

广东省广州市 2022 届高三开学四校联考

数 学

本试卷共 22 小题，满分 150 分，考试用时 120 分钟。

注意事项：

1. 答题卡前，考生务必用黑色字迹的钢笔或签字笔将自己的校名、姓名、考号、座位号等相关信息填写在答题卡指定区域内。
2. 选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案；不能答在试卷上。
3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内的相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案；不准使用铅笔和涂改液，不按以上要求作答的答案无效。
4. 考生必须保持答题卡的整洁。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设集合 $A = \{x \mid |x-2| < 2\}$ ， $B = \{2, 3, 4\}$ ，则 $A \cap B =$ ()
A. $\{2\}$ B. $\{2, 3\}$ C. $\{3, 4\}$ D. $\{2, 3, 4\}$
2. 已知 $z = 3 + 4i$ ，则 $\frac{\bar{z}}{z-3} =$ ()
A. $1 + \frac{3}{4}i$ B. $1 - \frac{3}{4}i$ C. $-1 + \frac{3}{4}i$ D. $-1 - \frac{3}{4}i$
3. 函数 $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ 具有性质 ()
A. 最大值为 2，图象关于 $\left(-\frac{\pi}{6}, 0\right)$ 对称
B. 最大值为 $\sqrt{2}$ ，图象关于 $\left(-\frac{\pi}{6}, 0\right)$ 对称
C. 最大值为 2，图象关于直线 $x = \frac{\pi}{6}$ 对称
D. 最大值为 $\sqrt{2}$ ，图象关于直线 $x = \frac{\pi}{6}$ 对称
4. 一个圆柱的侧面展开图是一个面积为 $4\pi^2$ 的正方形，则这个圆柱的体积为 ()
A. π B. 2π C. π^2 D. $2\pi^2$
5. 已知 $\sin\left(\frac{\pi}{5} - \alpha\right) = \frac{1}{4}$ ，则 $\cos\left(2\alpha + \frac{3\pi}{5}\right) =$ ()

- A. $-\frac{7}{8}$ B. $\frac{7}{8}$ C. $-\frac{\sqrt{15}}{8}$ D. $\frac{\sqrt{15}}{8}$

6. 已知函数 $y = \log_a(x-1)+1$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$) 的图象恒过定点 A , 若点 A 在椭圆

$$\frac{x^2}{m} + \frac{y^2}{n} = 1 \text{ 上, 则 } m+n \text{ 的最小值为 ()}$$

- A. 12 B. 10 C. 9 D. 8

7. 2020 年新冠肺炎肆虐, 全国各地千千万万的医护者成为“最美逆行者”, 医药科研工作者积极研制有效抗疫药物, 中医药通过临床筛选出的有效方剂“三药三方”(“三药”是指金花清感颗粒、连花清瘟颗粒(胶囊)和血必净注射液;“三方”是指清肺排毒汤、化湿败毒方和宜肺败毒方)发挥了重要的作用. 甲因个人原因不能选用血必净注射液, 甲、乙两名患者各自独立自主的选择一药一方进行治疗, 则两人选取药方完全不同的概率是 ()

- A. $\frac{4}{9}$ B. $\frac{8}{27}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{5}{9}$

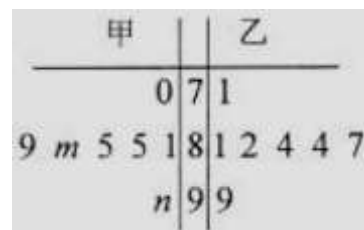
8. 已知点 Q 在圆 $E: (x+3)^2 + (y-4)^2 = 4$ 上, 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点为 F , 点 P 在椭圆 C 上, 且圆 E 上的所有点均在椭圆 C 外, 若 $|PQ| - |PF|$ 的最小值为

$2\sqrt{5} - 6$, 且椭圆 C 的长轴长恰与圆 E 的直径长相等, 过点 F 作圆 E 的切线, 则切线斜率为 ()

- A. ± 2 B. $\frac{-4 \pm \sqrt{7}}{3}$ C. $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ D. $\pm \sqrt{3}$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 如图是 2021 年青年歌手大奖赛中, 七位评委为甲、乙两名选手打出的分数的茎叶图 (其中 m 、 n 均为数字 0~9 中的一个), 在去掉一个最高分和一个最低分后, 则有 ()



- A. 甲选手得分的平均数一定大于乙选手得分的平均数
B. 甲选手得分的中位数一定大于乙选手得分的中位数
C. 甲选手得分的众数与 m 的值无关
D. 甲选手得分的方差与 n 的值无关

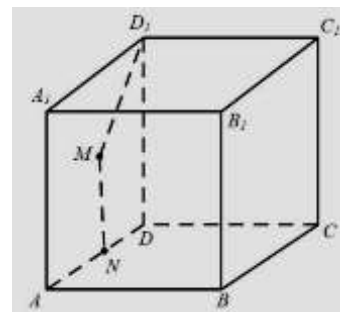
10. 已知向量 $\vec{a} = (1, \sin \theta)$, $\vec{b} = (\cos \theta, \sqrt{2})$, 则下列命题正确的是 ()

- A. 存在 θ , 使得 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ B. 当 $\tan \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 垂直
C. 对任意 θ , 都有 $|\vec{a}| \neq |\vec{b}|$ D. 当 $\vec{a} \cdot \vec{b} = -\sqrt{3}$ 时, $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 方向上的投影为

$$-\frac{3\sqrt{7}}{7}$$

11. 如图, 点 M 是正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中的侧面 ADD_1A_1 内 (包括边界) 的一个动点, 则下列结论正确的是 ()

- A. 满足 $BM \perp A_1D$ 的点 M 的轨迹是一条线段



B. 在线段 AD_1 上存在点 M , 使异面直线 B_1M 与 CD 所成的角是 30°

C. 若正方体的棱长为 1, 三棱锥 $B-C_1MD$ 的体积最大值为 $\frac{1}{3}$

D. 点 M 存在无数个位置满足到直线 AD 和直线 C_1D_1 的距离相等

12. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} e^x - 1, & x \geq m \\ -(x+2)^2, & x < m \end{cases} (m \in R)$, 则 ()

A. 对任意的 $m \in R$, 函数 $f(x)$ 都有零点.

B. 当 $m \leq -3$ 时, 对 $\forall x_1 \neq x_2$, 都有 $(x_1 - x_2)(f(x_1) - f(x_2)) < 0$ 成立.

C. 当 $m = 0$ 时, 方程 $f[f(x)] = 0$ 有 4 个不同的实数根.

D. 当 $m = 0$ 时, 方程 $f(x) + f(-x) = 0$ 有 2 个不同的实数根.

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{m} - y^2 = 1 (m > 0)$ 的一条渐近线为 $\sqrt{3}x + my = 0$, 则双曲线 C 的实轴长为_____.

14. 已知二项式 $\left(2x\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^n$ 的展开式的二项式系数和为 64, 则展开式中的有理项系数和为_____.

15. 函数 $f(x) = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$ 的图象在点 $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ 处的切线与直线 $x - ay + 1 = 0$ 垂直, 则非零实数 a 的值为_____.

16. 设正整数 $n = a_0 \cdot 2^0 + a_1 \cdot 2^1 + \cdots + a_{k-1} \cdot 2^{k-1} + a_k \cdot 2^k$, 其中 $a_i \in \{0, 1\}$, $i = 0, 1, 2, \dots, k$, 记 $\omega(n) = a_0 + a_1 + \cdots + a_k$. 若 $m = a_0 \cdot 2^0 + a_1 \cdot 2^1 + \cdots + a_9 \cdot 2^9 + 2^{10}$ 且 $\omega(m) = 3$, 则这样的正整数 m 有_____个, 所有的这样的正整数 m 的和为_____. (用数字作答)

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 是递增数列, 满足 $a_4 = 32$, $a_3 + a_5 = 80$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

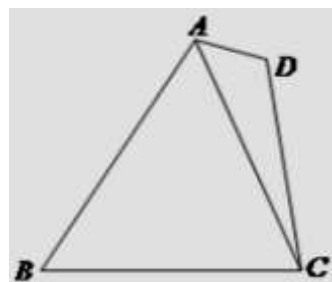
(2) 设 $b_n = \log_2 a_n$, 若 b_n 为数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项积, 证明 $\frac{1}{b_n} + \frac{1}{c_n} = 1$.

18. 党中央、国务院高度重视新冠病毒核酸检测工作, 中央应对新型冠状病毒感染肺炎疫情防控工作领导小组会议作出部署, 要求尽力扩大核酸检测范围, 着力提升检测能力. 根据统计发现, 疑似病例核酸检测呈阳性的概率为 $p (0 < p < 1)$. 现有 6 例疑似病例, 分别对其取样、检测, 既可以逐个化验, 也可以将若干个样本混合在一起化验, 混合样本中只要有病毒, 则化验结果呈阳性. 若混合样本呈阳性, 则需将该组中备用的样本再逐个化验; 若混合样本呈阴性, 则判定该组各个样本均为阴性, 无需再化验. 现有以下三种方案: 方案一: 6 个样本逐个化验; 方案二: 6 个样本混合在一起化验; 方案三: 6 个样本均分为两组, 分别混合在一起化验. 在新冠肺炎爆发初期, 由于检测能力不足, 化验次数的期望值越小, 则方案越“优”.

- (1) 若 $p = \frac{1}{3}$ ，按方案一，求 6 例疑似病例中至少有 1 例呈阳性的概率；
- (2) 若 $t = (1-p)^3$ ，现将该 6 例疑似病例样本进行化验，当方案三比方案二更“优”时，求 t 的取值范围.

19. 如图所示，在四边形 $ABCD$ 中， $\angle D = 2\angle B$ ，且 $AD = 1$ ， $CD = 3$ ， $\cos B = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

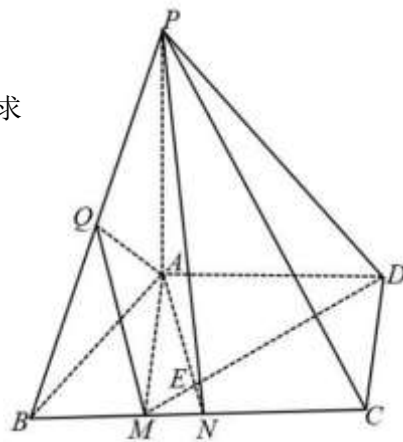
- (1) 若 $BC = \sqrt{6}$ ，求 AB 的长；
- (2) 求四边形 $ABCD$ 面积的最大值.



20. 在四棱锥 $P-ABCD$ 中， $PA \perp$ 平面 $ABCD$ ， $AD \parallel BC$ ， $BC \perp CD$ ， $PA = AD = 2$ ， $BC = 3CD = 3$ ，点 M ， N 在线段 BC 上，满足 $BM = 2MN = 1$ ， $AN \cap MD = E$.

- (1) 求证： $PN \perp MD$ ；
- (2) 若 Q 为线段 PB 上的一点，且 $PD \parallel$ 平面 AQM ，求

平面 QAM 与平面 PAN 所成锐二面角的余弦值.



21. 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F ， $M(n, 2)$ 为抛物线 C 上的一点，且 $|MF| = 2$.

- (1) 求抛物线 C 的标准方程；
- (2) 过点 F 的直线 m 与抛物线 C 交于 A ， B 两点，点 P 在抛物线 C 上，记直线 PA 的斜率为 k_1 ，直线 PB 的斜率为 k_2 ，试判断是否存在点 P ，使得 $k_1 + k_2 = 2$ ？若存在，求出点 P 的个数；若不存在，请说明理由.

22. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2ax + \ln x$.

(1) 若函数 $f(x)$ 为增函数, 求实数 a 的取值范围;

(2) 设 $g(x) = xf(x) - \frac{1}{2}x^3 + 2x$ 有两个不同零点 x_1, x_2 .

(i) 证明: $x_1 + x_2 > \frac{1}{a}$;

(ii) 若 $x_2 - 3x_1 \geq 0$, 证明: $x_1 + x_2 > \frac{6}{e^2}$.

数学参考答案

一、选择题（本大题 12 小题，每小题 5 分，共 60 分. 其中第 1 题~第 10 题为单项选择题，在给出的四个选项中，只有一项符合要求；第 11 题和第 12 题为多项选择题，在给出的四个选项中，有多项符合要求，全部选对得 5 分，选对但不全的得 3 分，有选错的得 0 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	D	C	D	A	C	A	B	ABD	BD	ACD	AC

二、填空题（本大题 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

13. $2\sqrt{3}$ 14. 65 15. -1 16. 45 , 55287

三、解答题（本大题 6 小题，共 70 分）

17 (1) 可设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $q(q>1)$, $\because a_4=32, \therefore a_3+a_5=\frac{32}{q}+32q=80$. ……

2 分

解得: $q=2$ 或 $q=\frac{1}{2}$ (舍去). ……4 分

所以 $a_n=a_4 \cdot 2^{n-4}=2^{n+1}$. ……5 分

(2) $\because b_n=\log_2 a_n=n+1, \therefore c_1=b_1=2$ ……6 分

当 $n \geq 2$ 时, $c_1 \cdot c_2 \cdots c_n = n+1$ ①, $c_1 \cdot c_2 \cdots c_{n-1} = n$ ②, ……7 分

①/②得 $c_n = \frac{n+1}{n} (n \geq 2)$, ……8 分

当 $n=1$ 时, $c_1 = \frac{2}{1} = 2$ 也成立. $\therefore c_n = \frac{n+1}{n}$ ……9 分

$\therefore \frac{1}{b_n} + \frac{1}{c_n} = \frac{1}{n+1} + \frac{n}{n+1} = 1$ ……10 分

18 (1) 用 X 表示 6 例疑似病例中化验呈阳性的人数, 则随机变量 $X \sim B(6, \frac{1}{3})$ ……1 分

由题意可知: $P(x \geq 1) = 1 - P(x=0) = 1 - C_6^0 (\frac{2}{3})^6 = \frac{665}{729}$. ……3 分

答: 6 例疑似病例中至少有 1 例呈阳性的概率为 $\frac{665}{729}$. ……4 分

(2) 方案二: 混合一起检验, 记检验次数为 ξ , 则 $\xi=1, 7$. ……5 分

$\therefore P(\xi=1)=t^2, P(\xi=7)=1-t^2$ ……7 分

$\therefore E(\xi)=t^2+7(1-t^2)=7-6t^2$

方案三：每组的三个样本混合在一起化验，记检验次数为 η ，则 $\eta = 2, 5, 8, \dots$ 8分

$$\therefore P(\eta = 2) = t^2, P(\eta = 5) = 2t(1-t), P(\eta = 8) = (1-t)^2 \dots\dots 10 \text{分}$$

$$\therefore E(\eta) = 2t^2 + 10t(1-t) + 8(1-t)^2 = 8 - 6t$$

$$\because E(\eta) < E(\xi) \therefore 8 - 6t < 7 - 6t^2 \therefore 6t^2 - 6t + 1 < 1 \therefore \frac{3 - \sqrt{3}}{6} < t < \frac{3 + \sqrt{3}}{6} \dots\dots 12 \text{分}$$

$$\therefore t \text{ 的取值范围 } \frac{3 - \sqrt{3}}{6} < t < \frac{3 + \sqrt{3}}{6}$$

$$19 (1) \because \angle D = 2\angle B, \quad \cos B = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore \cos D = \cos 2B = 2\cos^2 B - 1 = \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3}, \quad \dots\dots 2 \text{分}$$

$$\because \text{在 } \triangle ACD \text{ 中, } AD = 1, \quad CD = 3, \quad \cos D = -\frac{1}{3},$$

$$\therefore \text{由余弦定理可得 } AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2AD \cdot CD \cdot \cos D = 1 + 9 - 2 \times 3 \times \left(-\frac{1}{3}\right) = 12,$$

$$\therefore AC = 2\sqrt{3}, \quad \dots\dots 4 \text{分}$$

$$\text{在 } \triangle ABC \text{ 中, } BC = \sqrt{6}, \quad AC = 2\sqrt{3}, \quad \cos B = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore \text{由余弦定理可得 } \cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC}, \quad \text{即}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{AB^2 + 6 - 12}{2 \cdot AB \times \sqrt{6}}, \quad \dots\dots 5 \text{分}$$

$$\text{化简得 } AB^2 - 2\sqrt{2}AB - 6 = 0, \quad \text{解得 } AB = 3\sqrt{2}. \quad \text{故 } AB \text{ 的长为 } 3\sqrt{2}. \quad \dots\dots 6 \text{分}$$

$$(2) \text{设四边形 } ABCD \text{ 面积为 } S, \text{ 则 } S = S_{\triangle BAC} + S_{\triangle DAC}$$

$$\because S_{\triangle DAC} = \frac{1}{2} \cdot DA \cdot DC \cdot \sin D = \frac{1}{2} \cdot DA \cdot DC \cdot \sqrt{1 - \cos^2 D} = \sqrt{2}, \quad \dots\dots 7 \text{分}$$

所以 $S = S_{\triangle BAC} + \sqrt{2} = \frac{1}{2} BA \cdot BC \sin B + \sqrt{2} = \frac{\sqrt{6}}{6} BA \cdot BC + \sqrt{2}$,8 分

在 $\triangle ABC$ 中, $AC = 2\sqrt{3}$, $\cos B = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\therefore$ 由余弦定理可得:

$$AB^2 + BC^2 - AC^2 = 2AB \cdot BC \cdot \cos B, \text{9 分}$$

即 $AB^2 + BC^2 - 12 = \frac{2\sqrt{3}}{3} AB \cdot BC \geq 2AB \cdot BC - 12$,10 分

$$\therefore AB \cdot BC \leq \frac{12}{2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}} = 9 + 3\sqrt{3},$$

当且仅当 $\therefore AB = BC = \sqrt{9 + 3\sqrt{3}}$ 时, $(S_{\triangle BAC})_{\max} = \frac{\sqrt{6}}{6} \times (9 + 3\sqrt{3}) = \frac{3\sqrt{6} + 3\sqrt{2}}{2}$,11 分

所以 $S_{\max} = \frac{3\sqrt{6} + 3\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} = \frac{3\sqrt{6} + 5\sqrt{2}}{2}$,12 分

20 (1) 证明: $\because PA \perp$ 平面 $ABCD, MD \subset$ 平面 $ABCD$, $\therefore MD \perp PA$ 1 分

$\because AD \parallel BC, BC \perp CD, AD = 2, BC = 3, BM = 1, MC = 2 = AD$, $\therefore$ 四边形 $ADCM$ 为矩形2 分

$$\because \frac{AM}{AD} = \frac{MN}{AM} = \frac{1}{2}, \therefore \angle NAM = \angle MDA = \angle DMC, \therefore \angle DMC + \angle ANM = 90^\circ, \therefore DM \perp AN$$

.....3分

$\because PA \cap AN = A, PA, AN \subset$ 平面 PAN , $\therefore MD \perp$ 平面 PAN

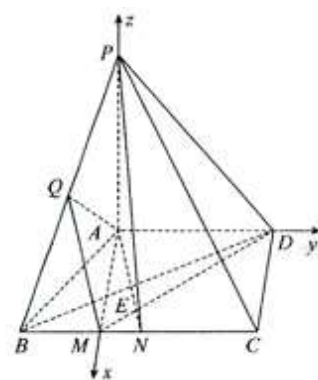
$\because PN \subset$ 平面 PAN , $\therefore PN \perp MD$ 4分

(第一问直接用向量法, 也相应给分)

(2) 连接 BD 交 AM 于点 E , 连接 QE .

$$\because \triangle BME \sim \triangle DAE, \therefore \frac{BE}{ED} = \frac{ME}{EA} = \frac{1}{2}$$

$\because PD \parallel$ 平面 $AQM, PD \subset$ 平面 PBD , 平面 $AQM \cap$ 平面 $PBD = QE$



$$\therefore QE \parallel PD, \therefore \frac{BQ}{BP} = \frac{BM}{BN} = \frac{1}{3} \dots\dots 6 \text{分}$$

如图建立空间直角坐标系，则

$$A(0,0,0), M(1,0,0), P(0,0,2), N(1, \frac{1}{2}, 0), B(1,-1,0), Q(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}), D(0,2,0) \dots\dots 8 \text{分}$$

由(1)知 $MD \perp$ 平面 PAN ，则 $\overrightarrow{MD} = (-1, 2, 0)$ 为平面 PAN 的一个法向量.9分

$$\therefore \overrightarrow{AM} = (1, 0, 0), \overrightarrow{AQ} = (\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$$

设平面 QAM 的一个法向量为 $\vec{m} = (x, y, z)$,

$$\text{则} \begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{AM} = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{AQ} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z = 0 \end{cases}, \text{取 } \vec{m} = (0, 1, 1) \dots\dots 11 \text{分}$$

$$\text{设平面 } QAM \text{ 与平面 } PAN \text{ 所成锐二面角为 } \theta, \therefore \cos \theta = \frac{|\vec{m} \cdot \overrightarrow{MD}|}{|\vec{m}| \cdot |\overrightarrow{MD}|} = \frac{|0 - 2 + 0|}{\sqrt{2} \times \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}}{5} \dots\dots$$

12分

$$\therefore \text{平面 } QAM \text{ 与平面 } PAN \text{ 所成锐二面角的余弦值为 } \frac{\sqrt{10}}{5}.$$

21 (1) 根据题意抛物线 C 的方程为 $y^2 = 2px (p > 0)$,

$$\text{则 } |MF| = n + \frac{p}{2} = 2, 2pn = 4, \dots\dots 2 \text{分}, \text{解得 } p = 2, n = 1, \dots\dots 3 \text{分},$$

所以抛物线 C 的标准方程为 $y^2 = 4x$4分

(2) 由题意知, $F(1,0)$, 直线 m 的斜率不为0, 可设直线 m 的方程为 $x = ty + 1$,5分

$$\text{联立方程得} \begin{cases} y^2 = 4x \\ x = ty + 1 \end{cases}, \text{消去 } x \text{ 并化简得 } y^2 - 4ty - 4 = 0, \dots\dots 6 \text{分}$$

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), P(x_0, y_0)$, 则 $y_1 + y_2 = 4t, y_1 \cdot y_2 = -4$7分

$$\text{因为 } A, P \text{ 两点在抛物线 } C \text{ 上, 所以} \begin{cases} y_1^2 = 4x_1 \\ y_0^2 = 4x_0 \end{cases},$$

所以 $k_1 = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1} = \frac{4}{y_0 + y_1}$ ，同理可得 $k_2 = \frac{4}{y_0 + y_2}$ ，……8 分，则

$$k_1 + k_2 = \frac{4}{y_1 + y_0} + \frac{4}{y_2 + y_0} = \frac{4(y_1 + y_2 + 2y_0)}{(y_1 + y_0)(y_2 + y_0)} = \frac{4(y_1 + y_2 + 2y_0)}{y_1 y_2 + y_0(y_1 + y_2) + y_0^2} = \frac{4(4t + 2y_0)}{-4 + 4ty_0 + y_0^2} = 2,$$

……9 分

所以 $8t + 4y_0 = -4 + 4ty_0 + y_0^2$ ，即 $y_0^2 + (4t - 4)y_0 - 8t - 4 = 0$ (*) ……10 分

因为 $\Delta = (4t - 4)^2 + 4(8t + 4) = 16(t^2 + 2) > 0$ ，所以方程 (*) 有两个不同的解，……11 分

故满足 $k_1 + k_2 = 2$ 的点 P 的个数为 2. ……12 分

22 (1) $\because f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$ ， $f'(x) = x - 2a + \frac{1}{x}$. ……1 分

$\because$ 函数 $f(x)$ 是 $(0, +\infty)$ 上的增函数，

$$\therefore f'(x) = x + \frac{1}{x} - 2a \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} - 2a = 2 - 2a \geq 0, \therefore a \leq 1. \text{……3 分}$$

$\therefore$ 实数 a 的取值范围是 $a \leq 1$.

(2)(i) $\because g(x) = x(\ln x + 2 - 2ax) = 0, \therefore \ln x + 2 - 2ax = 0 (x > 0)$ 的两个根为 x_1, x_2 . ……

4 分

不妨设 $x_2 > x_1 > 0$

$$\therefore \begin{cases} \ln x_1 + 2 = 2ax_1 \\ \ln x_2 + 2 = 2ax_2 \end{cases} \therefore 2a(x_2 - x_1) = \ln x_2 - \ln x_1 \therefore a = \frac{\ln x_2 - \ln x_1}{2(x_2 - x_1)} \text{……5 分}$$

要证: $x_1 + x_2 > \frac{1}{a}$,

$$\text{只需证 } x_1 + x_2 > \frac{2(x_2 - x_1)}{\ln x_2 - \ln x_1} \Leftrightarrow \ln x_2 - \ln x_1 > \frac{2(x_2 - x_1)}{x_1 + x_2} \Leftrightarrow \ln \frac{x_2}{x_1} > \frac{2(\frac{x_2}{x_1} - 1)}{\frac{x_2}{x_1} + 1} \text{……6 分}$$

$$\text{令 } t = \frac{x_2}{x_1} > 1, F(t) = \ln t - \frac{2(t-1)}{t+1} \quad (t > 1)$$

$$\therefore F'(t) = \frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2} > 0 \text{ 在 } t \in (1, +\infty) \text{ 恒成立, } \therefore F(x) \text{ 在 } t \in (1, +\infty) \text{ 为增函数,}$$

$$\therefore F(x) > F(1) = 0$$

$$\therefore x_1 + x_2 > \frac{1}{a} \quad \cdots \cdots 8 \text{ 分}$$

$$(ii) \because x_2 - 3x_1 \geq 0, \therefore t = \frac{x_2}{x_1} \geq 3,$$

$$\therefore \begin{cases} \ln x_1 + 2 = 2ax_1 \\ \ln x_2 + 2 = 2ax_2 \end{cases} \therefore \ln x_2 + \ln x_1 + 4 = 2a(x_2 + x_1)$$

$$\therefore \ln x_2 + \ln x_1 + 4 = \frac{\ln x_2 - \ln x_1}{x_2 - x_1} (x_1 + x_2), \therefore \ln(x_1 x_2) + 4 = \frac{\frac{x_2}{x_1} + 1}{\frac{x_2}{x_1} - 1} \ln \frac{x_2}{x_1} \quad \cdots \cdots 9 \text{ 分}$$

$$\text{令 } G(x) = \frac{(t+1)}{t-1} \ln t, (t \geq 3), \therefore G'(t) = \frac{t - \frac{1}{t} - 2 \ln t}{(t-1)^2} (t \geq 3) \quad \cdots \cdots 10 \text{ 分}$$

$$\text{令 } h(t) = t - \frac{1}{t} - \ln t (t \geq 3), \therefore h'(t) = \frac{(t-1)^2}{t^2} \geq 0$$

$$\therefore h(x) \text{ 在 } t \in (1, +\infty) \text{ 为增函数, } \therefore h(x) \geq h(3) > h(1) = 0, \therefore G'(t) = \frac{t - \frac{1}{t} - 2 \ln t}{(t-1)^2} > 0$$

$$\therefore G(x) \text{ 在 } t \in [3, +\infty) \text{ 为增函数, } \therefore G(x) \geq G(3) = 2 \ln 3 = \ln 9. \quad \cdots \cdots 11 \text{ 分}$$

$$\therefore \ln x_2 + \ln x_1 + 4 \geq \ln 9, \therefore \ln(x_1 \cdot x_2) \geq \ln \frac{9}{e^4}, \therefore x_1 \cdot x_2 \geq \frac{9}{e^4}$$

$$\therefore x_1 + x_2 > 2\sqrt{x_1 \cdot x_2} = 2\sqrt{\frac{9}{e^4}} = \frac{6}{e^2}$$

$$\therefore x_1 + x_2 > \frac{6}{e^2} \quad \cdots \cdots 12 \text{ 分}$$

正确教育版权声明



北京正确教育投资有限公司（以下简称“正确教育”）旗下网站所发布的资源系作者本人或经学校授权，只供会员学校的下载使用不做商业用途。

1.作者及作者所属学校向我司投稿的原创资料，即表示您同意我司和作者共同拥有此资料的版权，同意我司有优先集结、使用该原创的资料的权利，包括商业性的使用。

2.对于作者及所属学校的投稿资料所引发的版权、署名权的异议、纠纷，正确教育不承担任何法律责任。

3.作者及所属学校的投稿资料必须遵守中华人民共和国的相关法律法规，若有违规行为，责任自负。

我司严正声明如下：

我司强烈谴责和坚决反对任何形式的知识产权侵权行为，依照《侵权责任法》、《著作权法》、《信息网络传播权保护条例》等规定，所有未经我司允许擅自发布、转载、传播等或用于其他商业目的的个人或单位，均构成侵权，严重侵害我司的合法权益，也涉嫌构成刑事犯罪、侵犯著作权罪、侵犯商业秘密罪，正确教育将通过法律途径追究其侵权行为，并保留要求赔偿损失的权利。

特此声明！

北京正确教育投资有限公司

二〇二〇年四月十三日

