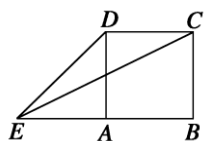
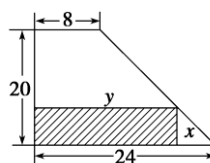


一、填空题:

1. 若命题 p 的否定是 “ $\forall x \in (0, +\infty), \sqrt{x} > x+1$ ”, 则命题 p 可写为_____.2. 函数 $f(x) = x + 2\cos x$ 在 $(0, \pi)$ 内的单调递减区间为_____.3. 不等式 $\frac{x-1}{2x+1} \leq 1$ 的解集为_____.4. 使 $\log_2(-x) < x+1$ 成立的 x 的取值范围是_____.5. 设函数 $f(x) = |x+1| + |x-a|$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称, 则 $a =$ _____.6. 若实数 A, B, C 为 $\triangle ABC$ 的三个内角, 则 $\frac{4}{A} + \frac{1}{B+C}$ 的最小值为_____.7. 若不等式 $12x^2 - ax < a^2 (a \in \mathbf{R})$ 的解集是 $[-4, 3]$ 的子集, 则 a 的取值范围是_____.8. 已知 $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 0$ 和 $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 0$, 则 $\cos(\alpha - \beta) =$ _____.9. 如图, 正方形 $ABCD$ 的边长为 1, 延长 BA 至 E , 使 $AE=1$, 连接 EC, ED , 则 $\sin \angle CED =$ _____.

← 第 9 题图

第 10 题图 →

10. 某厂有许多形状为直角梯形的铁皮边角料, 如图, 为降低消耗, 开源节流, 现要从这些边角料上截取矩形铁片(如图中阴影部分)备用, 当截取的矩形面积最大时, 矩形两边长 x, y 分别为 $x =$ _____, $y =$ _____.11. 已知函数 $f(x) = \ln x - \frac{m}{x} (m \in \mathbf{R})$ 在区间 $[1, e]$ 上取得最小值 4, 则 $m =$ _____.12. 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + x, & x < 0, \\ -x^2, & x \geq 0. \end{cases}$ 若 $f[f(a)] \leq 2$, 则实数 a 的取值范围是_____.13. 已知 $x, y \in \mathbf{R}$ 且满足 $x^2 + 2xy + 4y^2 = 6$, 则 $z = x^2 + 4y^2$ 的取值范围为_____.14. 若函数 $f(x) = e^x + x^3 - \frac{1}{2}x - 1$ 的图像上有且只有两点 P_1, P_2 , 使得函数 $g(x) = x^3 + \frac{m}{x}$ 的图像上存在两点 Q_1, Q_2 , 且 P_1 与 Q_1, P_2 与 Q_2 分别关于坐标原点对称, 则实数 m 的取值集合是_____.

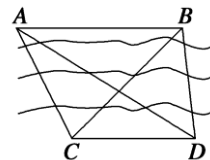
二、解答题：

1. 在 $\triangle ABC$ 中角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，且 $\frac{2\sin C - \sin B}{\sin B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{b^2 + c^2 - a^2}$ 。

(1) 求角 A 的大小；

(2) 若 $a = 3$ ， $\sin C = 2\sin B$ ，求 b, c 的值。

2. 要测量对岸 A, B 两点之间的距离，选取相距 $\sqrt{3}\text{km}$ 的 C, D 两点，并测得 $\angle ACB = 75^\circ$ ， $\angle BCD = 45^\circ$ ， $\angle ADC = 30^\circ$ ， $\angle ADB = 45^\circ$ ，求 A, B 之间的距离。



周末自助餐(5) 参考答案:

一、填空题:

1. 解析: $\exists x_0 \in (0, +\infty)$, $\sqrt{x_0} \leq x_0 + 1$.

2. 答案: $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$; 解析: 由 $f'(x) = 1 - 2\sin x < 0$ 及 $0 < x < \pi$ 得 $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$.

3. 解析: $\frac{x-1}{2x+1} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{x-1}{2x+1} - 1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-x-2}{2x+1} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x+2}{2x+1} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)(2x+1) \geq 0, \\ 2x+1 \neq 0. \end{cases}$

得 $\{x|x > -\frac{1}{2} \text{ 或 } x \leq -2\}$.

4. 解析: 在同一坐标系内作出 $y = \log_2(-x)$, $y = x+1$ 的图象, 知满足条件的 $x \in (-1, 0)$.

5. 解析: 因为函数 $f(x)$ 图象关于直线 $x=1$ 对称, 所以 $f(1+x) = f(1-x)$, 所以 $f(2) = f(0)$, $f(3) = f(-1)$. 即 $3 + |2-a| = 1 + |a|$, $4 + |3-a| = |-1-a|$ 解之可得 $a=3$.

6. 解析: 因为 $A + (B+C) = \pi$,

所以 $\frac{4}{A} + \frac{1}{B+C} = \frac{1}{\pi} (A+B+C) \left(\frac{4}{A} + \frac{1}{B+C} \right) = \frac{1}{\pi} \left[4 + \frac{A}{B+C} + \frac{4(B+C)}{A} + 1 \right] \geq \frac{9}{\pi}$,

当且仅当 $A = 2(B+C) = \frac{2\pi}{3}$ 时, 等号成立, 所以 $\frac{4}{A} + \frac{1}{B+C}$ 的最小值为 $\frac{9}{\pi}$.

7. 解析: 解析: 当 $a > 0$ 时, 不等式的解集为 $\left(-\frac{a}{4}, \frac{a}{3}\right)$, 可得 $\begin{cases} -\frac{a}{4} \geq -4 \\ \frac{a}{3} \leq 3 \end{cases}$, 所以 a 的取值范围是 $(0, 9]$,

当 $a=0$ 时, 不等式的解集为 $\emptyset$, 当 $a < 0$ 时, 不等式的解集为 $\left(\frac{a}{3}, -\frac{a}{4}\right)$,

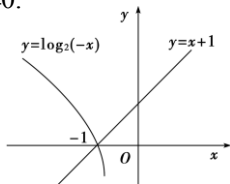
可得 $\begin{cases} \frac{a}{3} \geq -4 \\ -\frac{a}{4} \leq 3 \end{cases}$, 所以 a 的取值范围是 $[-12, 0)$.

8. 解析: 由已知得, $-\sin \gamma = \sin \alpha + \sin \beta$, ①, $-\cos \gamma = \cos \alpha + \cos \beta$, ②, ①² + ②² 得, $1 = 1 + 1 + 2\sin \alpha \sin \beta + 2\cos \alpha \cos \beta$, 化简得 $\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{2}$, 即 $\cos(\alpha - \beta) = -\frac{1}{2}$.

9. 解析: 因为四边形 $ABCD$ 是正方形, 且 $AE = AD = 1$, 所以 $\angle AED = \frac{\pi}{4}$. 又因为在 $\text{Rt}\triangle EBC$ 中, $EB = 2$, $BC = 1$, 所以 $\sin \angle BEC = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos \angle BEC = \frac{2\sqrt{5}}{5}$. 于是 $\sin \angle CED = \sin\left(\frac{\pi}{4} - \angle BEC\right)$
 $= \sin \frac{\pi}{4} \cos \angle BEC - \cos \frac{\pi}{4} \sin \angle BEC = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{2\sqrt{5}}{5} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{\sqrt{10}}{10}$.

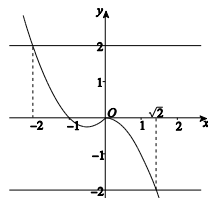
10. 解析: 由三角形相似得 $\frac{24-y}{24-8} = \frac{x}{20}$, 得 $x = \frac{5}{4}(24-y)$, 所以 $S = xy = -\frac{5}{4}(y-12)^2 + 180$, $8 < y < 24$, 所以当 $y=12$ 时, S 有最大值, 此时 $x=15$.

11. 解析: $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{m}{x^2} = \frac{x+m}{x^2}$, 令 $f(x) = 0$, 则 $x = -m$, 且当 $x < -m$ 时, $f(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减, 当 $x > -m$ 时, $f(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增. 若 $-m \leq 1$, 即 $m \geq -1$ 时, $f(x)_{\min} = f(1) = -m \leq 1$, 不可能等于 4; 若 $1 < -m \leq e$, 即 $-e \leq m < -1$ 时, $f(x)_{\min} = f(-m) = \ln(-m) + 1$, 令 $\ln(-m) + 1 = 4$, 得 $m = -e^3 \notin (-e, -1)$; 若 $-m > e$, 即 $m < -e$ 时,



$f(x)_{\min}=f(e)=1-\frac{m}{e}$, 令 $1-\frac{m}{e}=4$, 得 $m=-3e$, 符合题意. 综上 $m=-3e$.

12. 解析: 函数 $f(x)$ 的图像如图所示, 令 $t=f(a)$, 则 $f(t) \leq 2$, 由图像知 $t \geq -2$, 所以 $f(a) \geq -2$, 则 $a \leq \sqrt{2}$.



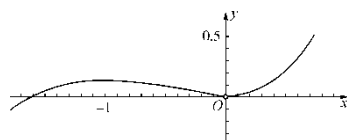
13. 解析: 因为 $2xy=6-(x^2+4y^2)$, 而 $2xy \leq \frac{x^2+4y^2}{2}$, 所以 $6-(x^2+4y^2) \leq \frac{x^2+4y^2}{2}$,

所以 $x^2+4y^2 \geq 4$ (当且仅当 $x=2y$ 时取等号). 又因为 $(x+2y)^2=6+2xy \geq 0$, 即 $2xy \geq -6$, 所以 $z=x^2+4y^2=6-2xy \leq 12$ (当且仅当 $x=-2y$ 时取等号).

综上可知 $4 \leq x^2+4y^2 \leq 12$.

14. 解析: 设函数 $f(x)$ 的图像上两点 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, 则 $Q_1(-x_1, -y_1)$, $Q_2(-x_2, -y_2)$, 故

$$\begin{cases} -\left(ex_1+x_1^3-\frac{1}{2}x_1-1\right)=-x_1^3+\frac{m}{-x_1}, \\ -\left(ex_2+x_2^3-\frac{1}{2}x_2-1\right)=-x_2^3+\frac{m}{-x_2}, \end{cases}$$



即方程 $-(e^x+x^3-\frac{1}{2}x-1)=-x^3-\frac{m}{x}$ 在 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 上有两解, 即方程 $xe^x-\frac{1}{2}x^2-x=m$ 在 $(-\infty,$

$0) \cup (0, +\infty)$ 上有两解, 即函数 $h(x)=xe^x-\frac{1}{2}x^2-x(x \neq 0)$ 的图像与 $y=m$ 的图像有两个交点, 令 $h'(x)$

$=(e^x-1)(x+1)=0$ 得, $x=0$ (舍去) 或 $x=-1$, 作出函数 $h(x)$ 图像知, 当且仅当 $x=-1$ 时有两解,

所以 $m=h(-1)=\frac{e-2}{2e}$.

二、解答题:

1. 解析: (1) 由正弦定理, 得 $\frac{2c-b}{b}=\frac{2\sin C-\sin B}{\sin B}$, 所以 $\frac{2c-b}{b}=\frac{a^2+c^2-b^2}{b^2+c^2-a^2}$.

整理, 得 $\frac{2c}{b}=\frac{a^2+c^2-b^2}{b^2+c^2-a^2}+1=\frac{2c^2}{b^2+c^2-a^2}$. 即 $\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1}{2}$.

由余弦定理, 得 $\cos A=\frac{1}{2}$, 所以 $A=\frac{\pi}{3}$.

(2) 由 $\sin C=2\sin B$ 及正弦定理, 得 $c=2b$. 由余弦定理, 得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$.

把 $a=3, c=2b, \cos A=\frac{1}{2}$ 代入上式, 得 $9=b^2+4b^2-2b^2$, 解得 $b=\sqrt{3}, c=2\sqrt{3}$.

2. 解析: 如图所示, 在 $\triangle ACD$ 中,

$\angle ACD=120^\circ, \angle CAD=\angle ADC=30^\circ$,

所以 $AC=CD=\sqrt{3}\text{km}$.

在 $\triangle BCD$ 中, $\angle BCD=45^\circ, \angle BDC=75^\circ, \angle CBD=60^\circ$.

所以 $BC=\frac{\sqrt{3}\sin 75^\circ}{\sin 60^\circ}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$.

在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理, 得

$$AB^2=(\sqrt{3})^2+\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)^2-2\times\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\times\cos 75^\circ=3+2+\sqrt{3}-\sqrt{3}=5,$$

所以 $AB=\sqrt{5}\text{km}$, 所以 A、B 之间的距离为 $\sqrt{5}\text{km}$.