同的.

解法 3:(参数方程)设 $T(\frac{1}{2},m)$,直线 AB:$\begin{cases}x=\frac{1}{2}+t\cos\theta_1,\\y=m+t\sin\theta_1,\end{cases}$代入轨迹 C:$16x^2-y^2-16=0(x>0)$得$(16\cos^2\theta_1-\sin^2\theta_1)t^2+(16\cos\theta_1-2m\sin\theta_1)t-(m^2+12)=0$,设 $OA=t_1$,$OB=t_2$,$OP=t_3$,$OQ=t_4$,则$t_1t_2=\frac{m^2+12}{\sin^2\theta_1-16\cos^2\theta_1}=\frac{m^2+12}{1-17\cos^2\theta_1}$. 设直线 PQ 为$\begin{cases}x=\frac{1}{2}+t\cos\theta_2,\\y=m+t\sin\theta_2,\end{cases}$同理$t_3t_4=\frac{m^2+12}{\sin^2\theta_2-16\cos^2\theta_2}=\frac{m^2+12}{1-17\cos^2\theta_1}$,$t_1t_2=t_3t_4\Rightarrow\cos^2\theta_1=\cos^2\theta_2$,由 $\theta_1\neq\theta_2$,则 $\theta_1+\theta_2=\pi$,即直线 AB 的斜率与直线 PQ 的斜率之和为 0.

评注:以上前两种解法都属于常规解法,解法 1 和解法 2 是用普通方程的方程,设直线的方程后,利用韦达定理. 解法 3 用参数方程,可以看出,用参数方程计算量小很多.

解法 4:(向量法)设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,$P(x_3,y_3)$,$Q(x_4,y_4)$,$|TA|\cdot|TB|=|TP|\cdot|TQ|$,即$\left(x_1-\frac{1}{2}\right)\left(x_2-\frac{1}{2}\right)+(y_1-t)(y_2-t)+(x_3-\frac{1}{2})$

$\cdot(x_4-\frac{1}{2})+(y_3-t)(y_4-t)=0$，又由于 $k_{AB}=\frac{y_1-t}{x_1-\frac{1}{2}}=\frac{y_2-t}{x_2-\frac{1}{2}}$，$k_{PQ}=\frac{y_3-t}{x_3-\frac{1}{3}}=\frac{y_4-t}{x_4-\frac{1}{2}}$，所以 $k_{AB}^2=\frac{y_1-t}{x_1-\frac{1}{2}}\cdot\frac{y_2-t}{x_2-\frac{1}{2}}$，$k_{PQ}^2=\frac{y_3-t}{x_3-\frac{1}{2}}\cdot\frac{y_4-t}{x_4-\frac{1}{2}}$，$(k_{AB}^2+1)\cdot(x_1-\frac{1}{2})\cdot(x_2-\frac{1}{2})+(k_{PQ}^2+1)(x_3-\frac{1}{2})\cdot(x_4-\frac{1}{2})=0$. 再结合解法 2 得出结论.

评注：此解法运用向量的坐标运算，结合斜率的定义，思路清楚，运算量不大，是一种比较好的解法.

解法 5：(曲线系法) 由 $|TA|\cdot|TB|=|TP|\cdot|TQ|$，由切割线定理的逆定理知 A,B,P,Q 四点共圆，设直线 AB 和 PQ 的方程分别为 $y-m=k_1(x-\frac{1}{2})$，$y-m=k_2(x-\frac{1}{2})$，$(k_1x-y-\frac{k_1}{2}+m)(k_2x-y-\frac{k_2}{2}+m)=0$，$x^2-\frac{y^2}{16}=1$，所以 $k_1k_2x^2+y^2-(k_1+k_2)xy+[m(k_1+k_2)-k_1k_2]x-(2m-\frac{k_1+k_2}{2})y+(m-\frac{k_1}{2})(m-\frac{k_2}{2})=0$，又因为过 A,P,B,Q 的二次曲线系方程为圆，$\therefore k_1+k_2=0$.

以上是几种常见的解法，此题其他解法还有，用代数法圆的定义及性质，复数法，双曲线的参数方程法，行列式法等，限于篇幅，此处从略. 留给有兴趣的读者可以作为练习.

4　试题溯源

4.1　教材题源

在普通高中人教 A 版数学选修 4－4 坐标系与参数方程第 38 页例 4 及其变式探究.

设 AB,CD 是中心为点 O 的椭圆的两条相交弦，交点为 P，两弦 AB,CD 与椭圆长轴的交角为 $\angle1,\angle2$，且 $\angle1=\angle2$，证明：$|PA|\cdot|PB|=|PC|\cdot|PD|$.

教材中例 4 的类比探究题，把椭圆改为双曲线？抛物线呢？

4.2　高考题源

1. (2002 年江苏高考数学试题) 设 A、B 是双曲线 $x^2-\frac{y^2}{2}=1$ 上的两点，点 $N(1,2)$ 是线段 AB 的中点. (Ⅰ) 求直线 AB 的方程. (Ⅱ) 如果线段 AB 的垂直平分线与双曲线相交于 C、D 两点，那么 A、B、C、D 四点是否共圆？为什么？

2. (2005 年湖北高考理科试题) 设 A、B 是椭圆 $3x^2+y^2=\lambda$ 上的两点，点 $N(1,3)$ 是线段 AB 的中点，线段 AB 的垂直平分线与椭圆相交于 C、D 两点.

(Ⅰ) 确定 λ 的取值范围，并求直线 AB 的方程；

(Ⅱ) 试判断是否存在这样的 λ，使得 A、B、C、D 四点在同一个圆上？并说明理由.

3. (2011 年全国高考理科试题) 已知 O 为坐标原点，F 为椭圆 C：$x^2+\frac{y^2}{2}=1$ 在 y 轴正半轴上的焦点，过 F 且斜率为 $-\sqrt{2}$ 的直线与 C 交与 A、B 两点，点 P 满足 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OP}=0$.

(Ⅰ) 证明：点 P 在 C 上；

(Ⅱ) 设点 P 关于点 O 的对称点为 Q，证明：A、P、B、Q 四点在同一圆上.

4. (2014 年全国高考试题) 已知抛物线 C：$y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，直线 $y=4$ 与 y 轴的交点为 P，与 C 的交点为 Q，且 $|QF|=\frac{5}{4}|PQ|$.

(1) 求 C 的方程；

(2) 过 F 的直线 l 与 C 相交于 A,B 两点，若 AB 的垂直平分线 l' 与 C 相交于 M,N 两点，且 A,M,B,N 四点在同一圆上，求 l 的方程.

5. (2016 年全国高考四川试题文科) 已知椭圆 E：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的一个焦点与短轴的两个端点是正三角形的三个顶点，点 $P(\sqrt{3},\frac{1}{2})$ 在椭圆 E 上.

(Ⅰ) 求椭圆 E 的方程；

(Ⅱ) 设不过原点 O 且斜率为 $\frac{1}{2}$ 的直线 l 与椭圆 E 交于不同的两点 A,B，线段 AB 的中点为 M，直线 OM 与椭圆 E 交于 C,D，证明：$|MA|\cdot|MB|=|MC|\cdot|MD|$.

4.3　竞赛题源

1. (2009 年江苏高中数学竞赛试题) 设抛物线 $y^2=2px$ 及点 $P(1,1)$，过点 P 的不重合的直线 l_1,l_2 与此抛物线分别交于点 A,B,C,D，证明：A,B,C,D 四点共圆的充要条件是直线 l_1,l_2 的倾斜角互补.

2. (2014 年湖北高中数学竞赛试题) 设 A,B 是双曲线 $x^2-\frac{y^2}{2}=\lambda$ 上的两点，点 $N(1,2)$ 是线段 AB 的中点，线段 AB 的垂直平分线交双曲线于 C，D 两点.

(1) 确定 λ 的取值范围；

(2) 试判断 A,B,C,D 四点是否共圆？并说明理由.

4　教学建议

在高考复习中，一定要加强三基的训练. 帮助

学生梳理教材知识结构,提炼结构版块;立足教材基本例题、习题,搞好变式研究,复习基础知识时要引导学生突出主干知识、抓住本学科各部分知识之间的联系和综合,形成知识之间的纵横联系的网络.

教师在教学中要选出最优秀的试题,最具典型性和最有价值的试题,讲题时渗透数学基本思想,让学生理解数学知识的本质,形成对知识的悟性,提高他们的数学思维品质及分析问题与解决问题的能力.

以数学思想方法的应用为例,函数与方程的思想、分类与整合的思想、转化与化归的思想等思想学生可谓耳熟能详,为什么考场上用不上?主要原因是平时教师生硬地将这些方法灌输给学生,学生食而不化,当然在考场上更不会熟练应用,所以重视数学思想方法的渗透和运用,要始终坚持指导学生自己进行数学思想和方法的提炼,让学生从思想上去揭示问题的本质.在解题后进行反思和提炼是成功的经验.发挥学生的主观能动性和教师的主导地位,要相信学生,要把思维还给学生,要让学生真正的成为学习的主人.同时督促学生抓好平时各个环节,比如审题要谨慎、推理要严密、表述要清楚、计算要准确等能力.

一个不等式在一类条件最值问题中的应用

山东省邹平市第一中学　(256200)　李　锋

江西省共青城市国科共青城实验学校　(332020)　姜坤崇

笔者在拙文[1]中给出了如下一个不等式并用其解决了三类条件最值问题:

命题　设 $a_i,b_i,c_i>0,i=1,2,3$,则 $(a_1^3+a_2^3+a_3^3)(b_1^3+b_2^3+b_3^3)(c_1^3+c_2^3+c_3^3)\geqslant(a_1b_1c_1+a_2b_2c_2+a_3b_3c_3)^3$($*$),当且仅当 $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3},\frac{b_1}{c_1}=\frac{b_2}{c_2}=\frac{b_3}{c_3}$ 时等号成立.

作为文[1]的续,本文我们应用不等式($*$)再给出一类条件最值问题的求解.

问题1　设 $l,m,n,p,q,r,x,y,z\in\mathbf{R}^+$,且 $lx+my+nz=1$,求 $px^3+qy^3+rz^3$ 的最小值.

解:令 $M=(l\sqrt{\frac{l}{p}}+m\sqrt{\frac{m}{q}}+n\sqrt{\frac{n}{r}})^2$,则 $\frac{1}{M}=\frac{pqr}{(l\sqrt{lqr}+m\sqrt{mrp}+n\sqrt{npq})^2}$,因为 $lx+my+nz=1$,所以由不等式($*$)得 $px^3+qy^3+rz^3=\frac{1}{M}\cdot(l\sqrt{\frac{l}{p}}+m\sqrt{\frac{m}{q}}+n\sqrt{\frac{n}{r}})(l\sqrt{\frac{l}{p}}+m\sqrt{\frac{m}{q}}+n\sqrt{\frac{n}{r}})(px^3+qy^3+rz^3)\geqslant\frac{1}{M}\left(\sqrt[3]{l\sqrt{\frac{l}{p}}}\cdot\sqrt[3]{l\sqrt{\frac{l}{p}}}\cdot\sqrt[3]{px^3}+\sqrt[3]{m\sqrt{\frac{m}{q}}}\cdot\sqrt[3]{m\sqrt{\frac{m}{q}}}\cdot\sqrt[3]{qy^3}+\sqrt[3]{n\sqrt{\frac{n}{r}}}\cdot\sqrt[3]{n\sqrt{\frac{n}{r}}}\cdot\sqrt[3]{rz^3}\right)^3=\frac{1}{M}(lx+my+nz)^3=\frac{1}{M}=\frac{pqr}{(l\sqrt{lqr}+m\sqrt{mrp}+n\sqrt{npq})^2}$,当且仅当 $\frac{\sqrt[3]{l\sqrt{\frac{l}{p}}}}{\sqrt[3]{l\sqrt{\frac{l}{p}}}}=\frac{\sqrt[3]{m\sqrt{\frac{m}{q}}}}{\sqrt[3]{m\sqrt{\frac{m}{q}}}}=\frac{\sqrt[3]{n\sqrt{\frac{n}{r}}}}{\sqrt[3]{n\sqrt{\frac{n}{r}}}},\frac{\sqrt[3]{l\sqrt{\frac{l}{p}}}}{\sqrt[3]{px^3}}=\frac{\sqrt[3]{m\sqrt{\frac{m}{q}}}}{\sqrt[3]{qy^3}}=\frac{\sqrt[3]{n\sqrt{\frac{n}{r}}}}{\sqrt[3]{rz^3}}$,且 $lx+my+nz=1$,即 $mp\sqrt{\frac{m}{q}}x^3=lq\sqrt{\frac{l}{p}}y^3,nq\sqrt{\frac{n}{r}}y^3=mr\sqrt{\frac{m}{q}}z^3,lx+my+nz=1$ 时上式等号成立,由此可解得 $x=\frac{\sqrt{lqr}}{l\sqrt{lqr}+m\sqrt{mrp}+n\sqrt{npq}}$,

$y=\frac{\sqrt{mrp}}{l\sqrt{lqr}+m\sqrt{mrp}+n\sqrt{npq}}$,

$z=\frac{\sqrt{npq}}{l\sqrt{lqr}+m\sqrt{mrp}+n\sqrt{npq}}$,所以当且仅当

$x=\frac{\sqrt{lqr}}{l\sqrt{lqr}+m\sqrt{mrp}+n\sqrt{npq}}$,

$y=\frac{\sqrt{mrp}}{l\sqrt{lqr}+m\sqrt{mrp}+n\sqrt{npq}}$,

$z=\frac{\sqrt{npq}}{l\sqrt{lqr}+m\sqrt{mrp}+n\sqrt{npq}}$ 时 $px^3+qy^3+rz^3$ 取得