

江苏省丰县中学高二年级期中调研测试

数学试题

2020 年 11 月

注意事项:

1. 本试卷共 6 页, 包括单项选择题(第 1 题~第 8 题)、多项选择题(第 9 题~第 12 题)、填空题(第 13 题~第 16 题)、解答题(第 17 题~第 22 题)四部分. 本试卷满分为 150 分, 考试时间为 120 分钟.
2. 答卷前, 考生务必将自己的学校、姓名、考生号填涂在答题卡上指定的位置.
3. 作答选择题时, 选出每小题的答案后, 用 2B 铅笔在答题卡上将对应题目选项的答案信息点涂黑; 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案. 答案不能答在试卷上.
4. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答, 答案必须写在答题卡各题目指定区域内, 在其他位置作答一律无效.

一、单项选择题: 本大题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每个小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的. 请把答案涂写在答题卡规定的位置.

1. 已知数列 $2, 3, \sqrt{14}, \sqrt{19}, 2\sqrt{6}, \dots$, 则 12 是它的
A. 第 28 项 B. 第 29 项 C. 第 30 项 D. 第 31 项
2. 正项等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_2 a_5 = 100$, 则 $\lg a_3 + \lg a_4 =$ ()
A. -1 B. 1 C. 2 D. 0
3. 设 $a, b \in \mathbf{R}$, 则 “ $\ln a > \ln b$ ” 是 “ $\ln \frac{a}{b} > 0$ ” 的 ()
A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
4. 《算法统宗》是中国古代数学名著, 由明代数学家程大位编著, 它对我国民间普及珠算和数学知识起到了很大的作用, 是东方古代数学的名著, 在这部著作中, 许多数学问题都是以歌诀形式呈现的. “九儿问甲歌” 就是其中一首: 一个公公九个儿, 若问生年总不知, 自长排来差三岁, 共年二百又零七, 借问小儿多少岁, 各儿岁数要谁推, 这位公公年龄最小的儿子年龄为 ()
A. 8 岁 B. 11 岁 C. 20 岁 D. 35 岁
5. 若 $a > 0, b > 0$, 则不等式 $-b < \frac{1}{x} < a$ 的解集为 ()

A. $\left(-\frac{1}{b}, 0\right) \cup \left(0, \frac{1}{a}\right)$

B. $\left(-\frac{1}{b}, \frac{1}{a}\right)$

C. $\left(-\infty, -\frac{1}{b}\right) \cup \left(\frac{1}{a}, +\infty\right)$

D. $\left(-\frac{1}{a}, 0\right) \cup \left(0, \frac{1}{b}\right)$

6. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = 2^{n+1} - 2$, 则 $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 =$ ()

A. $4(2^n - 1)^2$

B. $4(2^{n-1} + 1)^2$

C. $\frac{4(4^n - 1)}{3}$

D. $\frac{4(4^{n-1} + 2)}{3}$

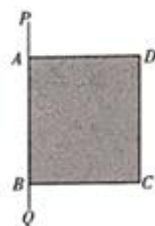
7. 如图, 矩形花园 $ABCD$ 的边 AB 靠在墙 PQ 上, 另外三边是由篱笆围成的. 若该矩形花园的面积为 4 平方米, 墙 PQ 足够长, 则围成该花园所需要篱笆的 ()

A. 最大长度为 8 米

B. 最大长度为 $4\sqrt{2}$ 米

C. 最小长度为 8 米

D. 最小长度为 $4\sqrt{2}$ 米



8. 公元 1202 年意大利数学家列昂纳多·斐波那契以兔子繁殖为例, 引入“兔子数列”: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ... 即 $a_1 = a_2 = 1$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} (n \geq 3, n \in \mathbb{N}^*)$. 此数列在现代物理、准晶体结构、化学等领域都有着广泛的应用. 若记 $b_n = 2^n(a_{n+1}^2 - a_n a_{n+2}) (n \in \mathbb{N}^*)$, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 则 $S_{2020} =$ ()

A. $\frac{-2^{2020} + 2}{3}$

B. $\frac{2^{2020} - 2}{3}$

C. $\frac{2^{2021} - 2}{3}$

D. $\frac{-2^{2021} + 2}{3}$

二、多项选择题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 每一个题目中有多个选项符合题目要求, 全部选对得 5 分, 选对但是不全的得 3 分, 有选错的得 0 分. 请把答案涂写在答题卡规定的位置.

9. 如果 a 、 b 、 c 满足 $c < b < a$ 且 $ac < 0$, 那么下列选项中一定成立的是 ()

A. $ab > ac$

B. $c(b-a) > 0$

C. $cb^2 < ab^2$

D. $ac(a-c) > 0$

10. 已知 p 是 r 的充分不必要条件, q 是 r 的充分条件, s 是 r 的必要条件, q 是 s 的必要条件, 下列命题正确的是 ()

A. r 是 q 的充要条件

B. p 是 q 的充分不必要条件

C. r 是 q 的必要不充分条件

D. r 是 s 的充分不必要条件

11. 已知两个等差数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的前 n 项和分别为 S_n 和 T_n ，且 $\frac{S_n}{T_n} = \frac{3n+39}{n+3}$ ，则使得 $\frac{a_n}{b_n}$

为整数的正整数 n 的值为 ()

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 14

12. 若 $a, b, c \in \mathbf{R}$ ，且 $ab+bc+ca=1$ ，则下列不等式成立的是 ()

- A. $a+b+c \leq \sqrt{3}$ B. $(a+b+c)^2 \geq 3$
C. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 2\sqrt{3}$ D. $a^2 + b^2 + c^2 \geq 1$

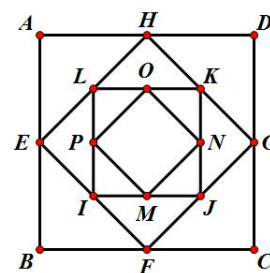
三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。请把答案写在答题卡规定的位置。

13. 设 $x > 0$ ， $y > 0$ ，且 $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 2$ ，则 $x+2y$ 的最小值为_____.

14. 命题“ $\exists x_0 \in \mathbf{R}, 2x_0^2 - 3ax_0 + 9 < 0$ ”为假命题，则实数 a 的取值范围是_____.

15. 数列 $\{a_n\}$ 满足， $\frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2^2}a_2 + \frac{1}{2^3}a_3 + \cdots + \frac{1}{2^n}a_n = 2n+1$ ，写出数列 $\{a_n\}$ 的通项公式_____.

16. 如右图所示，正方形 $ABCD$ 的边长为 5cm ，取正方形 $ABCD$ 各边的中点 E, F, G, H ，作第 2 个正方形 $EFGH$ ，然后再取正方形 $EFGH$ 各边的中点 I, J, K, L ，作第 3 个正方形 $IJKL$ ，依此方法一直继续下去. 如果这个作图过程可以一直继续下去，那么所有这些正方形的面积之和将趋近于_____ cm^2 ?



四、解答题：本大题共 6 小题，计 70 分。解答应写出必要的文字说明，证明过程或演算步骤，请把答案写在答题卡规定的位置。

17. (本大题满分 10 分)

若关于 x 的不等式 $x^2 - (2a+1)x + a^2 + a \leq 0$ 的解集为 A ，不等式 $\frac{3}{2-x} \geq 2$ 的解集为 B 。

- (1) 求集合 A ；
(2) 已知 B 是 A 的必要不充分条件，求实数 a 的取值范围。

18. (本大题满分 12 分)

在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_6 = 12$, $a_{18} = 36$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 a_n ;

(2) 若 _____, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

在① $b_n = \frac{4}{a_n a_{n+1}}$, ② $b_n = (-1)^n \cdot a_n$, ③ $b_n = 2^{a_n} \cdot a_n$ 这三个条件中任选一个补充在第 (2)

问中, 并对其求解.

注: 如果选择多个条件分别解答, 按第一个解答计分.

19. (本大题满分 12 分)

若 $a > 0$, $b > 0$, 且 $2a + b + 2 = 3ab$.

(1) 求 $2a + b$ 的最小值;

(2) 是否存在 a 、 b , 使得 $a^3 + b^3 = 4\sqrt{2}$ 成立? 并说明理由.

20. (本大题满分 12 分)

北宋的数学家沈括博学多才、善于观察. 据说有一天, 他走进一家酒馆, 看见一层层垒起的酒坛, 不禁想到: “怎么求这些酒坛的总数呢?” 现实生活中, 我们也会经常碰到此类堆积物问题, 例如图 1 和图 2 是就是常见的两种物体堆积方式. 考察下列问题:

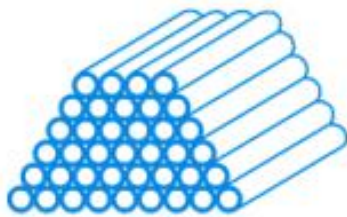


图 1

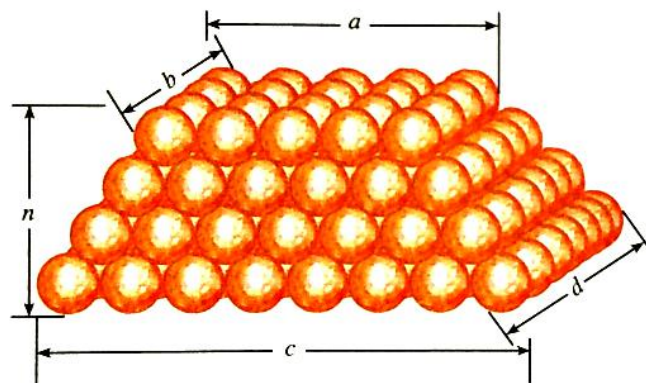


图 2

(1) 如图 1 所示, 这是某同学利用圆柱形木棍摆放的堆积物, 最上面的一层 (第 1 层) 有 4 根木棍, 下面的每一层都比上一层多一根, 每一层的木棍个数记为数列 $\{a_n\}$, 请求出数列 $\{a_n\}$ 的通项公式以及数列 $\{a_n\}$ 的前 n 和 S_n .

(2) 如图 2 所示, 这是某同学利用乒乓球摆放的堆积物, 对于此类问题, 沈括曾经给出对于上层 (第 1 层) 有 $a \times b$ 个, 下层有 $c \times d$ 个, 共 n 层的堆积物, 可以用公式 $T_n = \frac{n}{6} (2b+d)a + (b+2d)c + \frac{n}{6}(c-a)$ 求出堆积物体的总数, 其中 $a, b, c, d, n \in \mathbb{N}^*$. 这就是所谓的 “隙积术”, 相当于求数列 $ab, (a+1)(b+1), (a+2)(b+2), \dots, (a+n-1)(b+n-1) = cd$ 的和.

①若 $a = 5, b = 4$, 求 T_6 的值;

②当 $n \geq 2$ 时, 记 $b_n = T_n - T_{n-1}, c_n = b_n - b_{n-1}$, 请判断数列 $\{c_n\}$ 是否为等差数列?

如果是, 请求出 $\{c_n\}$ 的通项公式; 如果不是, 请说明理由.

21. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q > 1$ ，前 n 项和为 S_n ，且 $a_1 + a_2 = 10$ ， $S_3 = 42$. 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = \log_2 a_n$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ 的通项公式；

(2) 记 c_k 为区间 $(0, \sqrt{b_k}]$ 内整数的个数 ($k \in N^*$)，求数列 $\{c_k\}$ 的前 50 项和 T_{50} .

22. 定义 $\frac{n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}$ 为 n 个正数 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 的“均倒数”. 已知正项数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项的“均倒数”为 $\frac{1}{n}$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 设数列 $\left\{ \frac{1}{a_{2n-1} \cdot a_{2n+1}} \right\}$ 的前 n 项和为 T_n ，若 $4T_n < m^2 - 4m - 4$ 对一切 $n \in N^*$ 恒成立，

试求实数 m 的取值范围；

(3) 令 $b_n = \left(\frac{9}{10}\right)^n \cdot a_n$ ，问：是否存在正整数 k 使得 $b_k \geq b_n$ 对一切 $n \in N^*$ 恒成立，如存在，

求出 k 值，否则说明理由.