2021 年普通高等学校招生全国统一考试模拟演练

数学

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上.

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑.如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号.回答非选择题时，将答案写在答题卡上.写在本试卷上无效.

3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

一、选择题.本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1．已知 M ，N 均为 $\mathbf{R}$ 的子集，且 $\complement_{\mathbf{R}}M \subseteq N$ ，则 $M \cup (\complement_{\mathbf{R}}N) =$

A．$\varnothing$　　B．M　　C．N　　D．$\mathbf{R}$

【答案】B

2．在 3 张卡片上分别写上 3 位同学的学号后，再把卡片随机分给这 3 位同学，每人 1 张，则恰有 1 位学生分到写有自己学号卡片的概率为

A．$\dfrac{1}{6}$　　B．$\dfrac{1}{3}$　　C．$\dfrac{1}{2}$　　D．$\dfrac{2}{3}$

【答案】C

3．关于 x 的方程 $x^2+ax+b=0$ ，有下列四个命题：

甲：$x=1$ 是该方程的根；　乙：$x=3$ 是该方程的根；

丙：该方程两根之和为 2；　丁：该方程两根异号.

如果只有一个假命题，则该命题是

A．甲　　B．乙　　C．丙　　D．丁

【答案】A

4．椭圆$\dfrac{x^2}{m^2+1}+\dfrac{y^2}{m^2}=1(m>0)$的焦点为$F_1$，$F_2$上顶点为$A$，若$\angle F_1AF_2=\dfrac{\pi}{3}$，则$m=$

A．1　　B．$\sqrt{2}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．2

【答案】C

5．已知单位向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$满足$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，若向量$\boldsymbol{c}=\sqrt{7}\boldsymbol{a}+\sqrt{2}\boldsymbol{b}$则$\sin\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}\rangle=$

A．$\dfrac{\sqrt{7}}{3}$　　B．$\dfrac{\sqrt{2}}{3}$　　C．$\dfrac{\sqrt{7}}{9}$　　D．$\dfrac{\sqrt{2}}{9}$

【答案】B

6．$(1+x)^2+(1+x)^3+\cdots+(1+x)^9$的展开式中$x^2$的系数是

A．60　　B．80　　C．84　　D．120

【答案】D

7．已知抛物线$y^2=2px$上三点$A(2,2)$，B，C，直线AB，AC是圆$(x-2)^2+y^2=1$的两条切线，则直线BC的方程为

A．$x+2y+1=0$　　B．$3x+6y+4=0$

C．$2x+6y+3=0$　　D．$x+3y+2=0$

【答案】B

【解析】$\because A(2,2)$在抛物线$y^2=2px$上，$\therefore y^2=2px$，$\therefore 4=4p$，$\therefore p=1$，$\therefore y^2=2x$，

过$A(2,2)$作圆C的切线，设切线斜率为k

切线：$y-2=k(x-2)$，即$kx-y-2k+2=0$

$\dfrac{|2k-0-2k+2|}{\sqrt{k^2+1}}=1$，$\therefore k=\pm\sqrt{3}$

当$k=\sqrt{3}$时，切线：$y-2=\sqrt{3}(x-2)$

$\begin{cases}y-2=\sqrt{3}(x-2)\\ y^2=2x\end{cases}$解得$\begin{cases}x=2\\ y=2\end{cases}$或$\begin{cases}x=\dfrac{8-4\sqrt{3}}{3}\\ y=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}-2\end{cases}$，$B(\dfrac{8-4\sqrt{3}}{3},\dfrac{2\sqrt{3}-6}{3})$

当$k=-\sqrt{3}$时，切线：$y-2=-\sqrt{3}(x-2)$

$\begin{cases} y-2=-\sqrt{3}(x-2) \\ y^2=2x \end{cases}$ 解得$\begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$或$\begin{cases} x=\dfrac{8+4\sqrt{3}}{3} \\ y=-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}-2 \end{cases}$，$C(\dfrac{8+4\sqrt{3}}{3},-\dfrac{2\sqrt{3}+6}{3})$

$\therefore k_{BC}=-\dfrac{1}{2}$，$y-\dfrac{2\sqrt{3}-6}{3}=-\dfrac{1}{2}(x-\dfrac{8-4\sqrt{3}}{3})$，即$3x+6y+4=0$，选 B.

8．已知$a<5$且$ae^5=5e^a$，$b<4$且$be^4=4e^b$，$c<3$且$ce^3=3e^c$，则

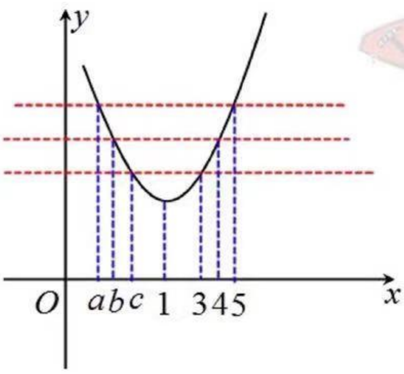
A．$c<b<a$　　B．$b<c<a$　　C．$a<c<b$　　D．$a<b<c$

【答案】D

【解析】令$f(x)=\dfrac{e^x}{x}$，$f'(x)=\dfrac{e^x(x-1)}{x^2}=0$，得$x=1$，

$f(x)$在$(0,1)$单调递减，在$(1,+\infty)$上单调递增

作出$f(x)$草图，如图所示



又$\because ae^5=5e^a$，$be^4=4e^b$，$ce^3=3e^c$，

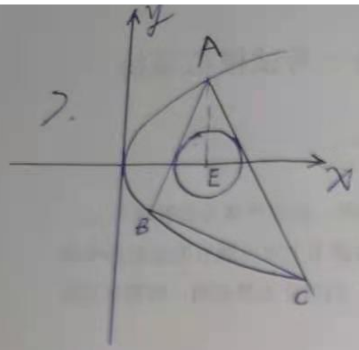
可得$f(a)=f(5)$，$f(b)=f(4)$，$f(c)=f(3)$

$\therefore a<b<c$，选 D.

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9．已知函数$f(x)=x\ln(1+x)$，则

7.



$y^2=2x \Rightarrow (y-2+2)^2=2(x-2+2)$

$\Rightarrow (y-2)^2+4(y-2)=2(x-2)$

设 BC： $m(x-2)+n(y-2)=1$

故 $(y-2)^2+4(y-2)[m(x-2)+n(y-2)]$
$=2(x-2)[m(x-2)+n(y-2)]$

$\Rightarrow (1+4n)(y-2)^2+(4m-2n)(x-2)(y-2)-2m(x-2)^2=0$

$\therefore (1+4n)\left(\frac{y-2}{x-2}\right)^2+(4m-2n)\frac{y-2}{x-2}-2m=0$

$\therefore \begin{cases} 4m-2n=0 \\ \dfrac{-2m}{1+4n}=-3 \end{cases}$

$\Rightarrow m=-\frac{3}{22}, n=-\frac{6}{22}$

$\therefore -\frac{3}{22}(x-2)+\left(-\frac{6}{22}\right)(y-2)=1$

$\Rightarrow 3x+6y+4=0.$

A．$f(x)$在$(0,+\infty)$单调递增

B．$f(x)$有两个零点

C．曲线$y=f(x)$在点$\left(-\frac{1}{2},f\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$处切线的斜率为$-1-\ln 2$

D．$f(x)$是偶函数

【答案】AC

【解析】由$f'(x)=\ln(1+x)-\dfrac{1}{1+x}+1$，

可知$f'(x)$单调递增，又$f'(0)=0$，故$f(x)$在$(-1,0)$单调递减，在$(0,+\infty)$单调递增，

A正确，则有$f(x)_{\min}=f(0)=0$，B错误，

又$f'(-\dfrac{1}{2})=-\ln 2-1$，$C$正确，

由定义域为$(-1,+\infty)$，所以$f(x)$不是偶函数，D错误，

故选：AC

10．设z_1，z_2，z_3为复数，$z_1\neq 0$.下列命题中正确的是

A．若$|z_2|=|z_3|$，则$z_2=\pm z_3$　　　　B．若$z_1z_2=z_1z_3$，则$z_2=z_3$

C．若$\overline{z_2}=z_3$，则$|z_1z_2|=|z_1z_3|$　　　　D．若$z_1z_2=|z_1|^2$，则$z_1=z_2$

【答案】BC

【解析】由$|z_2|=|z_3|$，取$z_2=1$，$z_3=i$，A错误；

由$z_1z_2=z_1z_3$，则$z_1(z_2-z_3)=0$，又$z_1\neq 0$，所以$z_2=z_3$，B正确；

由$\overline{z_2}=z_3$，则$|z_2|=|z_3|$，所以$|z_1z_2|=|z_1z_3|$，C正确

由$z_1z_2=|z_1|^2$，可知$z_2=z_1$或$z_2=\overline{z_1}$，D错误；

故选：BC

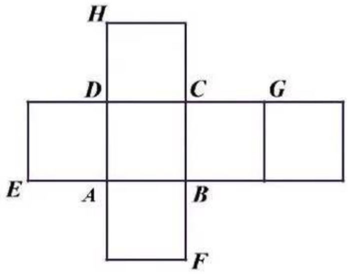
11．右图是一个正方体的平面展开图，则在该正方体中

A．$AE\,/\!/\,CD$

B．$CH // BE$

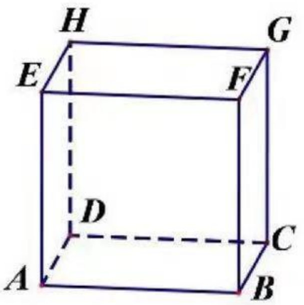
C．$DG \perp BH$

D．$BG \perp DE$



【答案】BCD

【解析】还原如下图，



由图易知$AE \perp CD$，$CH // BE$，A错误，B正确；

连结CH，易知$CH \perp DG$，$BC \perp DG$，$CH \cap BC = C$，所以$DG \perp$平面BCH，

所以$DG \perp BH$，C正确；

连结AH，易知$BG // AH$，又$DE \perp AH$，所以$BG \perp DE$，D正确；

故选：BCD.

12．设函数$f(x)=\dfrac{\cos 2x}{2+\sin x\cos x}$，则

A．$f(x)=f(x+\pi)$

B．$f(x)$的最大值为$\dfrac{1}{2}$

C．$f(x)$在$\left(-\dfrac{\pi}{4},0\right)$单调递增

D．$f(x)$在$\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$单调递减

【答案】AD

【解析】法一：

$$f(x)=\frac{\cos 2x}{2+\frac{1}{2}\sin 2x}=\frac{2\cos 2x}{4+\sin 2x}$$

$f(x+\pi)=\dfrac{2\cos 2(x+\pi)}{4+\sin 2(x+\pi)}=\dfrac{2\cos 2x}{4+\sin 2x}=f(x)$，A 正确

令$\dfrac{2\cos 2x}{4+\sin 2x}=m \Rightarrow m\sin 2x-2\cos 2x=-4m$

$\sqrt{m^2+4}\sin(2x+\varphi)=-4m$

$\left|\dfrac{-4m}{\sqrt{m^2+4}}\right|\le 1 \Rightarrow m^2\le \dfrac{4}{15}$，$m\le \dfrac{2\sqrt{15}}{15}$，$\therefore f(x)_{\max}=\dfrac{2\sqrt{15}}{15}$，B 错

对于 C，$f'(x)=\dfrac{-4\sin 2x(4+\sin 2x)-2\cos 2x\cdot 2\cos 2x}{(4+\sin 2x)^2}=\dfrac{-16\sin 2x-4}{(4+\sin 2x)^2}$

令$\varphi(x)=-16\sin 2x-4$，$\varphi(x)$在$\left(-\dfrac{\pi}{4},0\right)$上↘

且$\varphi\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=12>0$，$\varphi(0)=-4<0$，

$\therefore$存在唯一的$x_0\in\left(-\dfrac{\pi}{4},0\right)$使$\varphi(x_0)=0$

且当$-\dfrac{\pi}{4}<x<x_0$时，$\varphi(x)>0$，$f(x)$↗；

当$x_0<x<0$时，$\varphi(x)<0$，$f'(x)<0$，$f(x)$↘，C 错误

对于 D，$f'(x)=\dfrac{-16\sin 2x-4}{(4+\sin 2x)^2}<0$ 在$\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$上恒成立

$\therefore f(x)$在$\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$上↘，D 正确

选：AD.

法二：

$f(x)=\dfrac{\cos 2x}{2+\sin x\cos x}=\dfrac{2\cos 2x}{\sin 2x+2}$，$f(x+\pi)=\dfrac{2\cos 2(x+\pi)}{2+\sin 2(x+\pi)}=f(x)$，故$A$正确；

$f'(x)=\dfrac{-4(4\sin 2x+1)}{(\sin 2x+4)^2}$，

当$x\in(-\dfrac{\pi}{4},-\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{1}{4})$时，$f'(x)>0, f(x)$单调递增，故$C$错误；

当$x\in(-\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{1}{4},0)$时，$f'(x)<0, f(x)$单调递减，此时$f(x)>f(0)=\dfrac{1}{2}$，故$B$错误；

当 $x\in(0,\dfrac{\pi}{4})$ 时，$f'(x)<0,f(x)$ 单调递减，故 D 正确

综上：选 AD.

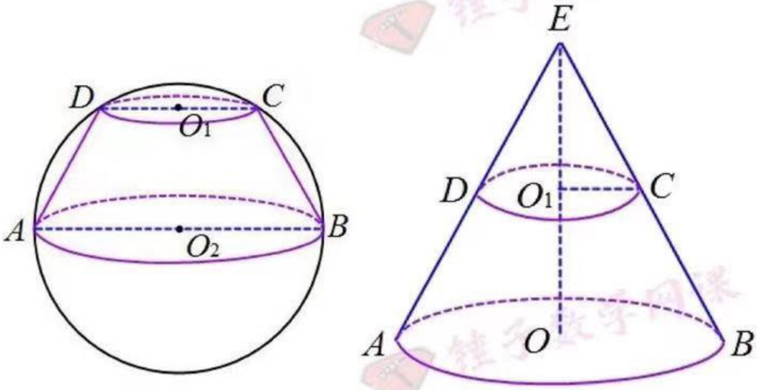
三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13．圆台上、下底面的圆周都在一个直径为 10 的球面上，其上、下底面半径分别为 4 和 5，

则该圆台的体积为__________.

【答案】61π

【解析】法 1：



$\because$ 球的直径为10，半径为5，而圆台的下底面半径为5，$\therefore$ 下底面为大圆

如图：$OC=5$

$\therefore DO_1=\sqrt{OC^2-O_1C^2}=3$

设 $EO_1=x$，则 $\dfrac{x}{x+3}=\dfrac{4}{5}$，$\therefore x=12$

$\therefore V_{E-圆O_1}=\dfrac{1}{3}\times16\pi\times12=64\pi$，$V_{E-圆O}=\dfrac{1}{3}\times25\pi\times15=125\pi$

$\therefore V_{圆台}=125\pi-64\pi=61\pi$

法 2：依题意可知圆台的下底面为球的大圆，

则圆台的高为 $h=\sqrt{5^2-4^2}=3$，

故体积为 $V=\dfrac{1}{3}\times\pi\times3\times(5^2+4^2+5\times4)=61\pi$.

14．若正方形一条对角线所在直线的斜率为 2，则该正方形的两条邻边所在直线的斜率分别为

__________，__________.

【答案】$\frac{1}{3}$；-3

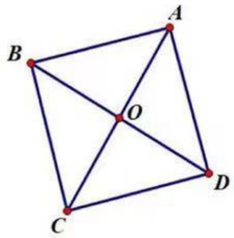
【解析】

法 1：正方形的对角线倾斜角为α，且$\tan\alpha = 2$

则正方形的两个邻边的倾斜角为$\alpha + \frac{\pi}{4}, \alpha - \frac{\pi}{4}$

$\tan(\alpha + \frac{\pi}{4}) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\frac{\pi}{4}}{1 - \tan\alpha\tan\frac{\pi}{4}} = -3$，$\tan(\alpha - \frac{\pi}{4}) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\frac{\pi}{4}}{1 + \tan\alpha\tan\frac{\pi}{4}} = \dfrac{2-1}{1+2} = \dfrac{1}{3}$

$\therefore$正方形的两个邻边的斜率为$-3, \frac{1}{3}$



法 2：如图，

设$O(0,0)$，$A(1,2)$，则可知$B(-2,1)$，$D(2,-1)$，

所以$k_{AB} = \dfrac{1-2}{-2-1} = \dfrac{1}{3}$，$k_{AD} = \dfrac{-1-2}{2-1} = -3$.

15．写出一个最小正周期为 2 的奇函数$f(x) =$__________.

【答案】$f(x) = \sin\pi x$

16．对一个物理量做n次测量，并以测量结果的平均值作为该物理量的最后结果.已知最后结果的误差$\varepsilon_n \sim N\left(0, \frac{2}{n}\right)$，为使误差$\varepsilon_n$在$(-0.5, 0.5)$的概率不小于 0.9545，至少要测量__________次（若$X \sim N(\mu, \sigma^2)$，则$P(|X-\mu| < 2\sigma) = 0.9545$）.

【答案】32

【解析】

法一：$P(-0.5 < \varepsilon_n < 0.5) \geq 0.9545$

而$P(|\varepsilon_n| < 2\sqrt{\frac{2}{n}}) = 0.9545$，$\therefore 2\sqrt{\frac{2}{n}} \leq 0.5 \Rightarrow n \geq 32$．应填：32.

法二：

依题意有 $P(|\xi_n|<2\sqrt{\frac{2}{n}})=0.9545$ ，取 $2\sqrt{\frac{2}{n}}=0.5$ ，得 $n=32$ ，

故至少测量 32 次.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（10 分）已知各项都为正数的数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+2}=2a_{n+1}+3a_n$.

（1）证明：数列 $\{a_n+a_{n+1}\}$ 为等比数列；

（2）若 $a_1=\frac{1}{2}$ ，$a_2=\frac{3}{2}$ ，求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

【解析】

（1）证：$a_{n+2}=2a_{n+1}+3a_n \Rightarrow a_{n+2}+a_{n+1}=3\left(a_{n+1}+a_n\right)$

$\therefore \{a_n+a_{n+1}\}$ 是以 a_1+a_2 为首项，3 为公比的等比数列.

（2）$a_2+a_1=2$ ，由 $a_{n+2}+a_{n+1}=3\left(a_{n+1}+a_n\right)$.

法 1： $\Rightarrow a_{n+1}+a_n=3^{n-1}\cdot\left(a_2+a_1\right)=2\cdot 3^{n-1}$

从而 $a_n=2\cdot 3^{n-2}-a_{n-1}=2\cdot 3^{n-2}-\left(2\cdot 3^{n-3}-a_{n-2}\right)=4\cdot 3^{n-3}+a_{n-2}\ (n\geqslant 3)$

$\Rightarrow$ 当 n 为奇数时，$a_n=4\cdot 3^{n-3}+4\cdot 3^{n-5}+\cdots+4\cdot 3^0+a_1=4\cdot\frac{1\cdot\left(9^{\frac{n-1}{2}}-1\right)}{9-1}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\cdot 3^{n-1}$

当 n 为偶数时，$a_n=4\cdot 3^{n-3}+4\cdot 3^{n-5}+\cdots+4\cdot 3^1+a_2=4\cdot\frac{3\cdot\left(9^{\frac{n-2}{2}}-1\right)}{9-1}+\frac{3}{2}=\frac{1}{2}\cdot 3^{n-1}$

综上，$a_n=\frac{1}{2}\cdot 3^{n-1}\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$.

法 2： $a_1=\frac{1}{2}$ ，$a_2=\frac{3}{2}$ ，$a_3=\frac{9}{2}$ ，下用数学归纳法证明 $a_n=\frac{1}{2}\cdot 3^{n-1}\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$

①$n=1$ ，2 时，显然成立

②假设 $n\leqslant k$ 时均成立 $\left(k\geqslant 2\right)$ ，考虑 $n=k+1$ 时，

$a_{k+1}=2a_k+3a_{k-1}=2\cdot\frac{1}{2}\cdot 3^{k-1}+3\cdot\frac{1}{2}\cdot 3^{k-2}=\frac{1}{2}\left(2\cdot 3^{k-1}+3^{k-1}\right)=\frac{1}{2}\cdot 3^k$

$\Rightarrow n=k+1$时也成立.

综上，有$a_n=\dfrac{1}{2}\cdot 3^{n-1}\left(n\in \mathbf{N}^*\right)$.

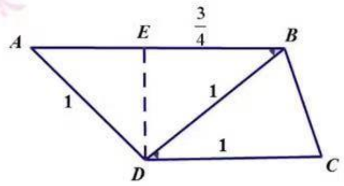
18.（12分）在四边形$ABCD$中，$AB\,//\,CD$，$AD=BD=CD=1$.

（1）若$AB=\dfrac{3}{2}$，求BC；

（2）若$AB=2BC$，求$\cos\angle BDC$.

【答案】

（1）如图，过D作$DE\perp AB$交AB于E

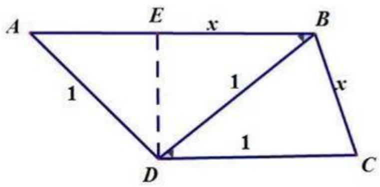


$\Rightarrow BE=\dfrac{1}{2}$，$AB=\dfrac{3}{4}$

$$\cos\angle BDC=\cos\angle EBD=\frac{\frac{3}{4}}{4}=\frac{3}{4}$$

$$BC^2=DB^2+DC^2-2DB\cdot DC\cdot\cos\angle BDC=1+1-2\cdot1\cdot1\cdot\frac{3}{4}=\frac{1}{2}\Rightarrow BC=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

（2）过D作$DE\perp AB$交AB于E，设$BC=x$



法1：$\Rightarrow BE=\dfrac{1}{2}AB=\dfrac{1}{2}\cdot 2BC=BC=x$

一方面，$\cos\angle BDC=\dfrac{DB^2+DC^2-BC^2}{2DB\cdot DC}=\dfrac{2-x^2}{2}$

另一方面，$\cos\angle BDC=\cos\angle EBD=\dfrac{x}{1}=x\Rightarrow\dfrac{2-x^2}{2}=x\Rightarrow x^2+2x-2=0\ (x+1)^2=3$

由$x>0\Rightarrow x=\sqrt{3}-1\Rightarrow\cos\angle BDC=\cos\angle EBD=\dfrac{x}{1}=x=\sqrt{3}-1$

法2：设$y=\cos\angle BDC$

有：$BE=BD\cdot\cos\angle BDC=1\cdot y=y$

$$BC=\sqrt{DB^2+DC^2-2DB\cdot DC\cdot\cos\angle BDC}=\sqrt{1+1-2\cdot y}=\sqrt{2-2y}$$

$$BC=\frac{1}{2}AB=BE\Rightarrow\sqrt{2-2y}=y\Rightarrow y^2+2y-2=0\ (y+1)^2=3$$

$\Rightarrow y_1=\sqrt{3}-1$，$y_2=-\sqrt{3}-1$，$y_2<-1\Rightarrow$舍

$\therefore \cos\angle EDC=y=\sqrt{3}-1$.

19.（12 分）一台设备由三个部件构成，假设在一天的运转中，部件 1，2，3 需要调整的概率分别为 0.1，0.2，0.3，各部件的状态相互独立.

（1）求设备在一天的运转中，部件 1，2 中至少有 1 个需要调整的概率；

（2）记设备在一天的运转中需要调整的部件个数为 X，求 X 的分布列及数学期望.

【解析】

（1）$P(1,2\text{中至少有一个需要调整})=1-P(1,2\text{不需要调整})$

$=1-(1-0.1)\times(1-0.2)=0.28$

（2）$P(X=3)=0.1\times0.2\times0.3=6\times10^{-3}$

$P(X=0)=0.9\times0.8\times0.7=504\times10^{-3}$

$P(X=1)=0.1\times0.8\times0.7+0.9\times0.2\times0.7+0.9\times0.8\times0.3=398\times10^{-3}$

$P(X=2)=0.1\times0.2\times0.7+0.1\times0.8\times0.3+0.9\times0.2\times0.3=92\times10^{-3}$

$\therefore$分布列为

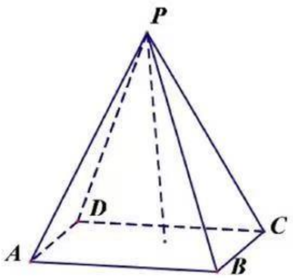
X	0	1	2	3
P	0.504	0.398	0.092	0.006

$EX=\sum_{i=0}^{3}i\cdot P(X=i)=0.6$.

20.（12 分）北京大兴国际机场的显著特点之一是各种弯曲空间的运用.刻画空间的弯曲性是几何研究的重要内容.用曲率刻画空间弯曲性，规定：多面体顶点的曲率等于 2π 与多面体在该点的面角之和的差（多面体的面的内角叫做多面体的面角，角度用弧度制），多面体面上非顶点的曲率均为零，多面体的总曲率等于该多面体各顶点的曲率之和.例如：正四面体在每个顶点有 3 个面角，每个面角是 $\frac{\pi}{3}$，所以正四面体在各顶点的曲率为 $2\pi-3\times\frac{\pi}{3}=\pi$，故其总曲率为 4π.

（1）求四棱锥的总曲率；

（2）若多面体满足：顶点数－棱数＋面数＝2，证明：这类多面体的总曲率是常数.



【解析】

法 1：

（1）由定义，多面体总曲率＝$2\pi\times$顶点数－各面内角和

而四棱锥有 5 个顶点，5 个面，分别为 4 个三角形和 1 个四边形

$\therefore$ 四棱锥总曲率＝$2\pi\times5-(\pi\times4+2\pi\times1)=4\pi$.

（2）设该多面体有 m 个顶点，k 个面，每个面锤子数学依次有 a_i 条棱，$(i=1,\cdots,k)$

则由题意 $m-\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{k}a_i}{2}+k=2$，又每个面内角和为 $(a_i-2)\pi$

$\therefore$ 由（1），总曲率＝$2\pi m-\left[\sum\limits_{i=1}^{k}(a_i-2)\pi\right]=2\pi\left(2+\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{k}a_i}{2}-k\right)-\sum\limits_{i=1}^{k}a_i\pi+2k\pi=4\pi$

为常数.

法 2：

（1）四棱锥的总曲率为 $10\pi-4\times\pi-2\pi=4\pi$.

（2）设多面体顶点数为 x，棱数为 y，面数为 z，$\therefore x-y+z=2$

总曲率为 $x\cdot2\pi-(y-z)\cdot2\pi=(x-y+z)\cdot2\pi=4\pi$ 为常数.

21．(12 分) 双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左顶点为 A，右焦点为 F，动点 B 在 C 上.

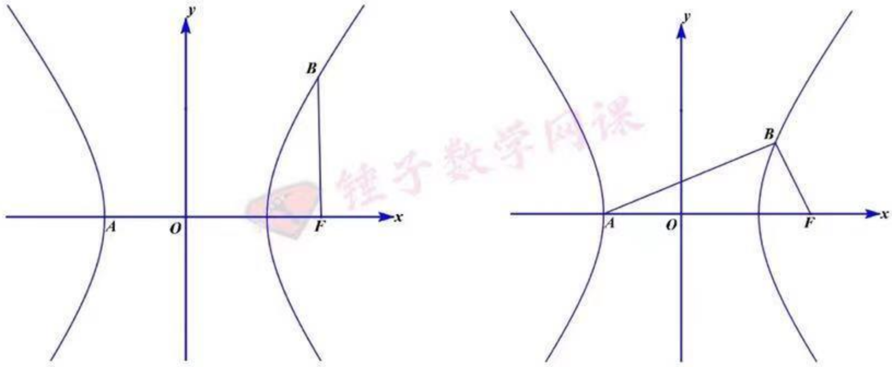
当 $BF\perp AF$ 时，$|AF|=|BF|$.

（1）求C的离心率；

（2）若B在第一象限，证明：$\angle BFA=2\angle BAF$．

【解析】（1）当$BF\perp AF$时，$BF=\dfrac{b^2}{a}$

$\therefore a+c=\dfrac{b^2}{a}\Rightarrow a^2+ac=c^2-a^2$，$(\mathrm{e}-2)(\mathrm{e}+1)=0$，$\mathrm{e}=2$．



（2）$\dfrac{c}{a}=2$，$c=2a$，双曲线C方程：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{3a^2}=1$

设$B(x_0,y_0)$，当$a<x_0<c$时，

即证: $\tan\angle BFA=\tan 2\angle BAF=\dfrac{2\tan\angle BAF}{1-\tan^2\angle BAF}$

即证：$\dfrac{y_0}{2a-x_0}=\dfrac{2\cdot\dfrac{y_0}{x_0+a}}{2-\dfrac{y_0^2}{(x_0+a)^2}}=\dfrac{2y_0(x_0+a)}{(x_0+a)^2-y_0^2}$

即证$2(x_0+a)(2a-x_0)=(x_0+a)^2-3x_0^2+3a^2$

$2(ax_0-x_0^2+2a^2)=-2x_0^2+2ax_0+4a^2$显然锤子数学成立

此时，$\angle BFA,2\angle BAF$均为锐角，$\angle BFA=2\angle BAF$

当$x_0=c$时，$BF=AF$，此时，$\angle BFA=90^\circ=2\angle BAF$

当$x_0>c$时，同理可证，$\tan\angle BFA=\tan 2\angle BAF$；

此时，$\angle BFA$，$2\angle BAF$均为钝角

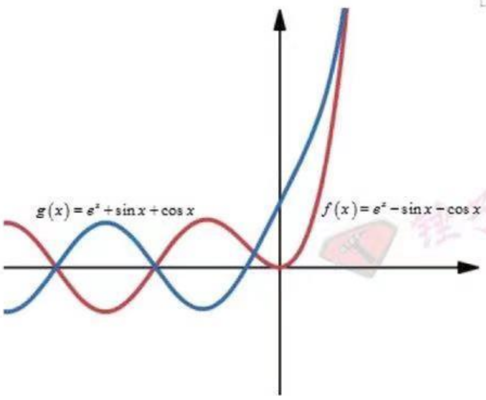
$\therefore\angle BFA=2\angle BAF$，证毕！

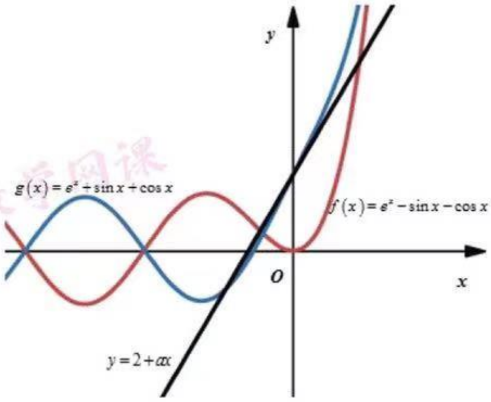
22．（12 分）已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-\sin x-\cos x$，$g(x)=\mathrm{e}^x+\sin x+\cos x$.

（1）证明：当 $x>-\dfrac{5\pi}{4}$ 时，$f(x)\ge 0$；

（2）若 $g(x)\ge 2+ax$，求 a.

【解析】





法 1：

（1）证明：要证：$f(x)\ge 0$，即证 $\mathrm{e}^x-\sin x-\cos x\ge 0$，$\dfrac{\sin x+\cos x}{\mathrm{e}^x}\le 1$

令 $F(x)=\dfrac{\sin x+\cos x}{\mathrm{e}^x}$，

$$F'(x)=\frac{(\cos x-\sin x)\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x(\sin x+\cos x)}{\mathrm{e}^{2x}}=\frac{-2\sin x}{\mathrm{e}^x}$$

当 $-\dfrac{5\pi}{4}<x<-\pi$ 时，$F'(x)<0$，$F(x)\searrow$；

当 $-\pi<x\le 0$ 时，$F'(x)>0$，$F(x)\nearrow$

此时当 $x\in\left(-\dfrac{5\pi}{4},0\right]$ 时，$F(x)=\max\left\{F\left(-\dfrac{5\pi}{4}\right),F(0)\right\}=1$

当 $x>\pi$ 时，$\dfrac{\sin x+\cos x}{\mathrm{e}^x}\le\dfrac{\sqrt{2}}{\mathrm{e}^{\pi}}<1$ 也成立

综上：当 $x>-\dfrac{5\pi}{4}$ 时，$f(x)\ge 0$.

（2）$\mathrm{e}^x+\sin x+\cos x-2-ax\ge 0$

令 $h(x)=\mathrm{e}^x+\sin x+\cos x-2-ax$，$\because h(x)\ge h(0)$

$\therefore h'(x)=\mathrm{e}^x+\cos x-\sin x-a$

$\therefore 0$ 是 $h(x)$ 的一个最小值点，也是锤子数学极小值点

$\therefore h'(0)=0\Rightarrow 1+1-a=0$，$a=2$.

补充证明：当 $a=2$ 时，需证 $\mathrm{e}^x+\sin x+\cos x-2x\ge 0$ 验证充分性

令 $h(x)=\mathrm{e}^x+\sin x+\cos x-2x-2$，$h'(x)=\mathrm{e}^x+\cos x-\sin x-2$

令 $\dfrac{\sin x-\cos x+2}{\mathrm{e}^x}=F(x)$

$$F'(x)=\frac{(\cos x+\sin x)\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x(\sin x-\cos x+2)}{\mathrm{e}^{2x}}=\frac{2\cos x-2}{\mathrm{e}^x}\le 0$$

$\therefore F(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上↘，注意到 $F(0)=1$

$\therefore$ 当 $x\le 0$ 时，$F(x)\ge 1$，

此时 $\dfrac{\sin x-\cos x+2}{\mathrm{e}^x}\ge 1\Rightarrow \mathrm{e}^x+\cos x-\sin x-2\le 0$

$h'(x)\le 0, h(x)$ ↘，$h(x)\ge h(0)=0$

当 $x>0$ 时，$F(x)<1$，

此时 $\dfrac{\sin x-\cos x+2}{\mathrm{e}^x}<1\Rightarrow \mathrm{e}^x+\cos x-\sin x-2>0$

$h'(x)>0, h(x)$ ↗，$h(x)>h(0)=0$

综上：$a=2$ 符合题意.

法 2：

（1）当 $x\ge\dfrac{3\pi}{4}$ 时，$f(x)=e^x-\sin x-\cos x>e^{\frac{3}{4}\pi}-2>0$

当 $x\in(-\dfrac{5\pi}{4},-\dfrac{\pi}{4})$ 时，$f(x)=e^x-\sin x-\cos x>-(\sin x+\cos x)=-\sqrt{2}\sin(x+\dfrac{\pi}{4})>0$

当 $x\in(-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4})$ 时，构造函数锤子数学 $g(x)=\dfrac{\sin x+\cos x}{e^x}$，$g'(x)=-\dfrac{2\sin x}{e^x}$

当$x\in(-\frac{\pi}{4},0), g'(x)>0, g(x)$单调递增；当$x\in(0,\frac{3\pi}{4}), g'(x)<0, g(x)$单调递减，

此时$g(x)\le g(0)=1$，因此有$e^x-\sin x-\cos x\ge 0$

综上：当$x>-\frac{5}{4}\pi$时，$f(x)\ge 0$.

（2）$h(x)=g(x)-ax-2=e^x+\sin x+\cos x-ax-2$ ，$h'(x)=e^x+\cos x-\sin x-a$

由题知$h(x)\ge 0$锤子数学恒成立，而$h(0)=0$，因此0为$h(x)$的极值点，$h'(0)=0$，解得$a=2$，

下证$a=2$符合题意

构造函数$\varphi(x)=\frac{\sin x-\cos x+2}{e^x}$，$\varphi'(x)=\frac{2\cos x-2}{e^x}\le 0$，$\varphi(x)$单调递减，

当$x<0$时，$\varphi(x)>\varphi(0)=1$，此时$h'(x)<0, h(x)$单调递减；

当$x>0$时，$\varphi(x)<\varphi(0)=1$，此时$h'(x)>0, h(x)$单调递增；

因此有$h(x)\ge h(0)=0$

综上：$a=2$.

8 省联考压轴题精彩绝杀

22．（12 分）已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-\sin x-\cos x$，$g(x)=\mathrm{e}^x+\sin x+\cos x$．

（1）证明：当 $x>-\dfrac{5\pi}{4}$ 时，$f(x)\geq 0$；

（2）若 $g(x)\geq 2+ax$，求 a．

【解析】法一：

（1）证：$f(x)=\mathrm{e}^x-\sqrt{2}\cdot\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$，

$f'(x)=\mathrm{e}^x-\sqrt{2}\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$，$f''(x)=\mathrm{e}^x+\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$

当 $-\dfrac{5}{4}\pi<x\leq-\dfrac{\pi}{4}$ 时，$f(x)=\mathrm{e}^x-\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\geq \mathrm{e}^x>0$

当 $x>-\dfrac{\pi}{4}$ 即 $x+\dfrac{\pi}{4}>0$ 时，$f''(x)>0$，$f'(x)$ 单增

又 $f'(0)=0\Rightarrow -\dfrac{\pi}{4}<x<0$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单减

$x\geq 0$ 时，$f'(x)\geq 0$，$f(x)$ 单增

$\Rightarrow$ 当 $x>-\dfrac{\pi}{4}$ 时，$f_{\min}=f(0)=\mathrm{e}^0-0-1=0$，$\therefore$ 此时 $f(x)=0$

综上，$x>-\dfrac{5}{4}\pi$ 时，$f(x)\geq 0$．

（2）$\mathrm{e}^x+\sin x+\cos x\geq 2+ax$，

令 $h(x)=\mathrm{e}^x+\sin x+\cos x-ax=2\Rightarrow h(x)=0$

法 1： $h'(x)=\mathrm{e}^x+\cos x-\sin x-a$，$h'(0)=2-a$，$h(0)=0$

若 $h'(0)<0$ 即 $a>2$，由 $h(0)=0\Rightarrow$ 存在 $x_1>0$ 使 $h(x_1)<0$ 锤子数学矛盾

若 $h'(0)>0$ 即 $a<2$，由 $h(0)=0\Rightarrow$ 存在 $x_2<0$ 使 $h(x_2)<0$ 矛盾

综上，$h'(0)=0$，$a=2$

法 2： $x>0$时，$a\le\dfrac{e^x+\sin x+\cos x-2}{x}$，令$x\to 0$

$$\Rightarrow\lim_{\substack{x>0\\x\to 0}}\frac{e^x+\sin x+\cos x-2}{x}=\lim_{\substack{x>0\\x\to 0}}\frac{e^x+\cos x-\sin x}{1}=\frac{1+1-0}{1}=2\Rightarrow a\le 2$$

$x<0$时，$a\ge\dfrac{e^x+\sin x+\cos x-2}{x}$，令$x\to 0$

同理得$\lim\limits_{\substack{x<0\\x\to 0}}\dfrac{e^x+\sin x+\cos x-2}{x}=2\Rightarrow a\ge 2$，$\therefore$有$a=2$.

法二：

解答：（1）$f(x)=e^x-\sin x-\cos x=e^x-\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$

故此当$x\in\left(-\dfrac{5\pi}{4},-\dfrac{\pi}{4}\right)$时，会有后面这块恒正，加上$e^x>0$恒成立，当然此时会有$f(x)>0$

恒成立.

当$x\ge-\dfrac{\pi}{4}$时，会有$f'(x)=e^x-\sqrt{2}\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$

如果再导就有$f''(x)=e^x+\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$

这个后面这块在$x\in\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right]$上都是非负的，整个是锤子数学正的，而当$x>\dfrac{3\pi}{4}$后面的最

小值，当然也是正的，故此这玩意在$x>-\dfrac{\pi}{4}$时是恒正的，于是$f'(x)$在$x>-\dfrac{\pi}{4}$是单调增的，

又很容易看出$f'(0)=0$，可知$f(x)$在$x>-\dfrac{\pi}{4}$上只有一个极值点，就是$x=0$，还是极小值，

此时$f(x)=0$即为最小值了.

（2）这个简直送分...

这里不难发现$g(0)=2$，而右边$2+ax$正好是过$(0,2)$的，不用说，要想有$g(x)\ge 2+ax$，

只能是$2+ax$与$g(x)$相切.

那事情就简单了，如此有$g'(0)=2=a$

完事...

21 .（12 分）双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左顶点为$A$，右焦点为$F$，动点$B$在$C$上.

当$BF\perp AF$时，$|AF|=|BF|$.

（1）求C的离心率；

（2）若B在第一象限，证明：$\angle BFA=2\angle BAF$.

【解析】（1）AF就在x轴上，而且锤子数学很容易得到$AF=a+c$，如果$BF\perp AF$，那只

能有$x_B=c$，$|BF|=|y_B|=|AF|$，然后$\frac{x_B^2}{a^2}-\frac{y_B^2}{b^2}=1$，$y_B^2=\frac{b^2c^2}{a^2}-b^2=(a+c)^2$

$$\frac{(c^2-a^2)c^2}{a^2}-(c^2-a^2)=(a+c)^2$$

$$\frac{c^2-a^2}{a^2}\cdot\frac{c^2}{a^2}-\frac{c^2-a^2}{a^2}=\left(\frac{a+c}{a}\right)^2$$

$$(\mathrm{e}^2-1)\mathrm{e}^2-(\mathrm{e}^2-1)=(\mathrm{e}+1)^2$$

这个会解得$\mathrm{e}=2$

（2）硬来就好了

令$B(x_B,y_B)$，有$\tan(\angle BFA)=\frac{y_B}{c-x_B}$，$\tan(\angle BAF)=\frac{y_B}{a+x_B}$

因此锤子数学有$\frac{2\tan(\angle BAF)}{1-\tan^2(\angle BAF)}=\frac{2(a+x_B)y_B}{(a+x_B)^2-y_B^2}$

注意这里$\frac{x_B^2}{a^2}-\frac{y_B^2}{c^2-a^2}=1$

而$e=\frac{c}{a}=2$，故有$y_B=\sqrt{3}\sqrt{x_B^2-a^2}$

带入化简后有$\frac{\sqrt{3}\sqrt{x_B^2-a^2}}{2a-x_B}=\frac{y_B}{c-x_B}=\tan(\angle BFA)$

故此$\angle BFA=2\angle BAF$

12．设函数 $f(x)=\dfrac{\cos 2x}{2+\sin x\cos x}$，则

A．$f(x)=f(x+\pi)$　　B．$f(x)$ 的最大值为 $\dfrac{1}{2}$

C．$f(x)$ 在 $\left(-\dfrac{\pi}{4},0\right)$ 单调递增　　D．$f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$ 单调递减

【答案】AD

【解析】A 是显然的，因为 $f(x)=\dfrac{2\cos(2x)}{4+\sin(2x)}$

$f(x+\pi)=\dfrac{2\cos(2x+2\pi)}{4+\sin(2x+2\pi)}=f(x)$

B 是错误的，$f'(x)=-\dfrac{4(4\sin(2x)+1)}{(4+\sin(2x))^2}=0$

会得到 $x=-\dfrac{1}{2}\arcsin\left(\dfrac{1}{4}\right)$，此时锤子数学如果带进去，会有

$f\left(-\dfrac{1}{2}\arcsin\left(\dfrac{1}{4}\right)\right)=\dfrac{2}{\sqrt{15}}>\dfrac{1}{2}$

C 显然根据上面也是错的，因此极值在 $x=-\dfrac{1}{2}\arcsin\left(\dfrac{1}{4}\right)$ 处，意味着 $x>-\dfrac{1}{2}\arcsin\left(\dfrac{1}{4}\right)$ 时这

玩意是递减的.

D 是对的，可以看出 $\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$ 这一段 $f'(x)<0$ 是肯定的.

因此：A，D.

8．已知 $a<5$ 且 $ae^5=5e^a$，$b<4$ 且 $be^4=4e^b$，$c<3$ 且 $ce^3=3e^c$，则

A．$c<b<a$　　B．$b<c<a$　　C．$a<c<b$　　D．$a<b<c$

【答案】D

【解析】法一：

这里进行一些变换，比如对第一个会有 $\dfrac{e^5}{5}=\dfrac{e^a}{a}$

其他同理，如此我们就首先研究一下$f(x)=\dfrac{e^x}{x}$这个函数，

会有$f'(x)=\dfrac{(x-1)e^x}{x^2}$

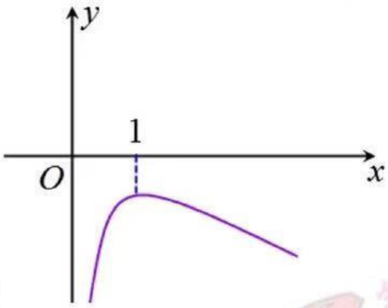
换句话说，$x<1$时递减，$x>1$时递增.

这时候说明，如果$f(a)=f(5)$，且$a<5$，那只能是$a<1$，同理锤子数学也会有$b<1,c<1$，

加上$f(5)>f(4)>f(3)$，你会得到$f(a)>f(b)>f(c)$，既然都在$(0,1)$这个递减区间上，

那当然就有$c>b>a$了

故此选 D.



法二：

考虑函数$f(x)=\ln x-x$

则$f(a)=f(5)\,(a<5)$，$f(b)=f(4)(b<4)$，$f(c)=f(3)(c<3)$

（原式取$\ln$即可）

$f'(x)=\dfrac{1}{x}-1$，故$f(x)$在$(0,1)$上锤子数学单调递增，在$(1,+\infty)$上单调递减

故$a,b,c\in(0,1)$且$f(3)>f(4)>f(5)$，$\Rightarrow f(c)>f(b)>f(a)$

$\Rightarrow c>b>a$

7．已知抛物线$y^2=2px$上三点$A(2,2)$，B，C，直线AB，AC是圆$(x-2)^2+y^2=1$的两条切线，则直线BC的方程为

A．$x+2y+1=0$　　B．$3x+6y+4=0$

C．$2x+6y+3=0$　　D．$x+3y+2=0$

【答案】B

【解析】法一：

首先$y^2=2px$过$(2,2)$，先得的$p=1$，而后锤子数学既然从A出来两条切线，

可以设切线方程为$y-2=k(x-2)$

与圆联立就有$(k^2+1)x^2-4(k^2-k+1)x+4k^2-8k+7=0$

$\Delta=4(k^2-3)=0$，$k=\pm\sqrt{3}$

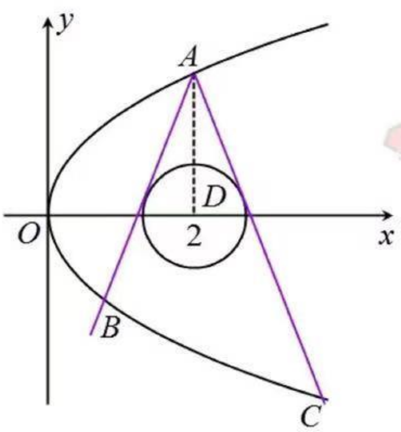
接下来解B,C两个点，有$x=\frac{4}{3}(2\mp\sqrt{3})$，$y=\frac{2}{3}(-3\pm\sqrt{3})$

最后就是BC方程即为$3x+6y+4=0$

选 B.

当然这种题，考场上如果算的没那么快，是可以通过精确作图，然后估算得到结果的.

法二：



$A(2,2)$在锤子数学抛物线上，则$p=2,y^2=2x$

l_{AB}斜率$k_1=\dfrac{1}{\tan\angle BAD}=\sqrt{3}$，$l_{AC}$斜率$k_2=-k_1=-\sqrt{3}$

$\Rightarrow l_{AB}:x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}y-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}+2$，$l_{AC}:x=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}y+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}+2$

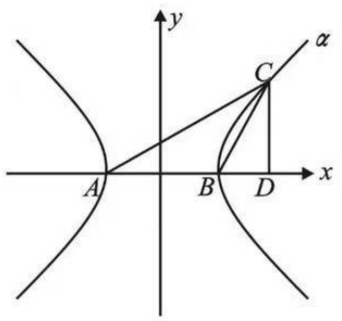
代入得：$y_B=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}-2,x_B=\dfrac{8-4\sqrt{3}}{3}$，$y_C=-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}-2,x_C=\dfrac{8+4\sqrt{3}}{3}$

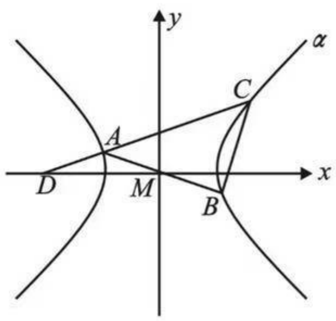
$\Rightarrow l_{BC}$的斜率$k_3=\dfrac{y_B-y_C}{x_B-x_C}=-\dfrac{1}{2}$，$\Rightarrow\Rightarrow l_{BC}$：$3x+6y+4=0$

锤子数学网课考前精彩猜题

锤子网课题： 设等轴双曲线α 的实轴为m，左、右顶点为A，B，C是α上一点，C在m上的射影为D，如图所示，求证：$\angle CAB=\angle BCD$．

锤子网课题： 设等轴双曲线α的中心为M，实轴为m，一直线过M且交α于A，B，C是α上一点，CA交m于D，如图所示，求证：$2\angle ADM+\angle ACB=90°$．





锤子网课题： 设等轴双曲线α的实轴为m，A是α上一点，A在m上的射影为B，过A且与α相切的直线交m于C，一直线过C且交α于D，E，如图所示，求证BC平分$\angle DBE$．

锤子网课题： 设等轴双曲线α的实轴为m，左、右顶点为A，B，m上有两点M，N，使得$\dfrac{AM}{BM}=\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{AN}{BN}=\dfrac{1}{2}$，一直线过$N$且交$\alpha$于$C$，$D$，如图所示，求证：$\angle CMA=\angle DMB$．