

从课本题目到高考试题的变式研究^①

陈炳泉

(福建省仙游县华侨中学 351200)

随着课程改革的理性推进,高考数学试卷逐渐形成了稳定、成熟的命题风格.试题既围绕主干内容加强对基本概念、基本思想方法的考查,又立足于培育学生支撑终身发展和适应时代要求的数学素养,突出考查数学理性思维和创新意识.试题以新颖的设计方式,增强了试题的灵活性和开放性,让学生从不同角度认识问题,鼓励学生主动思考、发散思维,激发学生的想象力和思想的张力,其目的是把学生从标准答案中解放出来,降低题海战术、“机械刷题”的收益.以此引导中学教学遵循教育规律、回归课堂,用好课本——国家教科书,避免超纲学、超量学,扎实推进素质教育.

源于教材,高于教材,是高考试题的真实写照.高考依纲扣本、万变不离其宗,其中的“本”指的就是数学课本,“宗”就是数学课本中数学核心概念以及概念形成与发展过程中反映出来的数学思想方法.近几年高考数学试卷中都有源自数学教科书的试题,是教科书上例、习题的重新组合与变式呈现.教科书中的题目大多都蕴涵着丰富、深刻的背景,以此为出发点进行变式研究是提高高考成绩的一种有效途径.

本文介绍笔者在高考复习时,对几道教科书题目进行变式研究的教学实践与思考,供同仁参考.

1 通过逆向思考构造新的命题

例1 (高中数学人教A版教科书,选修2-1,第69页,例4)斜率为1的直线 l 经过抛物线 $y^2=4x$ 的焦点 F ,且与抛物线相交于 A, B 两点,求线段 AB 的长.

教科书对本题的解法进行了抽丝剥茧般地分

析,指出“直接由抛物线的方程和直线 l 的方程,求出 A, B 两点的坐标,并结合两点间的距离公式求出 $|AB|$ ”具有一般性,但是需要复杂的代数运算.紧接着教科书介绍了另外一种方法——数形结合的方法:

如图1,设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$.由抛物线的定义可知,

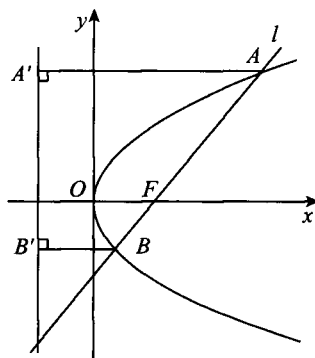


图1

$|AF|$ 等于点 A 到准线的距离 $|AA'|$.

设 $|AA'| = d_A$,

而 $d_A = x_1 + 1$, 于是 $|AF| = d_A = x_1 + 1$.

同理, $|BF| = |BB'| = d_B = x_2 + 1$,

于是得 $|AB| = |AF| + |BF| = x_1 + x_2 + 2$.

由此可见,只要求出点 A, B 的横坐标之和 $x_1 + x_2$, 就可以求出 $|AB| = 8$.

在解后反思中,除了提炼具体方法与数学思想,还应该从创新的视角启发学生变式思考:你能根据题目的题设与结论构造不同的命题吗?

在本题的系统中,已知条件有:抛物线 $y^2 = 4x$ 及其焦点 F , 斜率为1的直线 l , 直线 l 经过点

^① 本文系福建省教育科学“十三五”规划2018年度立项课题《高中数学核心素养之数学建模能力培养的研究》(立项批准号:FJJKXB18-719)的研究成果之一.

F. 结论是 $|AB|=8$.

学生们独立思考与相互交流后, 分别得到如下命题:

(1) 直线 l 经过抛物线 $y^2=4x$ 的焦点 F , 与抛物线相交于 A, B 两点, 且 $|AB|=8$. 求直线 l 的斜率. (答案: ± 1)

(2) 斜率为 1 的直线 l 与抛物线 $y^2=4x$ 相交于 A, B 两点, 且 $|AB|=8$. 求证直线 l 经过点 $(1, 0)$.

(3) 斜率为 1 的直线 l 经过抛物线 $y^2=2px$ 的焦点 F , 与该抛物线相交于 A, B 两点, 且 $|AB|=8$. 求 p 的值. (答案: $p=\pm 2$)

高考试题链接

(2018 年全国高考 II 卷, 文科第 20 题, 理科第 19 题) 设抛物线 $C: y^2=4x$ 的焦点为 F , 过 F 且斜率为 $k(k>0)$ 的直线 l 与 C 交于 A, B 两点, $|AB|=8$.

(I) 求 l 的方程;

(II) (略)

数学命题有四种形式, 即原命题、逆命题、否命题和逆否命题. 根据命题的等效原理可知, 原命题和其逆否命题同真同假, 而否命题与逆命题是相互等效的, 但原命题和其逆命题之间的真假无必然的联系, 因此可以通过逆向变式思考构造逆命题并论证其真伪, 由此培养学生的数学理性思维.

一个命题的题设和结论都可能包含若干要素, 只要部分或整体地交换这些要素, 便可构造出原命题的变式命题, 我们把它称为原来命题的一个“逆向”命题.

学生常习惯于正向思考, 而不善于反向考察. 通过对原命题的变式思考来构造新的逆向命题, 既可检验学生对已有的概念和命题是否真正的理解和掌握, 又能促使他们发现一些有意义的新的数学命题, 从而培养学生的逻辑推理素养、创新意识和创新能力.

2 通过类比与归纳构造新的命题

例 2 (高中数学人教 A 版教科书, 选修 2-1, 第 73 页习题 A 组, 第 6 题) 如图 2, 直线 $y=x-2$ 与抛物线 $y^2=2x$ 相交于 A, B 两点, 求证: $OA \perp OB$.

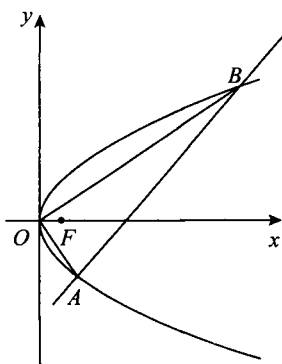


图 2

本题的解答并不复杂, 且有多种解法, 但要启发学生对不同的解法进行思考与辨析, 感悟它们共同的本质:

$$\begin{array}{ccc}
 OA \perp OB & \iff & k_{OA} \cdot k_{OB} = -1 \\
 \updownarrow & \swarrow \searrow & \updownarrow \\
 \vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0 & \iff & x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0
 \end{array}$$

即切入点可以不同, 但最后都是借助代数方法, 通过计算 A, B 两点的坐标满足 $x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0$, 得到几何结论: $OA \perp OB$. 让学生体会解析几何的学科特色——代数运算表其外, 几何性质蕴其中.

抛物线的顶点对弦 AB 的张角竟然是直角! 这是偶然的吗? 对此我们还有什么想法吗?

生 1: 抛物线的顶点只对这一条弦的张角是直角吗? 也就是说还有其它的弦也具有这样的性质吗?

生 2: 由抛物线的对称性可知, 直线 AB 关于 x 轴的对称直线 $y = -x + 2$ 被该抛物线所截得的弦 $A_1 B_1$ 也具有这样的性质—— $OA_1 \perp OB_1$.

生 3: 这样的弦有多少条? 它们有什么共性吗?

生 4: 凡是过定点 $(2, 0)$ 的弦都具有这样的性质.

即: 过定点 $(2, 0)$ 的直线 l 与抛物线 $y^2=2x$ 相交于 A, B 两点, O 是抛物线的顶点, 则 $OA \perp OB$. (证略)

生 5: 这个命题的逆命题也成立, 所以可统一概括为: 直线 l 与抛物线 $y^2=2x$ 相交于点 A, B ; O 是抛物线的顶点, 则 $OA \perp OB$ 的充要条件是直线 l 过定点 $(2, 0)$.

师:在科学研究中“有目的地提出问题往往比解决问题更重要”.我们能从这个问题出发,再发现一些新的问题吗?

生:……

师:或者说题设中的某些数字可以改变吗?能将上述特殊情形下的结论推广到更一般情形吗?

生6:(命题3)直线 l 与抛物线 $y^2=2px$ 相交于点 A, B ; O 是抛物线的顶点,则 $OA \perp OB$ 的充要条件是直线 l 恒过定点 $(2p, 0)$.

师:由特殊到一般是认识事物(数学)规律的重要思维方法,只有将问题中的具体数字变为字母后,才能更深刻地揭示抛物线的这一性质.

当然,猜想不等于证明,在数学的探索性活动中,不能把“结论”仅停止于猜想阶段,如有可能要给出它的逻辑证明或特例否定.

高考试题链接

(2017年全国高考Ⅲ卷理科第20题)已知抛物线 $C: y^2=2x$,过点 $(2, 0)$ 的直线 l 交 C 与 A, B 两点,圆 M 是以线段 AB 为直径的圆.

(1)证明:坐标原点 O 在圆 M 上;

(2)设圆 M 过点 $P(4, -2)$,求直线 l 与圆 M 的方程.

类比与归纳是构造新的问题命题的重要思维方法.所谓类比,是指由一类事物所具有的某种属性,可以推测与其类似的事物也应具有这种属性的一种推理方法.所谓归纳就是从“考虑一个对象过渡到考虑包含该对象的一个集合;或者从考虑一个较小的集合过渡到考虑包含该较小集合的更大集合.”(波利亚语)拉普拉斯指出“甚至在数学里,发现真理的主要工具也是归纳和类比.”“每当理智缺乏可靠论证的思路时,类比这个方法往往能指引我们前进.”(康德)无论是在初等数学、高等数学,还是其他领域,不通过类比与归纳这样的思维活动而做出发现,是不可想象的.

3 通过开放性设计构造新的命题

例3(高中数学人教A版教科书,选修2-1,第81页复习参考题B组,第7题)过抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点 F 作直线与抛物线交于 A, B 两点,以 AB 为直径画圆,借助信息技术工具,观察它与抛物线准线 l 的关系,你能得到什么结论?

本题结论:以 AB 为直径圆与该抛物线的准

线 l 相切(如图3).

我们知道,圆的直径是圆的一条特殊的弦,如果将本题中的焦点弦 AB 看成是圆的一般弦,结论如何呢?即经过 A, B 两点的圆还与该抛物线的准线相切吗?何时相切呢?

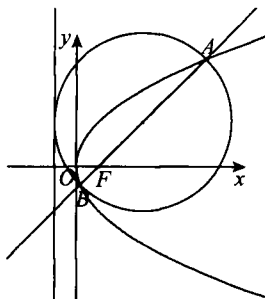


图3

显然,以焦点弦 AB 为直径的圆一定与该抛物线的准线 l 相切,那么是否就这一情况呢?对这个问题的深入探究是非常必要的.

高考试题链接

(2018年全国高考Ⅱ卷,文科第20题,理科第19题)设抛物线 $C: y^2=4x$ 的焦点为 F ,过 F 且斜率为 $k(k>0)$ 的直线 l 与 C 交于 A, B 两点, $|AB|=8$.

(I)求 l 的方程;

(II)求过点 A, B 且与 C 的准线相切的圆的方程.

解 (I) l 的方程为 $y=x-1$.

(II)由(I)得 AB 的中点坐标为 $(3, 2)$,所以 AB 的垂直平分线方程为 $y=-x+5$.如图4,设所求圆的圆心坐标为 $O_1(a, b)$,则

$$\begin{cases} b = -a + 5 \\ (a+1)^2 = \frac{(b-a+1)^2}{2} + 4^2 \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} a=3, \\ b=2, \end{cases} \text{或} \begin{cases} a=11, \\ b=-6. \end{cases}$$

即所求圆的圆心为 $O_1(3, 2)$ 或 $O_1(11, -6)$,对应的半径为 $r=a+1=4$ 或 $r=a+1=12$.

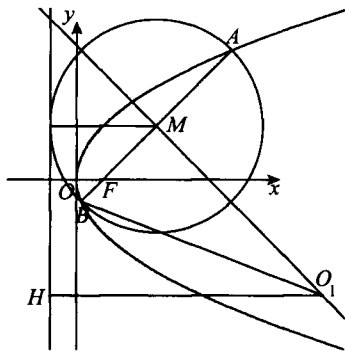


图4

因此所求圆的方程为 $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 16$ 或 $(x-11)^2 + (y+6)^2 = 144$.

从构成数学命题系统的四要素(条件、依据、方法、结论)出发,数学开放题可定性地分成四类:寻求条件——条件开放题;寻求解题依据或方法——策略开放题;寻求结论——结论开放题;如果数学题的条件、解题策略或结论都要求解题者在给定的情境中自行设定与寻找,则称为综合开放题.通过把一些教科书上的典型问题进行开放性再设计,是构造新的数学命题的一种重要方法.

教科书是几代数学人集体智慧的结晶,具有很强的学术性、指导性、规范性.在平时教学中要用好教科书,到了高三复习阶段,也要回归教科书,教师在深入研究的基础上充分感悟教科书的

编写意图,积极开发教科书的潜在功能,创设问题链情境,通过改变问题的某一“属性”,探索问题的引申、推广、拓展、变通,扎实做好高考复习中的变式研究,努力从课本走向高考.这不仅能使学生跳出“题海”,又能巩固基础知识,掌握数学思想方法,深化数学的本质内涵,更为重要的是能激发学生的问题意识,培养学生的数学素养.

参考文献

- [1] 陈元章. 光线反射性质多 变换角度思维活[J]. 数学通报, 2015, (54)2
- [2] 邱宗如. “先猜后证”是解决存在性探究问题的有效途径[J]. 数学通报, 2017, (56)2
- [3] 王芝平. 回归课本, 让课本习题焕发新的活力[J]. 中国考试, 2007, 11
- [M]. 北京: 中国科学家辞典编委会, 1982: 1389
- [6] 王元. 20 世纪中国知名科学家学术成就概览·数学卷·第一分册[M]. 北京: 科学出版社, 2001: 214—215
- [7] 北京大学《许宝騄文集》编辑委员会. 许宝騄文集[M]. 北京: 科学出版社, 1981: 前言
- [8] 江泽涵. 深切怀念许宝騄教授[A]. 见: 江泽涵先生纪念文集编委会. 数学泰斗世代宗师[C]. 北京: 北京大学出版社, 1998: 301
- [9] 江泽涵. 漫谈六十年来学和教拓扑学[A]. 见: 江泽涵先生纪念文集编委会. 数学泰斗世代宗师[C]. 北京: 北京大学出版社, 1998: 21
- [10] 徐利治. 西南联大数学名师的“治学经验之谈”及启示[J]. 数学教育学报, 2002, 11(3): 1—5
- [11] 曹一鸣. 数学教育的文化价值[J]. 数学教师, 1997(5): 7
- [12] 张衡. 民国科教精英百人传[M]. 南京: 南京出版社, 2013: 66
- [13] 孙宗明. 数学学科德育教程[M]. 长春: 东北师范大学出版社, 2011: 308
- [14] 刘锡园. 数学直观我见[J]. 数学教育学报, 1998, 7(1): 49—52
- [15] 沈鹏年. 行云流水记往(下)[M]. 上海: 上海三联书店, 2009: 463
- [16] 杨武之. 国立西南联合大学数学系概况[J]. 教学与教材研究, 1999(2): 32—36
- [17] 赵奎奇, 代钦, 等. 西南联大数学系课程设置与学籍管理特色[J]. 数学教育学报, 2010, 19(3): 15—17
- [18] 史承钧. 简明老舍词典[M]. 兰州: 甘肃教育出版社, 2000: 294

(上接第 13 页)

到其高度赞赏,在 Neyman 眼中,“许先生和 Wald 是在同一个水平上——他们是新成长一代中两位卓越的数理统计学家.”^[1]许先生为人谦和,谈吐高雅,淡泊名利,敬业教书,对学术高标准、严要求的科研精神感染了一代学子.他十分关心数学的普及工作,《数学通报》中的一些题目常引起他很大的兴趣.许先生终生未娶,把一生全部献给祖国的科研和教育事业,为祖国的科学发展奋斗到生命最后一息.这种献身祖国、献身科学的精神值得后辈学者永远学习.2019 年恰逢西南联大在昆明建校 81 周年,仅以此文表示对他的深切缅怀.

参考文献

- [1] 张尧庭.《许宝騄全集》简介[J]. 数学研究与评论, 1984, 4(1): 143—145
- [2] 张尧庭. 深深的怀念——我所知道的许宝騄先生[A]. 见: 许宝騄先生纪念文集编委会. 道德文章垂范人间——纪念一代宗师许宝騄诞辰九十周年[M]. 北京: 北京大学出版社, 2010: 84
- [3] 王元. 20 世纪中国知名科学家学术成就概览·数学卷·第一分册[M]. 北京: 科学出版社, 2001: 206—216
- [4] 北京大学《许宝騄文集》编辑委员会. 许宝騄文集[M]. 北京: 科学出版社, 1981: 前言
- [5] 中国科学家辞典编委会. 中国科学家传略辞典(现代第 4 辑)