加试 3

1. 用数学归纳法证明:

$$1 \times 2 \times 3 + 2 \times 3 \times 4 + \cdots + n \times (n+1) \times (n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} (n \in \mathbf{N}^*).$$

2. (1) 在 $(1+x)^n$ 的展开式中, 若第 3 项与第 6 项系数相等, 且 n 等于多少?

(2) $\left(x\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^n$ 的展开式奇数项的二项式系数和为 128, 则求展开式中二项式系数最大的项.

3. 一个袋中装有大小和质地都相同的 10 个球，其中黑球 4 个，白球 5 个，红球 1 个。

(1) 从袋中任意摸出 3 个球，记得到白球的个数为 X ，求随机变量 X 的概率分布和数学期望 $E(X)$ ；

(2) 每次从袋中随机地摸出一球，记下颜色后放回，求 3 次摸球后，摸到黑球的次数大于摸到白球的次数的概率。

4. 已知 $f(x) = (2 + \sqrt{x})^n$ ，其中 $n \in N^*$ 。

(1) 若展开式中含 x^3 项的系数为 14，求 n 的值；

(2) 当 $x = 3$ 时，求证： $f(x)$ 必可表示成 $\sqrt{s} + \sqrt{s-1}$ ($s \in N^*$) 的形式。