

江苏省仪征中学 2020—2021 学年度第一学期高二数学

周末练习 (11)

一、单项选择题 (本大题共 8 小题, 每小题 5 分, 共计 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一个符合题目要求的, 请把答案添涂在答题卡相应位置上)

1. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 若长轴长为 6, 且两焦点恰好将长轴三等分, 则此椭圆的标准方程为 (▲)

- A. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$ B. $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{32} = 1$ C. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ D. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$

2. 《九章算术》是我国古代的数学名著, 书中有如下问题: “今有大夫、不更、簪裹、上造、公士, 凡五人, 共猎得五鹿, 欲以爵次分之, 问各得几何?” 其意思: “共有五头鹿, 5 人以爵次进行分配 (古代数学中 “以爵次分之” 这种表述, 一般表示等差分配, 在本题中表示等差分配).” 在这个问题中, 若大夫得 “一鹿、三分鹿之二”, 则簪裹得 (▲)

- A. 一鹿、三分鹿之一 B. 一鹿
C. 三分鹿之二 D. 三分鹿之一

3. 命题 “ $\forall x \in [1, 2], x^2 - 2a \leq 0$ ” 为真命题的一个充分不必要条件是 (▲)

- A. $a \leq 2$ B. $a \geq 2$ C. $a \leq 4$ D. $a \geq 4$

4. 已知关于 x 的不等式 $(a^2 - 4)x^2 + (a - 2)x - 1 \geq 0$ 的解集为空集, 则实数 a 的取值范围是 (▲)

- A. $[-2, \frac{6}{5}]$ B. $[-2, \frac{6}{5})$ C. $(-\frac{6}{5}, 2]$ D. $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

5. 若正数 a, b 满足 $ab = 2(a + b) + 5$, 设 $y = (a + b - 4)(12 - a - b)$, 则 y 的最大值是 (▲)

- A. 12 B. -12 C. 16 D. -16

6. 正四面体 $ABCD$ 的棱长为 2, E, F 分别为 BC, AD 的中点, 则 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF}$ 的值为 (▲)

- A. -2 B. 4 C. 2 D. 1

7. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左右焦点分别为 F_1, F_2 , 离心率为 e ,

若椭圆上存在点 P , 使得 $\frac{PF_1}{PF_2} = e$, 则该离心率 e 的取值范围是 (▲)

- A. $[\sqrt{2} - 1, 1)$ B. $[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$ C. $(0, \sqrt{2} - 1]$ D. $(0, \frac{\sqrt{2}}{2}]$

8. 当 n 为正整数时, 定义函数 $N(n)$ 表示 n 的最大奇因数. 如 $N(3) = 3$, $N(10) = 5$, $S(n) = N(1) + N(2) + N(3) + \cdots + N(2^n)$, 则 $S(5) =$ (▲)

- A. 342 B. 345 C. 341 D. 346

二、多项选择题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共计 20 分．在每小题给出的四个选项中，至少有两个是符合题目要求的，请把答案添涂在答题卡相应位置上）

9. 已知向量 $\vec{a} = (1, 3)$, $\vec{b} = (-2, 1)$, $\vec{c} = (3, -5)$, 则 (▲)

- A. $(\vec{a} + 2\vec{b}) \parallel \vec{c}$ B. $(\vec{a} + 2\vec{b}) \perp \vec{c}$
C. $|\vec{a} + \vec{c}| = \sqrt{10} + \sqrt{34}$ D. $|\vec{a} + \vec{c}| = 2|\vec{b}|$

10. 已知实数 x, y 满足 $-3 < x + 2y < 2$, $-1 < 2x - y < 4$, 则 (▲)

- A. x 的取值范围为 $(-1, 2)$ B. y 的取值范围为 $(-2, 1)$
C. $x + y$ 的取值范围为 $(-3, 3)$ D. $x - y$ 的取值范围为 $(-1, 3)$

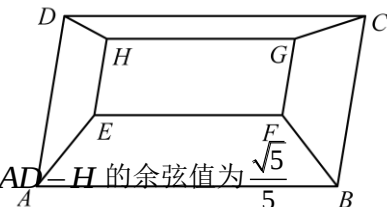
11. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = 2$, 当 $n \geq 2$ 时, $a_n = (\sqrt{a_{n-1} + 2} + 1)^2 - 2$, 则关于数列 $\{a_n\}$ 的说法正确的是 (▲)

- A. $a_2 = 7$ B. 数列 $\{a_n\}$ 递增数列
C. $a_n = n^2 + 2n - 1$ D. 数列 $\{a_n\}$ 为周期数列

12. 我国古代《九章算术》中将上、下两个面为平行矩形的六面体成为刍童.如图刍童

$ABCD - EFGH$ 有外接球, 且 $AB = 5, AD = \sqrt{7}, EF = 4, EH = 2$, 平面 $ABCD$ 与平面 $EFGH$ 的距离为 1, 则下列说法中正确的有 (▲)

- A. 该刍童外接球的体积为 36π B. 该刍童为棱台
C. 该刍童中 AC, EG 在一个平面内 D. 该刍童中二面角 $B - AD - H$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$



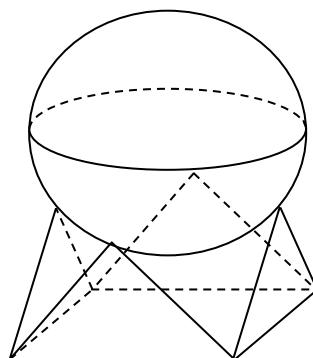
二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分.

13. 不等式 $\frac{x-1}{x} > 3$ 的解集是 ▲.

14. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的离心率为 2, 焦点与椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 的焦点相同, 那么双曲线的渐近线方程为 ▲.

15. 已知数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数, 其前 n 项和为 S_n , 且 $2S_n = a_n a_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}^*$, 则 $a_4 =$ ▲; 若 $a_1 = 2$, 则 $S_{10} =$ ▲.

16. 某公司周年庆典活动中, 制作的“水晶球”工艺品如图所示, 底座是用一边长为 2m 的正方形钢板, 按各边中点连线垂直折起四个小三角形制成, 再将一个水晶玻璃球放入其中. 若水晶球最高点到底座底面的距离为 $(\sqrt{2} + 1)m$, 则水晶球的表面积为 ▲ m^2 .



(第 16 题)

三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本题满分 10 分)

已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且 $a_2 + a_5 = 25$ ， $S_5 = 55$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 设 $a_n b_n = \frac{1}{3n-1}$ ，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

▲▲▲

18. (本题满分 12 分)

已知 $a \in \mathbb{R}$ ，函数 $f(x) = a - \frac{1}{|x|}$.

(1) 若 $f(x) \leq 2x$ 对 $x \in (0, 2)$ 恒成立，求实数 a 的取值范围。

(2) 当 $a=1$ 时，解不等式 $f(x) \geq 2x$.

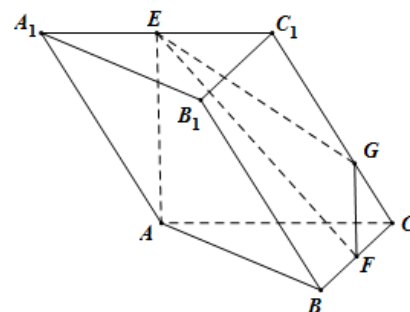
▲▲▲

19. (本题满分 12 分)

如图，在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中，底面 $\triangle ABC$ 是边长为 2 正三角形，侧面 ACC_1A_1 是菱形，且平面 $ACC_1A_1 \perp$ 平面 ABC ， E ， F 分别是棱 A_1C_1 ， BC 的中点， $\overrightarrow{C_1G} = 2\overrightarrow{GC}$.

(1) 证明： $EF \parallel$ 平面 ABB_1A_1 ；

(2) 若①三棱锥 $C_1 - ABC$ 的体积为 1；② C_1C 与底面所成的角为 60° ；③异面直线 BB_1 与 AE 所成的角为 30° . 请选择一个条件求平面 EFG 与平面 ACC_1A_1 所成的二面角(锐角)的余弦值.



▲▲▲

20. (本题满分 12 分)

在平面直角坐标系 xOy 中, 曲线 C 上的动点 $M(x, y)(x > 0)$ 到点 $F(2, 0)$ 的距离减去 M 到直线 $x = -1$ 的距离等于 1.

(1) 求曲线 C 的方程;

(2) 若直线 $y = k(x + 2)$ 与曲线 C 交于 A, B 两点, 求证: 直线 FA 与直线 FB 的倾斜角互补.

▲▲▲

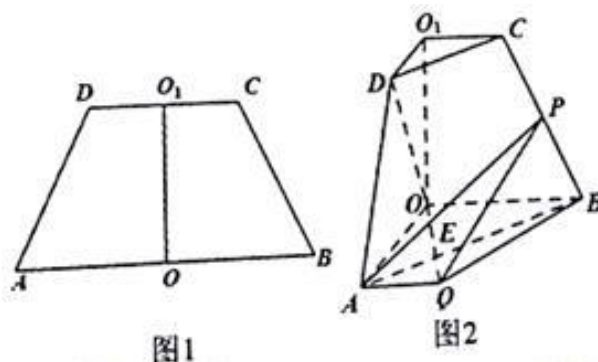
21. (本题满分 12 分)

如图 1, 在高为 6 的等腰梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, 且 $CD = 6$, $AB = 12$, 将它沿对称轴 OO_1 折起, 使平面 $ADO_1O \perp$ 平面 BCO_1O . 如图 2, 点 P 为 BC 中点, 点 E 在线段 AB 上(不同于 A, B 两点), 连接 OE 并延长至点 Q , 使 $AQ \parallel OB$.

(1) 证明: $OD \perp$ 平面 PAQ ;

(2) 若 $BE = 2AE$, 求二面角 $C-BQ-A$ 的余弦值.

▲▲▲



22. (本小题满分 12 分)

已知椭圆 $C_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1(a > b > 0)$, F 为左焦点, A 为上顶点, $B(2, 0)$ 为右顶点, 若

$\sqrt{7}|\overrightarrow{AF}| = 2|\overrightarrow{AB}|$, 抛物线 C_2 的顶点在坐标原点, 焦点为 F .

(1) 求 C_1 的标准方程;

(2) 是否存在过 F 点的直线, 与 C_1 和 C_2 交点分别是 P, Q 和 M, N , 使得 $S_{\triangle OPQ} = \frac{1}{2} S_{\triangle OMN}$?

如果存在, 求出直线的方程; 如果不存在, 请说明理由.

▲▲▲

江苏省仪征中学 2020—2021 学年度第一学期高二数学

周末练习（11）

一、选择题

ABDCADAA

二、多选题

AD; ABD; ABC; AD

三、填空题

13. $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ 14. $y = \pm\sqrt{3}x$ 15. (1). 4 (2). 60 16. 4π

三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本题满分 10 分)

已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且 $a_2 + a_5 = 25$ ， $S_5 = 55$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 设 $a_n b_n = \frac{1}{3n-1}$ ，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

17. (1) 在等差数列 $\{a_n\}$ 中， $a_2 + a_5 = 25$ ， $S_5 = 55$

$$\therefore \begin{cases} 2a_1 + 5d = 25 \\ 5a_1 + 10d = 55 \end{cases},$$

解得 $a_1 = 5, d = 3, \dots \dots \dots$.3 分

$$\therefore a_n = 5 + 3(n-1) = 3n + 2$$

综上所述，数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n = 3n + 2 \dots \dots \dots$.5 分

(2) 由(1)知： $a_n = 3n + 2$ ，又因为 $a_n b_n = \frac{1}{3n-1}$

$$\therefore b_n = \frac{1}{(3n-1)(3n+2)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n+2} \right), \dots \dots \dots$$
 .7 分

$$\begin{aligned} \therefore T_n &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{8} \right) + \dots + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n+2} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3n+2} \right) = \frac{n}{6n+4} \dots \dots \dots$$
 .10 分

综上所述，数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和是 $T_n = \frac{n}{6n+4} \dots \dots \dots$.10 分

18. (本题满分 12 分)

已知 $a \in R$ ，函数 $f(x) = a - \frac{1}{|x|}$.

(1) 若 $f(x) \leq 2x$ 对 $x \in (0, 2)$ 恒成立，求实数 a 的取值范围。

(2) 当 $a=1$ 时，解不等式 $f(x) \geq 2x$.

18.(1) $\because f(x) \leq 2x$ 对 $x \in (0,2)$ 恒成立,

$\therefore a \leq \frac{1}{x} + 2x$ 对 $x \in (0,2)$ 恒成立,2 分

$\because x > 0, \therefore \frac{1}{x} + 2x \geq 2\sqrt{2}$, 当且仅当 $\frac{1}{x} = 2x$, 即 $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时等号成立,4 分

$\therefore a \leq 2\sqrt{2}$ 6 分

(2) 当 $a=1$ 时, $f(x) = 1 - \frac{1}{|x|}$, $\because f(x) \geq 2x$, $\therefore 1 - \frac{1}{|x|} \geq 2x$,

① 若 $x > 0$, 则 $1 - \frac{1}{|x|} \geq 2x$ 可化为: $2x^2 - x + 1 \leq 0$, 所以 $x \in \emptyset$;8 分

② 若 $x < 0$, 则 $1 - \frac{1}{|x|} \geq 2x$ 可化为: $2x^2 - x - 1 \geq 0$, 解得: $x \geq 1$ 或 $x \leq -\frac{1}{2}$,

$\because x < 0, \therefore x \leq -\frac{1}{2}$,10 分

由①②可得 $1 - \frac{1}{|x|} \geq 2x$ 的解集为: $(-\infty, -\frac{1}{2}]$ 12 分

19 (本题满分 12 分)

【答案】(1) 证明略; (2) $\frac{4\sqrt{53}}{53}$

20. (本题满分 12 分)

在平面直角坐标系 xOy 中, 曲线 C 上的动点 $M(x, y) (x > 0)$ 到点 $F(2, 0)$ 的距离减去 M 到直线 $x = -1$ 的距离等于 1.

(1) 求曲线 C 的方程;

(2) 若直线 $y = k(x + 2)$ 与曲线 C 交于 A, B 两点, 求证: 直线 FA 与直线 FB 的倾斜角互补.

19(1) 曲线 C 上的动点 $M(x, y) (x > 0)$ 到点 $F(2, 0)$ 的距离减去 M 到直线 $x = -1$ 的距离等于 1,

所以动点 M 到直线 $x = -2$ 的距离与它到点 $F(2, 0)$ 的距离相等,

故所求轨迹为: 以原点为顶点, 开口向右的抛物线

$y^2 = 8x$4 分

(2) 证明: 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$.

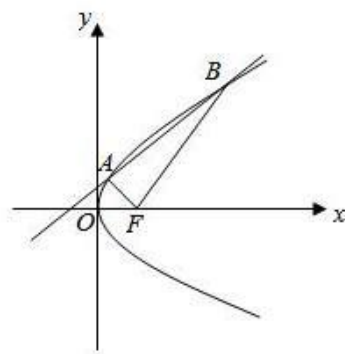
联立 $\begin{cases} y^2 = 8x \\ y = k(x + 2) \end{cases}$, 得

$k^2x^2 + (4k^2 - 8)x + 4k^2 = 0, (k \neq 0)$6 分

$\therefore \Delta > 0, x_1 + x_2 = \frac{8 - 4k^2}{k^2}, x_1x_2 = 4$ 8 分

$\therefore$ 直线 FA 与直线 FB 的斜率之和 =

$$\begin{aligned} \frac{y_1}{x_1 - 2} + \frac{y_2}{x_2 - 2} &= \frac{k(x_1 + 2)}{x_1 - 2} + \frac{k(x_2 + 2)}{x_2 - 2} \\ &= \frac{k(x_1 + 2)(x_2 - 2) + k(x_1 - 2)(x_2 + 2)}{(x_1 - 2)(x_2 - 2)} = \frac{2k(x_1x_2 - 4)}{(x_1 - 2)(x_2 - 2)} \end{aligned}$$



因为 $x_1 x_2 = 4$, $\therefore$ 直线 FA 与直线 FB 的斜率之和为 0,11 分
 $\therefore$ 直线 FA 与直线 FB 的倾斜角互补。12 分

21. (本题满分 12 分)

(1) 解法一(几何法)

证明: 取 OO_1 的中点为 F , 连接 AF, PF ;

$\therefore PF \parallel OB$,

$\because AQ \parallel OB, \therefore PF \parallel AQ$,

$\therefore P, F, A, Q$ 四点共面,

又由图 1 可知 $OB \perp OO_1$,

$\because$ 平面 $ADO_1O \perp$ 平面 BCO_1O ,

且平面 $ADO_1O \cap$ 平面 $BCO_1O = OO_1$,

$\therefore OB \perp$ 平面 ADO_1O ,

$\therefore PF \perp$ 平面 ADO_1O ,

又 $\because OD \subset$ 平面 ADO_1O ,

$\therefore PF \perp OD$ 2 分

在直角梯形 ADO_1O 中, $OF = O_1D, \angle AOF = \angle OO_1D, \therefore \triangle AOF \cong \triangle OO_1D$,

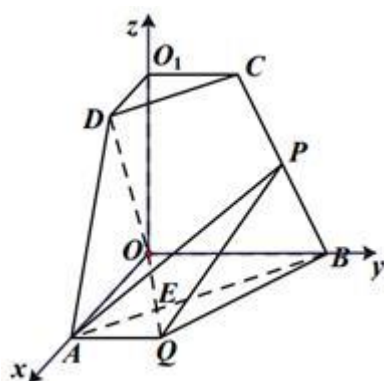
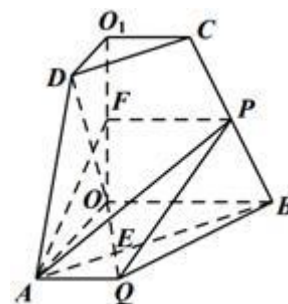
$\therefore \angle FAO = \angle DOO_1$,

$\therefore \angle FAO + \angle AOD = \angle DOO_1 + \angle AOD = 90^\circ$,

$\therefore AF \perp OD$ 4 分

$\because AF \cap PF = F$, 且 $AF \subset$ 平面 $PAQ, PF \subset$ 平面 PAQ ,

$\therefore OD \perp$ 平面 PAQ 6 分



解法二(向量法)

由题设知 OA, OB, OO_1 两两垂直, 所以以 O 为坐标原点, OA, OB, OO_1 所在直线分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系, 设 AQ 的长度为 m ,

则相关各点的坐标为 $O(0,0,0), A(6,0,0), B(0,6,0), C(0,3,6), D(3,0,6), Q(6,m,0)$.

$\because$ 点 P 为 BC 中点, $\therefore P(0, \frac{9}{2}, 3)$,

$\therefore \overrightarrow{OD} = (3, 0, 6), \overrightarrow{AQ} = (0, m, 0), \overrightarrow{PQ} = (6, m -$

$\frac{9}{2}, -3)$, 2 分

$\therefore \overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{AQ} = 0, \overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0$

$\therefore \overrightarrow{OD} \perp \overrightarrow{AQ}, \overrightarrow{OD} \perp \overrightarrow{PQ}$ 且 $\overrightarrow{AQ}$ 与 $\overrightarrow{PQ}$ 不共线, 4 分

$\therefore OD \perp$ 平面 PAQ 6 分

(2) $\because BE=2AE, AQ \parallel OB, \therefore AQ=\frac{1}{2}OB=3,$

则 $Q(6,3,0), \therefore \overrightarrow{QB}=(-6,3,0), \overrightarrow{BC}=(0,-3,6).$

设平面 CBQ 的法向量为 $\vec{n}_1=(x,y,z),$

$$\therefore \begin{cases} \vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{QB} = 0 \\ \vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \end{cases} \therefore \begin{cases} -6x + 3y = 0 \\ -3y + 6z = 0 \end{cases}$$

令 $z=1$, 则 $y=2, x=1$, 则 $\vec{n}_1=(1,2,1), \dots\dots\dots 8$ 分

又显然, 平面 ABQ 的法向量为 $\vec{n}_2=(0,0,1), \dots\dots\dots 10$ 分

设二面角 $C-BQ-A$ 的平面角为 θ , 由图可知, θ 为锐角,

则 $\cos\theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{\sqrt{6}}{6} \dots\dots\dots 12$ 分

22 (本题满分 12 分)

(1) 依题意可知 $\sqrt{7}|\overrightarrow{AF}| = 2|\overrightarrow{AB}|$, 即 $\sqrt{7}a = 2\sqrt{a^2 + b^2}$

由右顶点为 $B(2,0)$, 得 $a=2$, 解得 $b^2=3$,

所以 C_1 的标准方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1. \dots\dots\dots 3$ 分

(2) 依题意可知 C_2 的方程为 $y^2=-4x$, $\dots\dots\dots 4$ 分

假设存在符合题意的直线,

设直线方程为 $x=ky-1, P(x_1,y_1), Q(x_2,y_2), M(x_3,y_3), N(x_4,y_4),$

$$\text{联立方程组} \begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \\ x = ky - 1 \end{cases} \text{得} (3k^2+4)y^2-6ky-9=0,$$

由韦达定理得 $y_1+y_2=\frac{6k}{3+4k^2}, y_1y_2=\frac{-9}{3+4k^2},$

则 $|y_1-y_2| = \sqrt{(y_1+y_2)^2 - 4y_1y_2} = \frac{12\sqrt{k^2+1}}{3+4k^2}, \dots\dots\dots 6$ 分

(写出 PQ 长度也可以)

$$\text{联立方程组} \begin{cases} y^2 = -4x \\ x = ky - 1 \end{cases}, \text{得} y^2+4ky-4=0,$$

由韦达定理得 $y_3+y_4=-4k, y_3y_4=-4,$

所以 $|y_3-y_4| = \sqrt{(y_3+y_4)^2 - 4y_3y_4} = 4\sqrt{k^2+1}, \dots\dots\dots 8$ 分

(写出 MN 长度也可以)

若 $S_{\triangle OPQ} = \frac{1}{2} S_{\triangle OMN}$, 则 $PQ=2MN, \dots\dots\dots 10$ 分

则 $|y_1-y_2| = \frac{1}{2} |y_3-y_4|$, 即 $\frac{12\sqrt{k^2+1}}{3+4k^2} = 2\sqrt{k^2+1}$, 解得 $k = \pm \frac{\sqrt{6}}{3},$

所以存在符合题意的直线方程为 $x + \frac{\sqrt{6}}{3}y + 1 = 0$ 或 $x - \frac{\sqrt{6}}{3}y + 1 = 0. \dots\dots\dots 12$ 分