# 江苏省仪征中学 2019 届高三（上）期中考试热身练习 3

班级_________ 姓名_________ 学号_________ 评价_________

## 一、填空题：

1. 已知集合 $A=\{x\,|\,0<x<2\}$， $B=\{x\,|\,-1<x<1\}$，则 $A\cap B=$_________.

2. 复数 $z=\mathrm{i}(1-2\mathrm{i})$（i 是虚数单位）的虚部为_________.

3. 函数 $y=\frac{1}{2}x^2-\ln x$ 的单调递减区间为________.

4. 已知 $\sin\alpha=\cos\frac{2\pi}{5}$， $0<\alpha<\pi$，则 $\alpha$ 的取值集合为__________.

5. 在平行四边形 $ABCD$ 中， $AB=2$， $AD=1$， $\angle ABC=60°$，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ 的值为__________.

6. 已知关于 $x$ 的不等式 $\frac{ax-5}{x^2-a}<0$ 的解集为 $M$，若 $3\in M$，且 $5\notin M$，则实数 $a$ 的取值范围是__________.

7. 设函数 $f(x)=\cos\omega x(\omega>0)$，将 $y=f(x)$ 的图像向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 单位长度后与原图像重合，则 $\omega$ 的最小值为_________.

8. 在平面直角坐标系 $xOy$ 中，已知点 $A(-1,0)$，$B(1,0)$ 均在圆 $C$：$(x-3)^2+(y-4)^2=r^2$ 外，且圆 $C$ 上存在唯一一点 $P$ 满足 $AP\perp BP$，则半径 $r$ 的值为_____.

9. 已知函数 $f(x)=x^3$．设曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x_1,f(x_1))$ 处的切线与该曲线交于另一点 $Q(x_2,f(x_2))$，记 $f'(x)$ 为函数 $f(x)$ 的导数，则 $\frac{f'(x_1)}{f'(x_2)}$ 的值为________________.

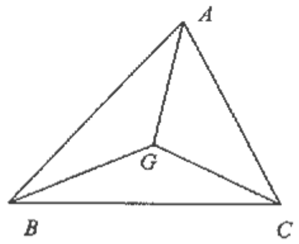
10. 在$\triangle ABC$ 中，角 $A,B,C$ 所对的边分别为 $a,b,c$，若 $C=60^\circ$， $a+b+c=3$，则 $a+2b$ 的最大值为_______.

11. 不等式 $x^6-(x+2)^3+x^2\leqslant x^4-(x+2)^2+x+2$ 的解集为_____________.

12. 在锐角三角形 $ABC$ 中， $9\tan A\tan B+\tan B\tan C+\tan C\tan A$ 的最小值为____________.

二、解答题：

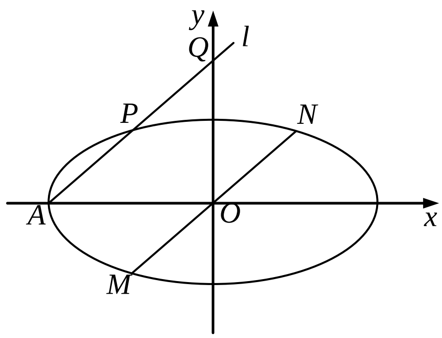
1. 如图，已知$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0},\angle AGB=135°,\angle AGC=120°,GB$的长为$2\sqrt{3}$，求 GA、GC 的长。




2. 如图，在平面直角坐标系$xOy$中，过椭圆$C$：$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$的左顶点$A$作直线$l$，与椭圆$C$和$y$轴正半轴分别交于点$P$，$Q$.

（1）若$AP=PQ$，求直线$l$的斜率；

（2）过原点$O$作直线$l$的平行线，与椭圆$C$交于点$M$，$N$，求证：$\dfrac{AP\cdot AQ}{MN^2}$为定值.



答案：

一、填空题：

1．已知集合 $A=\{x\mid 0<x<2\}$， $B=\{x\mid -1<x<1\}$，则 $A\cap B=$________.

【答案】$(0,1)$

2．复数 $z=\mathrm{i}(1-2\mathrm{i})$（i是虚数单位）的虚部为________.

【答案】1

3. 函数 $y=\frac{1}{2}x^2-\ln x$ 的单调递减区间为________.

【答案】(0,1]

4．已知 $\sin\alpha=\cos\frac{2\pi}{5}$， $0<\alpha<\pi$，则 $\alpha$ 的取值集合为__________.

【答案】$\left\{\frac{\pi}{10},\frac{9\pi}{10}\right\}$

5．在平行四边形 $ABCD$ 中， $AB=2$， $AD=1$， $\angle ABC=60^{\circ}$，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ 的值为__________.

【答案】5

6．已知关于 $x$ 的不等式 $\frac{ax-5}{x^2-a}<0$ 的解集为 $M$，若 $3\in M$，且 $5\notin M$，则实数 $a$ 的取值范围是__________.

【答案】$(9,25]\cup\left[1,\frac{5}{3}\right)$

7．设函数 $f(x)=\cos\omega x(\omega>0)$，将 $y=f(x)$ 的图像向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 单位长度后与原图像重合，则 $\omega$ 的最小值为_________.

【答案】6

8. 在平面直角坐标系 $xOy$ 中，已知点 $A(-1,0)$，$B(1,0)$ 均在圆 $C$：$(x-3)^2+(y-4)^2=r^2$ 外，且圆 $C$ 上存在唯一一点 $P$ 满足 $AP\perp BP$，则半径 $r$ 的值为_____.

【答案】4

【答案】

9．已知函数 $f(x)=x^3$．设曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x_1,f(x_1))$ 处的切线与该曲线交于另一点 $Q(x_2,f(x_2))$，记 $f'(x)$ 为函数 $f(x)$ 的导数，则 $\frac{f'(x_1)}{f'(x_2)}$ 的值为________________.

【答案】$\frac{1}{4}$

10. 在△$ABC$ 中，角 $A,B,C$ 所对的边分别为 $a,b,c$，若 $C=60^{\circ}$， $a+b+c=3$，则 $a+2b$ 的最大值为_______.

【答案】$6-2\sqrt{2}$

11. 不等式 $x^6-(x+2)^3+x^2\leqslant x^4-(x+2)^2+x+2$ 的解集为_____________.

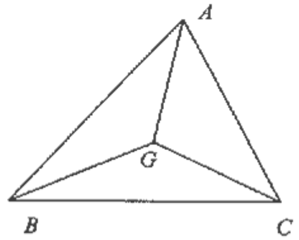
【答案】$[-1,2]$

12. 在锐角三角形 $ABC$ 中， $9\tan A\tan B+\tan B\tan C+\tan C\tan A$ 的最小值为____________.

【答案】25

二、解答题：

1. 如图，已知$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}, \angle AGB=135°, \angle AGC=120°, GB$的长为$2\sqrt{3}$，求 GA、GC 的长。

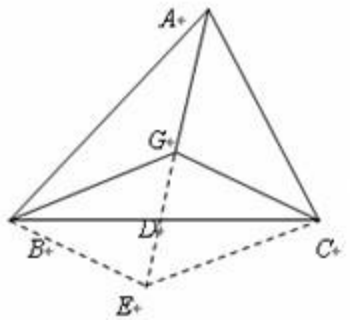



解 因为$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$，所以点 $G$ 为$\Delta ABC$的重心，取 $BC$ 的中点,连结 $GD$，并延长 $GD$ 到点 $E$，$GD=GE$，连结 $BE, CE$，所以四边形 $GBEC$ 为平行四边形，……………………………4 分

$\angle EGB=45°, \angle GEB=60°$，所以$\angle GBE=75°$，

在$\Delta BGE$中，由正弦定理得 $\dfrac{2\sqrt{3}}{\sin 60°}=\dfrac{BE}{\sin 45°}=\dfrac{GE}{\sin 75°}$，……………………………10 分

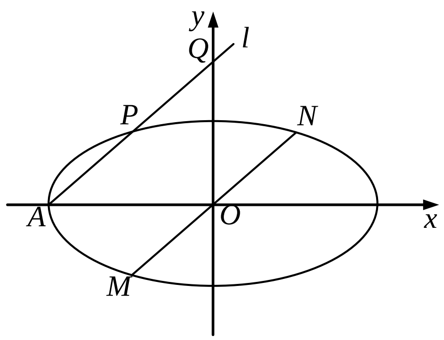
所以 $BE=2\sqrt{2}$，$GE=\sqrt{2}+\sqrt{6}$，所以 $GC=2\sqrt{2}$，$GA=\sqrt{2}+\sqrt{6}$．…………… 14 分




2. 如图，在平面直角坐标系 $xOy$ 中，过椭圆 $C$：$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 的左顶点 $A$ 作直线 $l$，与椭圆 $C$ 和 $y$ 轴正半轴分别交于点 $P$，$Q$．

（1）若 $AP=PQ$，求直线 $l$ 的斜率；

（2）过原点 $O$ 作直线 $l$ 的平行线，与椭圆 $C$ 交于点 $M$，$N$，求证：$\dfrac{AP\cdot AQ}{MN^2}$ 为定值．



解：（1）依题意，椭圆 $C$ 的左顶点 $A(-2,0)$，

设直线 $l$ 的斜率为 $k$ $(k>0)$，点 $P$ 的横坐标为 $x_P$，

则直线 $l$ 的方程为 $y=k(x+2)$．①　　　　　　　　…… 2 分

又椭圆 $C$：$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$，　　②

由①②得，$\left(4k^2+1\right)x^2+16k^2x+16k^2-4=0$，

则 $-2\cdot x_p=\dfrac{16k^2-4}{4k^2+1}$，从而 $x_p=\dfrac{2-8k^2}{1+4k^2}$．　　　　　　…… 5 分

因为 $AP=PQ$，所以 $x_p=-1$．

所以 $\dfrac{2-8k^2}{1+4k^2}=-1$，解得 $k=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$（负值已舍）．　　　　　　…… 8 分

（2）设点 $N$ 的横坐标为 $x_N$．结合（1）知，直线 $MN$ 的方程为 $y=kx$．③

由②③得，${x_N}^2=\dfrac{4}{1+4k^2}$．　　　　　　　　…… 10 分

从而 $\dfrac{AP\cdot AQ}{MN^2}=\dfrac{2\left(x_p+2\right)}{\left(2x_N\right)^2}$　　　　　　　　…… 12 分

$=\dfrac{2\left(\dfrac{2-8k^2}{1+4k^2}+2\right)}{4\times\dfrac{4}{1+4k^2}}$

$=\dfrac{1}{2}$，即证．　　　　　　…… 14 分