

小专题：圆锥曲线中最值（范围）问题

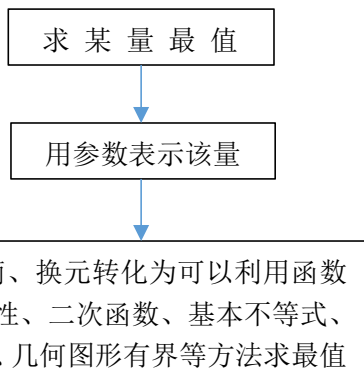
主备人：孙庆杨

审核人：李峰

最值（含范围）问题是解析几何中常见的问题之一，其基本解题方法是把所求量表示成某个变量的函数，利用二次函数或函数单调性求最值或范围，也可以利用基本不等式，有时也会利用几何量的有界性确定范围。

最值问题不仅解答题中分量较大，而且客观题中也时常出现。

求最值的思维导图如右



一、有关圆锥曲线上的点到定点（直线）距离的最值

例 1. 已知 $P(x, y)$ 是椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ 上一动点，则

(1) $(x-1)^2 + y^2$ 的最大值和最小值为_____和_____；(2) $\frac{y}{x-4}$ 的取值范围是_____.

变式 1: 已知 F 是椭圆 $C: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 的左焦点， P 为椭圆 C 上任意一点，点 $Q(4, 3)$ ，则 $PQ + PF$ 的最大值为_____.

变式 2: 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ ， P 为椭圆 C 上任意一点，直线 l 方程为 $y = x + 2$ ，则点 P 到直线 l 的最小值为_____，最大值为_____.

二、有关三角形面积最值问题

例 2. 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ ，点 $A(0, -2)$ ，过 A 作直线 l 交椭圆 E 于 P, Q 两点，则 $S_{\triangle OPQ}$ （ O 为原点）的最大值为_____.

变式 1: 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, 点 $A(1,0)$, 过 A 作直线 l 椭圆 E 于 P, Q 两点, 则 S_{OPQ} (O 为原点) 的最大值为_____.

变式 2: 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, 点 $A(1,0)$, 过 A 作椭圆的两条弦 CD, EF , 且 $k_{CD} \cdot k_{EF} = -\frac{1}{4}$, 则 S_{CEDF} 的最大值为_____.

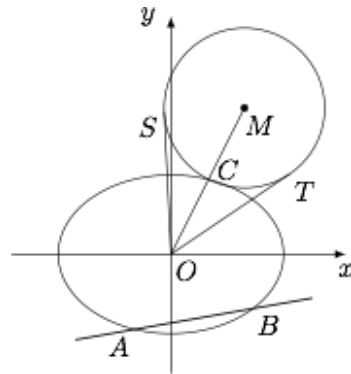
三、综合问题中最值问题

例 3 在平面直角坐标系 xOy 中, 椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 焦距为 2.

(1) 求椭圆 E 的方程;

(2) 如图, 动直线 $l: y = k_1 x - \frac{\sqrt{3}}{2}$ 交椭圆 E 于 A, B 两点, C 是椭圆 E 上一点, 直线 OC 的斜率为 k_2 ,

且 $k_1 k_2 = \frac{\sqrt{2}}{4}$. M 是线段 OC 延长线上一点, 且 $|MC| : |AB| = 2 : 3$, 圆 M 的半径为 $|MC|$, OS, OT 是圆 M 的两条切线, 切点分别为 S, T . 求 $\angle SOT$ 的最大值, 并求取得最大值时直线 l 的斜率.



达标检测

1. 已知点 P 是抛物线 $x = \frac{1}{4}y^2$ 上的一个动点, 则点 P 到点 A(0,2) 的距离与点 P 到 y 轴的距离之和的最小值为()

- A. 2 B. $\sqrt{5}$ C. $\sqrt{5} - 1$ D. $\sqrt{5} + 1$

2. 斜率为 1 的直线 l 与椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 相交于 A、B 两点, 则 |AB| 的最大值为()

- A. 2 B. $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ C. $\frac{4\sqrt{10}}{5}$ D. $\frac{8\sqrt{10}}{5}$

3. 设双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 . 若点 P 在双曲线上, 且 $\triangle F_1PF_2$ 为锐角三角形, 则点 P 的横坐标的取值范围是 ()

- A. $(-2, 2)$ B. $(-\frac{\sqrt{7}}{2}, \frac{\sqrt{7}}{2})$
C. $(-2, -\frac{\sqrt{7}}{2}) \cup (\frac{\sqrt{7}}{2}, 2)$ D. $(-\frac{\sqrt{7}}{2}, -1) \cup (1, \frac{\sqrt{7}}{2})$

4. 已知等轴双曲线的焦距为 4, 左、右焦点 F_1, F_2 在 x 轴上, 中心在原点, 点 A 的坐标为(3,1), P 为双曲线右支上一动点, 则 $|PF_2| + |PA|$ 的最小值为()

- A. $\sqrt{19} + 4\sqrt{2}$ B. $\sqrt{19} + 2\sqrt{2}$ C. $\sqrt{26} - 2\sqrt{2}$ D. $\sqrt{2}$

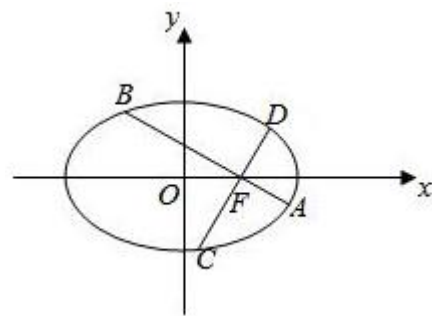
5. 若直线 $y = kx + 2$ 与双曲线 $x^2 - y^2 = 6$ 的左支交于不同的两点, 则 k 取值范围是()

- A. $(-\frac{\sqrt{15}}{3}, \frac{\sqrt{15}}{3})$ B. $(0, \frac{\sqrt{15}}{3})$
C. $(1, \frac{\sqrt{15}}{3})$ D. $(-\frac{\sqrt{15}}{3}, -1)$

6. 点 P 的坐标(x,y)满足方程 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$, 点 B(0,1), 则 |PB| 的最大值为()

- A. 1 B. 3 C. $\sqrt{10}$ D. $2\sqrt{3}$

7. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$ ，过椭圆右焦点 F 作两条互相垂直的弦 AB 与 CD . 当直线 AB 斜率为 0 时， $AB + CD = 7$.



(1) 求椭圆的方程；

(2) 求 $AB + CD$ 的取值范围.

8. 已知点 $A(-2, 0)$ ， $B(2, 0)$ ，动点 $M(x, y)$ 满足直线 AM 与 BM 的斜率之积为 $-\frac{1}{2}$. 记 M 的轨迹为曲线 C .

(1) 求 C 的方程，并说明 C 是什么曲线；

(2) 过坐标原点的直线交 C 于 P ， Q 两点，点 P 在第一象限， $PE \perp x$ 轴，垂足为 E ，连结 QE 并延长交 C 于点 G . (i) 证明： $\triangle PQG$ 是直角三角形；(ii) 求 $\triangle PQG$ 面积的最大值.

答案

例 1 解析

$$(1) (x-1)^2 + y^2 = \frac{4}{9}x^2 - 2x + 6, \quad x \in [-3, 3]$$

$$\text{对称轴为 } x = \frac{9}{4} \in [-3, 3]$$

$$x = \frac{9}{4} \text{ 时, } y_{\min} = \frac{5}{4};$$

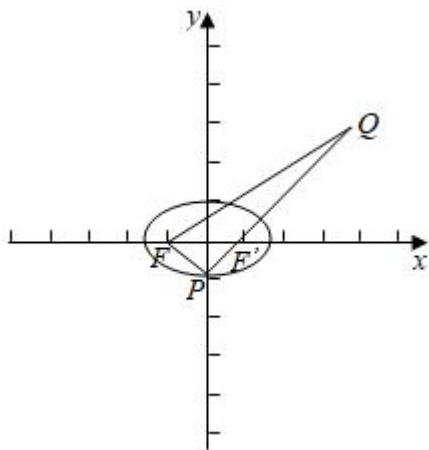
$$x = -3 \text{ 时, } y_{\max} = 16$$

$$(2) \text{ 令 } \frac{y}{x-4} = k, \quad \begin{cases} y = k(x-4) \\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1 \end{cases}$$

$$(5+9k^2)x^2 - 72k^2x + 144k^2 - 45 = 0$$

$$\Delta \geq 0 \Rightarrow k \in \left[-\frac{\sqrt{35}}{7}, \frac{\sqrt{35}}{7}\right]$$

变式 1: 解: $\because$ 点 F 为椭圆 $C: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 的左焦点, $\therefore F(-1, 0)$,



$\because$ 点 P 为椭圆 C 上任意一点, 点 Q 的坐标为 (4, 3),

设椭圆 C 的右焦点为 $F'(1, 0)$,

$$\therefore |PQ| + |PF| = |PQ| + 2\sqrt{2} - |PF'| = 2\sqrt{2} + |PQ| - |PF'|,$$

$$\because |PQ| - |PF'| \leq |QF'| = 3\sqrt{2},$$

$\therefore |PQ| + |PF| \leq 5\sqrt{2}$, 即 $|PQ| + |PF|$ 最大值为 $5\sqrt{2}$, 此时 Q, F' , P 共线.

变式 2: 最小值 $\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$, 最大值为 $\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$.

例2 解析 解1 由题意知, 直线 l 斜率存在, 故设直线方程 $l: y = kx - 2$,

联立椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 得 $(4k^2 + 1)x^2 - 16kx + 12 = 0$,

$$\Delta = 256k^2 - 48(4k^2 + 1) = 64k^2 - 48 > 0,$$

$$\therefore k^2 > \frac{3}{4}, \quad x_1 + x_2 = \frac{16k}{4k^2 + 1}, \quad x_1 x_2 = \frac{12}{4k^2 + 1},$$

$$\text{点 } O \text{ 直线 } l \text{ 的距离为 } d = \frac{2}{\sqrt{k^2 + 1}},$$

$$\text{弦长 } PQ = \sqrt{k^2 + 1} \cdot \sqrt{\left(\frac{16k}{4k^2 + 1}\right)^2 - \frac{48}{4k^2 + 1}} = \sqrt{k^2 + 1} \cdot \sqrt{\frac{64k^2 - 48}{(4k^2 + 1)^2}},$$

$$S_{\triangle OPQ} = \frac{1}{2} \cdot d \cdot PQ = \sqrt{\frac{64k^2 - 48}{(4k^2 + 1)^2}},$$

令 $4k^2 + 1 = t, t > 4$, 则 $4k^2 - 3 = t - 4$,

$$\therefore S_{\triangle OPQ} = 4\sqrt{\frac{t-4}{t^2}} = 4\sqrt{-\frac{4}{t^2} + \frac{1}{t}} = 4\sqrt{-4\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{8}\right)^2 + \frac{1}{16}} \leq 1,$$

当且仅当 $t = 8$ 时, 等号成立

$\therefore S_{\triangle OPQ}$ 的最大值为 1.

$$\text{解2 } S_{\triangle OPQ} = S_{\triangle OAQ} - S_{\triangle OAP} = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot |x_2| - \frac{1}{2} \cdot OA \cdot |x_1| = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot |x_2 - x_1|.$$

变式1: 解1 设直线方程 $l: x = my + 1$,

联立椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 得 $(m^2 + 4)y^2 + 2my - 3 = 0$,

$$y_1 + y_2 = -\frac{2m}{m^2 + 4}, \quad y_1 y_2 = -\frac{3}{m^2 + 4},$$

$$\text{点 } O \text{ 直线 } l \text{ 的距离为 } d = \frac{1}{\sqrt{m^2 + 1}},$$

$$\text{弦长 } PQ = \sqrt{m^2 + 1} \cdot \sqrt{\left(-\frac{2m}{m^2 + 4}\right)^2 + \frac{12}{m^2 + 4}} = \sqrt{m^2 + 1} \cdot \sqrt{\frac{16m^2 + 48}{(m^2 + 4)^2}},$$

$$S_{\triangle OPQ} = \frac{1}{2} \cdot d \cdot PQ = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{16m^2 + 48}{(m^2 + 4)^2}},$$

令 $m^2 + 4 = t, t \geq 4$, 则 $m^2 + 3 = t - 1$,

$$\therefore S_{\Delta OPQ} = 2\sqrt{\frac{t-1}{t^2}} = 2\sqrt{-\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t}} = 2\sqrt{-\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}} \leq \frac{\sqrt{3}}{2},$$

当且仅当 $t = 4$ 时, 等号成立

$$\therefore S_{\Delta OPQ} \text{ 的最大值为 } \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{解 2 } S_{\Delta OPQ} = S_{\Delta OAQ} + S_{\Delta OAP} = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot |y_2| + \frac{1}{2} \cdot OA \cdot |y_1| = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot |y_2 - y_1|.$$

变式 2: 设直线 CD 方程: $y = k_1(x-1)$,

$$\text{联立椭圆 } C: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \text{ 得 } (4k_1^2 + 1)x^2 - 8k_1^2x + 4k_1^2 - 4 = 0,$$

$$x_1 + x_2 = \frac{8k_1^2}{4k_1^2 + 1}, x_1x_2 = \frac{4k_1^2 - 4}{4k_1^2 + 1},$$

$$\text{弦长 } CD = \sqrt{k_1^2 + 1} \cdot \sqrt{\left(\frac{8k_1^2}{4k_1^2 + 1}\right)^2 - \frac{16k_1^2 - 16}{4k_1^2 + 1}} = \sqrt{k_1^2 + 1} \cdot \sqrt{\frac{48k_1^2 + 16}{(4k_1^2 + 1)^2}},$$

$$\text{同理, 弦长 } EF = \sqrt{k_2^2 + 1} \cdot \sqrt{\frac{48k_2^2 + 16}{(4k_2^2 + 1)^2}},$$

$$\therefore S_{\text{四边形} CEDF} = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot EF \cdot \sin \theta (\theta \text{ 为 } CD \text{ 与 } EF \text{ 的夹角})$$

$$\text{令 } \because \tan \alpha = |k_1|, \tan \beta = |k_2|, \therefore \tan \alpha \cdot \tan \beta = \frac{1}{4}, \therefore \theta = \alpha + \beta$$

$$\therefore \sin \theta = \sin(\alpha + \beta) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\tan^2(\alpha + \beta)}}} = 2\sqrt{\frac{4(k_1^2 + k_2^2) + 2}{17 + 16(k_1^2 + k_2^2)}}$$

$$\begin{aligned} \therefore S_{\text{四边形} CEDF} &= \frac{1}{2} \cdot CD \cdot EF \cdot \sin \theta = 16 \sqrt{\frac{4(k_1^2 + k_2^2) + 2}{17 + 16(k_1^2 + k_2^2)}} \cdot \sqrt{\frac{(3k_1^2 + 1)(3k_2^2 + 1)}{(4k_1^2 + 1)(4k_2^2 + 1)}} \cdot \sqrt{(k_1^2 + 1)(k_2^2 + 1)} \\ &= \sqrt{12 + \frac{1}{2 + 4(k_1^2 + k_2^2)}} \leq \sqrt{12 + \frac{1}{2 + 8|k_1k_2|}} = \frac{7}{2} \end{aligned}$$

例 3 解析 (1) 由题意知 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $2c = 2$, 所以 $a = \sqrt{2}, b = 1$, 因此 椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$.

$$(2) \text{ 设 } \angle SOM = \theta, \text{ 则 } \angle SOT = 2\theta, \text{ 且 } \sin \theta = \frac{|MC|}{|OM|} = \frac{\frac{2}{3}|AB|}{|OC| + \frac{2}{3}|AB|} = \frac{2}{2+3 \cdot \frac{|OC|}{|AB|}}.$$

$$\text{设 } A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), \text{ 联立方程 } \begin{cases} \frac{x^2}{2} + y^2 = 1, \\ y = k_1 x - \frac{\sqrt{3}}{2}, \end{cases} \text{ 得 } (4k_1^2 + 2)x^2 - 4\sqrt{3}k_1 x - 1 = 0,$$

$$\text{由题意知 } \Delta > 0, \text{ 且 } x_1 + x_2 = \frac{2\sqrt{3}k_1}{2k_1^2 + 1}, x_1 x_2 = -\frac{1}{2(2k_1^2 + 1)}, \text{ 故}$$

$$|AB| = \sqrt{1+k_1^2} |x_1 - x_2| = \sqrt{1+k_1^2} \cdot \frac{\sqrt{4k_1^2 + \frac{1}{2}}}{\frac{1}{2} + k_1^2}.$$

$$\text{联立方程 } \begin{cases} \frac{x^2}{2} + y^2 = 1 \\ y = \frac{\sqrt{2}}{4k_1} x \end{cases} \text{ 得 } x^2 = \frac{8k_1^2}{1+4k_1^2}, y^2 = \frac{1}{1+4k_1^2}, \text{ 因此 } |OC| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\frac{1+8k_1^2}{1+4k_1^2}}.$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } \frac{|OC|}{|AB|} &= \frac{\sqrt{k_1^2 + \frac{1}{8}}}{\sqrt{\frac{1}{2}k_1^2 + \frac{1}{8}}} \cdot \frac{\frac{1}{2} + k_1^2}{\sqrt{1+k_1^2} \cdot \sqrt{4k_1^2 + \frac{1}{2}}}, \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{k_1^2 + \frac{1}{2}}{\sqrt{k_1^2 + \frac{1}{4}} \cdot \sqrt{4k_1^2 + \frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{4k_1^2 + \frac{1}{k_1^2} + 5}}, \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{2\sqrt{4k_1^2 \cdot \frac{1}{k_1^2}} + 5}} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

$$\text{等号当且仅当 } k_1^2 = \frac{1}{2} \text{ 时取得. 因此 } \sin \theta \text{ 的最大值为 } \frac{2}{2+3 \cdot \frac{2}{3}} = \frac{1}{2}, \text{ 从而 } \angle SOT \text{ 的最大值为 } \frac{\pi}{3}, \text{ 此}$$

$$\text{时直线 } l \text{ 的斜率为 } k_1 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{注 } \frac{|OC|}{|AB|} = \frac{\sqrt{1+8k_1^2}}{\sqrt{1+4k_1^2}} \cdot \frac{\frac{1}{2} + k_1^2}{\sqrt{1+k_1^2} \cdot \sqrt{4k_1^2 + \frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1+2k_1^2}{\sqrt{1+4k_1^2} \sqrt{1+k_1^2}}.$$

令 $t = 1 + 2k_1^2, t > 1, \frac{1}{t} \in (0, 1)$, 则 $k_1^2 = \frac{t-1}{2}$, 代入上式整理得

$$\frac{|OC|}{|AB|} = \frac{t}{\sqrt{2t^2 + t - 1}} = \frac{1}{\sqrt{-(\frac{1}{t} - \frac{1}{2})^2 + \frac{9}{4}}}.$$

当且仅当 $\frac{1}{t} = \frac{1}{2}$, 即 $t = 2$ 时 $\frac{|OC|}{|AB|}$ 的最小值 $\frac{2}{3}$, 此时 $k_1 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$.

达标检测

1. 解: 抛物线 $x = \frac{1}{4}y^2$, 即: $y^2 = 4x$,

可得抛物线 $x = \frac{1}{4}y^2$ 的焦点坐标为 $(1, 0)$, 准线方程为 $x = -1$,

可知: 点 P 到 y 轴的距离, 就是 P 到该抛物线准线的距离减去 1, 即为: P 到该抛物线焦点的距离减去 1,

可知: 点 P 到点 $A(0, 2)$ 的距离与点 P 到 y 轴的距离之和的最小值, 即为点 $A(0, 2)$ 到该抛物线焦点 $(1, 0)$ 的距离减去 1,

$$\text{可得 } \sqrt{(0-1)^2 + (2-0)^2} - 1 = \sqrt{5} - 1,$$

所以点 P 到点 $A(0, 2)$ 的距离与点 P 到 y 轴的距离之和的最小值为 $\sqrt{5} - 1$,

故选 C.

2. 解: 设直线 l 的方程为 $y = x + m$,

$$\text{所以 } \begin{cases} y = x + m \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases}, \text{ 整理得, } 5x^2 + 8xm + 4m^2 - 4 = 0,$$

$$\text{所以 } \Delta = -16m^2 + 80 > 0, \text{ 解得 } -\sqrt{5} < m < \sqrt{5},$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{8m}{5}, \quad x_1 x_2 = \frac{4m^2 - 4}{5},$$

$$\text{所以 } |AB| = \sqrt{1+1} \cdot \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{64^2}{25} - \frac{4(4m^2 - 4)}{5}} = \frac{\sqrt{2}}{5} \sqrt{-16m^2 + 80} \leq \frac{4\sqrt{10}}{5},$$

故选 C.

3.解: 双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$,

$$a = 1, b = \sqrt{3}, c = 2,$$

故离心率 $e = 2$,

设 $P(x, y)$ 是双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ 上任意一点,

由对称性不妨设 P 在右支上,

要使 $\triangle F_1PF_2$ 为锐角三角形,

则 $1 < x < 2$, $|PF_1| = 2x + 1$, $|PF_2| = 2x - 1$, $\angle F_1PF_2$ 为锐角,

$$\text{则 } |PF_1|^2 + |PF_2|^2 > |F_1F_2|^2,$$

$$\therefore (2x + 1)^2 + (2x - 1)^2 > 4^2,$$

$$\text{解得 } x > \frac{\sqrt{7}}{2},$$

$$\therefore \frac{\sqrt{7}}{2} < x < 2,$$

根据对称性, 点 P 在左支时, $-2 < x < -\frac{\sqrt{7}}{2}$,

所以点 P 的横坐标的取值范围是 $(-2, -\frac{\sqrt{7}}{2}) \cup (\frac{\sqrt{7}}{2}, 2)$.

故选 C.

4.解: $\because$ 等轴双曲线的焦距为 4, $\therefore 2c = 4$, $a = b$, $\therefore c = 2$,

$$\therefore a^2 + b^2 = c^2, \therefore a = b = \sqrt{2},$$

又 $F_1(-2, 0)$, 由 P 为双曲线右支上一动点, 则 $|PF_1| - |PF_2| = 2a = 2\sqrt{2}$,

$\therefore$ 点 A 的坐标为 $(3, 1)$,

$$\text{则 } |PF_2| + |PA| = |PA| + |PF_1| - 2\sqrt{2} > |AF_1| - 2\sqrt{2} = \sqrt{26} - 2\sqrt{2}.$$

故选 C.

5 解: 联立方程 $\begin{cases} y = kx + 2 \\ x^2 - y^2 = 6 \end{cases}$ 得

$$(1 - k^2)x^2 - 4kx - 10 = 0 \dots \textcircled{1}$$

若直线 $y = kx + 2$ 与双曲线 $x^2 - y^2 = 6$ 的左支交于不同的两点,

则方程 $\textcircled{1}$ 有两个不等的负根, $1 - k^2 \neq 0$ 且

$$\therefore \begin{cases} \Delta = 16k^2 + 40(1 - k^2) > 0 \\ \frac{-10}{1 - k^2} > 0 \\ \frac{4k}{1 - k^2} < 0 \end{cases}$$

$$\text{解得: } k \in (1, \frac{\sqrt{15}}{3})$$

故选 C.

6.解: 点 P 的坐标 (x, y) 满足方程 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$, 点 $B(0, 1)$,

$$\text{则 } |PB| = \sqrt{x^2 + (y - 1)^2} = \sqrt{8 - 2y^2 + y^2 - 2y + 1} = \sqrt{-y^2 - 2y + 9} = \sqrt{-(y + 1)^2 + 10} \leq \sqrt{10},$$

当且仅当 $y = -1$ 时, 表达式取得最大值.

故选: C.

7. 解析: (1) 由题意知, $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$, $CD = 7 - 2a$,

所以 $a^2 = 4c^2$, $b^2 = 3c^2$,

因为点 $(c, \frac{7-4c}{2})$ 在椭圆上,

$$\text{即 } \frac{c^2}{4c^2} + \frac{(\frac{7-4c}{2})^2}{3c^2} = 1,$$

解得 $c = 1$.

所以椭圆的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

(2) ① 当两条弦中一条斜率为 0 时, 另一条弦的斜率不存在, 由题意知 $AB + CD = 7$;

② 当两弦斜率均存在且不为 0 时, 设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 且设直线 AB 的方程为 $y = k(x - 1)$,

则直线 CD 的方程为 $y = -\frac{1}{k}(x - 1)$.

将直线 AB 的方程代入椭圆方程中,

并整理得 $(3 + 4k^2)x^2 - 8k^2x + 4k^2 - 12 = 0$,

$$\text{所以 } x_1 = \frac{4k^2 - 6\sqrt{k^2 + 1}}{3 + 4k^2}, \quad x_2 = \frac{4k^2 + 6\sqrt{k^2 + 1}}{3 + 4k^2},$$

$$\text{所以 } AB = \sqrt{k^2 + 1}|x_1 - x_2| = \frac{12(k^2 + 1)}{3 + 4k^2}.$$

$$\text{同理, } CD = \frac{12(\frac{1}{k^2} + 1)}{3 + \frac{4}{k^2}} = \frac{12(k^2 + 1)}{3k^2 + 4}.$$

$$\text{所以 } AB + CD = \frac{12(k^2 + 1)}{3 + 4k^2} + \frac{12(k^2 + 1)}{3k^2 + 4} = \frac{84(k^2 + 1)^2}{(3 + 4k^2)(3k^2 + 4)},$$

令 $t = k^2 + 1$, 则 $t > 1$, $3 + 4k^2 = 4t - 1$, $3k^2 + 4 = 3t + 1$,

$$\text{设 } f(t) = \frac{(4t-1)(3t+1)}{t^2} = -\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t} + 12 = -(\frac{1}{t} - \frac{1}{2})^2 + \frac{49}{4},$$

因为 $t > 1$, 所以 $\frac{1}{t} \in (0, 1)$,

所以 $f(t) \in (12, \frac{49}{4}]$,

$$\text{所以 } AB + CD = \frac{84}{f(t)} \in [\frac{48}{7}, 7).$$

综合 ① 与 ② 可知, $AB + CD$ 的取值范围是 $[\frac{48}{7}, 7]$.

8. 解析 (1) 由题, 得 $\frac{y}{x+2} \cdot \frac{y}{x-2} = -\frac{1}{2}$ ($x \neq \pm 2$), 即 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ ($x \neq \pm 2$), 所以曲线 C 为

$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ ($x \neq \pm 2$), 表示焦点在 x 轴上, 长轴长为 4 的椭圆 (除去左右定点).

(2) (i) 设直线 PQ 的方程为 $y=kx (k>0)$ $P(x_1, y_1), G((x_0, y_0))$, 则 $Q(-x_1, -y_1), E(x_1, 0)$, $k = \frac{y_1}{x_1}$.

由此可得 $Q、E、G$ 三点共线: $k_{QG} = k_{EQ} = \frac{y_1}{2x_1} = \frac{k}{2}$,

$$\text{由 } k_{PG} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}, k_{GQ} = \frac{-y_1 - y_0}{-x_1 - x_0} = \frac{y_1 + y_0}{x_1 + x_0}, k_{PG} \cdot k_{GQ} = \frac{y_1^2 - y_0^2}{x_1^2 - x_0^2}$$

因为 $Q、G$ 在椭圆上, 所以 $x_1^2 + 2y_1^2 = 4, x_0^2 + 2y_0^2 = 4$, 可得 $k_{PG} \cdot k_{GQ} = -\frac{1}{2}$, 从而 $k_{PG} \cdot k_{GQ} = k_{PG} \cdot \frac{k}{2} = -\frac{1}{2}$, $k_{PG} = -\frac{1}{k}$, 所以 $k_{PG} \cdot k_{PQ} = -1$, 即 $PQ \perp PG$.

所以 $\triangle PQG$ 是直角三角形。

解 2 设直线 PQ 的方程为 $y=kx$, 由题意可知 $k>0$, 直线 PQ 的方程与椭圆方程联立, 即

$$\begin{cases} y=kx, \\ x^2+2y^2=4. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{2}{\sqrt{2k^2+1}}, \\ y=\frac{2k}{\sqrt{2k^2+1}}. \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x=\frac{-2}{\sqrt{2k^2+1}}, \\ y=\frac{-2k}{\sqrt{2k^2+1}}. \end{cases}, \text{ 点 } P \text{ 在第一象限, 所以}$$

$$P(\frac{2}{\sqrt{2k^2+1}}, \frac{2k}{\sqrt{2k^2+1}}), Q(\frac{-2}{\sqrt{2k^2+1}}, \frac{-2k}{\sqrt{2k^2+1}}), \text{ 因此点 } E \text{ 的坐标为 } (\frac{2}{\sqrt{2k^2+1}}, 0)$$

直线 QE 的斜率为 $k_{QE} = \frac{k}{2}$, 可得直线 QE 方程: $y = \frac{k}{2}x - \frac{k}{\sqrt{2k^2+1}}$, 与椭圆方程联立, $\begin{cases} y = \frac{k}{2}x - \frac{k}{\sqrt{2k^2+1}}, \\ x^2 + 2y^2 = 4. \end{cases}$

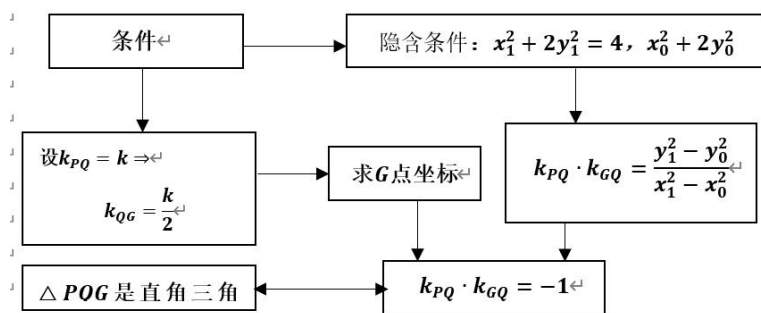
消去 y 得, $(2+k^2)x^2 - \frac{4k^2x}{\sqrt{2k^2+1}} - \frac{12k^2+8}{2k^2+1} = 0$ (*), 设点 $G(x_1, y_1)$, 显然 Q 点的横坐标 $\frac{-2}{\sqrt{2k^2+1}}$ 和 x_1 是方程 (*) 的解

所以有 $x_1 \cdot \frac{-2}{\sqrt{2k^2+1}} = \frac{-\frac{12k^2+8}{2k^2+1}}{2+k^2} \Rightarrow x_1 = \frac{6k^2+4}{(k^2+2)\sqrt{2k^2+1}}$, 代入直线 QE 方程中, 得

$$y_1 = \frac{2k^3}{(k^2+2)\sqrt{2k^2+1}}, \text{ 所以点 } G \text{ 的坐标为 } (\frac{6k^2+4}{(k^2+2)\sqrt{2k^2+1}}, \frac{2k^3}{(k^2+2)\sqrt{2k^2+1}}),$$

$$\text{直线 } PG \text{ 的斜率为: } k_{PG} = \frac{\frac{2k^3}{(k^2+2)\sqrt{2k^2+1}} - \frac{2k}{\sqrt{2k^2+1}}}{\frac{6k^2+4}{(k^2+2)\sqrt{2k^2+1}} - \frac{2}{\sqrt{2k^2+1}}} = \frac{2k^3 - 2k(k^2+2)}{6k^2+4 - 2(k^2+2)} = -\frac{1}{k}$$

因为 $k_{PQ}k_{PG} = k \cdot (-\frac{1}{k}) = -1$, 所以 $PQ \perp PG$, 因此 $\triangle PQG$ 是直角三角形。本题思维导图如下:



(2) (ii) **解 1** 设直线 PQ 斜率为 k ($k > 0$), $P(x_1, y_1)$, $G(x_0, y_0)$, 则 $Q(-x_1, -y_1)$.

设 M 为 QG 的中点, 则 $k_{OM} = -\frac{1}{k}$, 由 (1) 知, 直线 QG 的方程为 $y = \frac{k}{2}(x - x_1)$,

$$\text{由 } \begin{cases} y = -\frac{x}{k}, \\ y = \frac{k}{2}(x - x_1), \end{cases} \text{ 解得 } x_M = \frac{k^2 x_1}{k^2 + 2}.$$

直线 PQ 的方程与椭圆方程联立, 即 $\begin{cases} y = kx, \\ x^2 + 2y^2 = 4, \end{cases}$ 解得 $x_1 = \frac{2}{\sqrt{1+2k^2}}$.

$$\text{所以 } S_{\triangle OQM} = \frac{1}{2} |OQ| \cdot |OM| = \frac{1}{2} \sqrt{1+k^2} \cdot |x_Q| \cdot \sqrt{1+\left(\frac{1}{k}\right)^2} \cdot |x_M| =$$

$$\frac{1}{2} \frac{(1+k^2)x_1^2}{k^2+2} = \frac{2k(k^2+1)}{(2k^2+1)(k^2+2)}.$$

$$\text{所以 } S_{\triangle PQG} = 4S_{\triangle OQM} = \frac{8k(k^2+1)}{(2k^2+1)(k^2+2)}.$$

(ii) **解 2** 直线 QG 的方程与椭圆方程联立, 得方程组 $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 4, \\ y = \frac{k}{2}(x - x_1), \end{cases}$

消去 y 得 $(k^2 + 2)x^2 - 2k^2 x_1 x + k^2 x^2 - 8 = 0$.

由韦达定理得 $x_G + x_Q = \frac{2k^2 x_1}{k^2 + 2}$, 由弦长公式得 $|PQ| = 2x_1 \sqrt{1+k^2}$,

$$|PG| = \sqrt{1 + \left(-\frac{1}{k}\right)^2} \cdot |x_P - x_G| = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{k}\right)^2} \cdot |x_Q + x_P| = \frac{kx_1 \sqrt{1+k^2}}{k^2 + 2}.$$

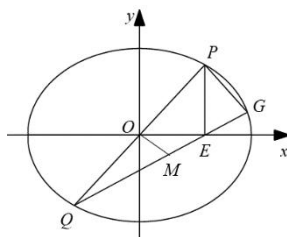
$$\text{所以 } S_{\triangle PQG} = \frac{8k(k^2+1)}{(2k^2+1)(k^2+2)}.$$

(ii) **解 3** 可知 P, Q, G 三点坐标, $\triangle PQG$ 是直角三角形, 求出 PQ, PG 的长, 利用面积公式求出 $\triangle PQG$ 的面积, 再利用导数求出面积的最大值.

$$\text{由 (i) 可知: } P\left(\frac{2}{\sqrt{2k^2+1}}, \frac{2k}{\sqrt{2k^2+1}}\right), Q\left(\frac{-2}{\sqrt{2k^2+1}}, \frac{-2k}{\sqrt{2k^2+1}}\right),$$

$$G \text{ 的坐标为 } \left(\frac{6k^2+4}{(k^2+2)\sqrt{2k^2+1}}, \frac{2k^3}{(k^2+2)\sqrt{2k^2+1}}\right),$$

$$PQ = \frac{4\sqrt{1+k^2}}{\sqrt{2k^2+1}}, \quad PG = \frac{4k\sqrt{k^2+1}}{(k^2+2)\sqrt{2k^2+1}},$$



$$S_{\Delta PQG} = \frac{1}{2} |PG| |PQ| = \frac{1}{2} \times \frac{4k\sqrt{k^2+1}}{(k^2+2)\sqrt{2k^2+1}} \cdot \frac{4\sqrt{1+k^2}}{\sqrt{2k^2+1}} = \frac{8k(k^2+1)}{(2k^2+1)(k^2+2)}.$$

$$\text{亦或 } S_{\Delta PQG} = \frac{1}{2} |PE| |x_G - x_Q| = \frac{8k(k^2+1)}{(2k^2+1)(k^2+2)}.$$

求该函数的最大值有以下两种处理方式：

$$\text{解 1 } \frac{8k(k^2+1)}{(2k^2+1)(k^2+2)} = \frac{8(\frac{1}{k}+k)}{1+2(\frac{1}{k}+k)^2}.$$

设 $t = \frac{1}{k} + k$ ，则由 $k > 0$ 得 $t \geq 2$ ，当且仅当 $k=1$ 时取等号. 因为 $S = \frac{8t}{1+t^2}$ 在 $[2, +\infty)$ 单调递减，所以当 $t=2$ ，即 $k=1$ 时， S 取得最大值，最大值为 $\frac{16}{9}$.

$$\text{解 2 } S = \frac{8k(k^2+1)}{(2k^2+1)(k^2+2)} = \frac{8(k^3+k)}{2k^4+5k^2+2}, \quad S' = \frac{-8(k+1)(k-1)(2k^4+3k^2+2)}{(2k^4+5k^2+2)^2},$$
 因为 $k > 0$ ，所以当

$0 < k < 1$ 时， $S' > 0$ ，函数 $S(k)$ 单调递增，当 $k > 1$ 时， $S' < 0$ ，函数 $S(k)$ 单调递减，因此当 $k=1$ 时，函数 $S(k)$ 有最大值，最大值为 $S(1) = \frac{16}{9}$.

因此， ΔPQG 面积的最大值为 $\frac{16}{9}$.

第 (ii) 题的思维导图：

