高一数学小练 25

一、选择题（本大题共 6 小题，共 30.0 分）

1. 已知$f(x)$的定义域为[-2,2]，则函数$g(x)=\frac{f(x-1)}{\sqrt{2x+1}}$,则$g(x)$的定义域为（　）

A. $(\frac{1}{2},3]$　　B. $(-1,+\infty)$　　C. $\left(\frac{1}{2},0\right)\cup(0,3)$　　D. $\left(\frac{1}{2},3\right)$

2. 若非零向量$\vec{a}$、$\vec{b}$满足$|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$,$(2\vec{a}+\vec{b})\perp\vec{b}$，则$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为（　）

A. 30^0　　B. 60^0　　C. 120^0　　D. 150^0

3. 为了得到函数$y=\sin(2x-\frac{\pi}{3})$的图象，可以将函数$y=\cos 2x$的图象(　　)

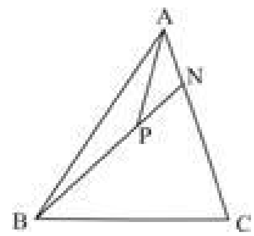
A. 向左平移$\frac{5\pi}{12}$个单位　　B. 向右平移$\frac{5\pi}{12}$个单位

C. 向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位　　D. 向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位

4. 已知 $\sin\theta,\cos\theta$关于x的方程$x^2-ax+a=0$ 的两个根$(a\in R)$，则a的值为（　）

A. $1\pm\sqrt{3}$　　B. $1\pm\sqrt{2}$　　C. $1+\sqrt{2}$　　D. $1-\sqrt{2}$

5. 如图，在ΔABC 中，$\overrightarrow{AN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{NC}$，$P$是$BN$上的一点，若$\overrightarrow{AP}=m\overrightarrow{AB}+\frac{1}{8}\overrightarrow{AC}$，则实数$m$的值为（　）



A. $\frac{1}{8}$　　B. $\frac{1}{4}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{7}{8}$

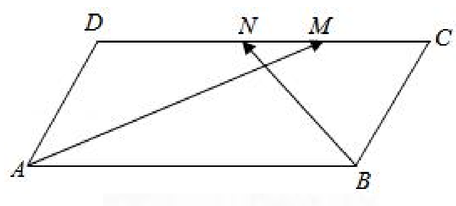
6. 已知ΔABC 是边长为 4 的等边三角形，P 为平面 ABC 内一点，则$\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})$的最小值为（　　）

A. -3　　B. -6　　C. -2　　D. $-\frac{8}{3}$

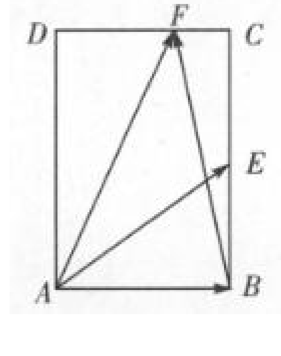
二、填空题（本大题共 3 小题，共 15.0 分）

7. 已知$\vec{a}$=（-2，3），$\vec{b}$=（λ，1），若$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为锐角，则λ的取值范围为______.

8. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，AB=6，AD=2，$\angle BAD$=60°．若$\overrightarrow{CM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$，则$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BN}$的值为____.

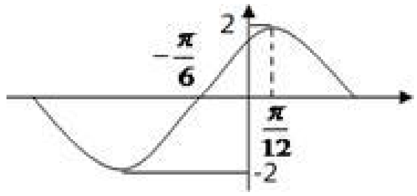


9. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，AB=$\sqrt{2}$，BC=2，点 E 为 BC 的中点，点 F 在边 CD 上，若$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF}$=$\sqrt{2}$，则$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BF}$的值是________。



三、解答题（本大题共 3 小题，共 36.0 分）

10.　已知函数$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2})$的部分图像如图所示：（1）求函数$f(x)$的解析式；



（2）将函数$y=f(x)$的图像上各点的横坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$，纵坐标不变，得到函数$y=g(x)$的图像，求函数$y=g(x)$在区间$[0,\frac{\pi}{4}]$上的最大值及函数取最大值时相应的x值.

11．已知$\vec{a}=(2+\sin x,1),\vec{b}=(2,-2),\vec{c}=(\sin x-3,1),\vec{d}=(1,k)$，$(x\in R,k\in R)$

（1）若$x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，且$\vec{a}\parallel(\vec{b}+\vec{c})$，求 x 的值；

（2）是否存在实数 k 和 x，使$(\vec{a}+\vec{d})\perp(\vec{b}+\vec{c})$？若存在，求出 k 的取值范围；若不存在，请说明理由.

12．已知函数$f(x)=ax+\frac{b}{x}-2$，其中 a，b 为非零常数，且$f(x)$有唯一的零点$x=1$．

(1)求 a，b 的值；

(2)若不等式$f(2^x)-k\cdot 2^x\geq 0$ 在$x\in[-1,1]$上恒成立，求实数 k 的取值范围；

(3)若$f(|2^x-1|)+k\cdot\frac{2}{|2^x-1|}-3k=0$ 有三个不同的实数解，求实数 k 的取值范围．

答案和解析

1.【答案】A

【解析】

【分析】

本题考查抽象函数和复合函数定义域，根据定义域的求法直接求解，属于基础题.

【解答】

解：由 f(x)的定义域为[-2,2]，得

$(x-1)\in[-2,2]$ 且 $2x+1\in(0,+\infty)$

解得 $x\in(-\frac{1}{2},3]$.

故选 A.

2.【答案】C

【解析】

【分析】

本题考查两个向量的数量积的定义及向量的夹角，先利用分配律展开，再利用数量积的定义，$|\overrightarrow{a}|=|\overrightarrow{b}|$，即可求出夹角的余弦值，即可求角.

【解答】

解：$\overrightarrow{a}$ 与 $\overrightarrow{b}$ 的夹角为θ,

由题意可得 $(2\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})\cdot\overrightarrow{b}=2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+\overrightarrow{b}^2=2|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|cos\theta+|\overrightarrow{b}|^2=0$,

由 $|\overrightarrow{a}|=|\overrightarrow{b}|$=1,

得 $cos\theta=-\frac{1}{2}$,

$\therefore\theta=120^\circ$，即 $\overrightarrow{a}$ 与 $\overrightarrow{b}$ 的夹角为 120°.

故选 C.

3.【答案】B

【解析】

【分析】

先根据诱导公式进行化简，将 y=cos2x 化为正弦函数的类型，再由左加右减上加下减的

原则可确定平移的方案.

本题主要考查三角函数的平移，三角函数的平移原则为左加右减上加下减，注意 x 的系数的应用，以及诱导公式的应用.

【解答】

解：由题意 $y=cos2x=sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$，

函数 $y=sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$ 的图象经过向右平移 $\frac{5\pi}{12}$，得到函数

$y=sin\left[2\left(x-\frac{5\pi}{12}\right)+\frac{\pi}{2}\right]=sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象，

故选 B.

4.【答案】D

【解析】

【分析】

本题考查同角三角函数基本关系式，考查学生的计算能力，比较基础.

利用根与系数的关系解得 $(sin\theta+cos\theta)^2-2sin\theta cos\theta=sin^2\theta+cos^2\theta=a^2-2a=1$，求解即可.

【解答】

解：$sin\theta, cos\theta$ 关于 x 的方程 $x^2-ax+a=0$ 的两个根，

所以 $sin\theta+cos\theta=a, sin\theta cos\theta=a$，且 $a^2-4a>0$，解得 a>4 或 a<0，

又 $(sin\theta+cos\theta)^2-2sin\theta cos\theta=sin^2\theta+cos^2\theta=a^2-2a=1$，

解得 $a=1-\sqrt{2}$，($1+\sqrt{2}$ 舍)，

故选 D.

5.【答案】C

【解析】

【分析】

本题考查平面向量的基本定理，设$\vec{BP}=\lambda\vec{BN}$，可得$\vec{AP}=(1-\lambda)\vec{AB}+\frac{\lambda}{4}\vec{AC}$的形式，根据平面向量的基本定理我们易构造关于λ，m的方程组，解方程组后即可得到m的值.

【解答】

解：∵P是BN上的一点，

设$\vec{BP}=\lambda\vec{BN}$，由$\vec{AN}=\frac{1}{3}\vec{NC}$，

则

$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{AB}+\lambda(\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AB})=(1-\lambda)\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AN}=$

$(1-\lambda)\overrightarrow{AB}+\frac{\lambda}{4}\overrightarrow{AC}=m\vec{AB}+\frac{1}{8}\vec{AC}$，

因此$\begin{cases}m=1-\lambda\\ \frac{\lambda}{4}=\frac{1}{8}\end{cases}$，

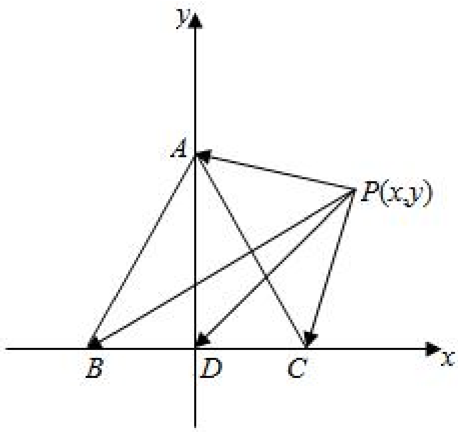
解得$\begin{cases}\lambda=\frac{1}{2}\\ m=\frac{1}{2}\end{cases}$.

故选C.

6.【答案】B

【解析】

解：以BC中点为坐标原点，建立如图所示的坐标系，



则A(0，$2\sqrt{3}$)，B(-2，0)，C(2，0)，

设P(x，y)，则$\overrightarrow{PA}$=(-x，$2\sqrt{3}$-y)，$\overrightarrow{PB}$=(-2-x，-y)，$\overrightarrow{PC}$=(2-x，-y)，

所以则$\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})$的最=-x•(-2x)+($2\sqrt{3}$-y)•(-2y)=$2x^2-4\sqrt{3}y+2y^2$

$=2[x^2+2(y-\sqrt{3})^2-3]$；

所以当x=0，y=$\sqrt{3}$时，$\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})$取得最小值为2×(-3)=-6，

故选：B．

建立平面直角坐标系，利用坐标表示出$\overrightarrow{PA}$、$\overrightarrow{PB}$、$\overrightarrow{PC}$，求出$\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})$的最小值

本题考查了平面向量的应用问题，是中档题．

7.【答案】$\{\lambda|\lambda<\frac{3}{2}$且$\lambda\neq-6\}$

【解析】

解：∵已知$\overrightarrow{a}$=(-2，3)，$\overrightarrow{b}$=(λ，1)，若$\overrightarrow{a}$与$\overrightarrow{b}$的夹角为锐角，

∴$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=-2\lambda+3>0$，即$\lambda<\frac{3}{2}$；

且$\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$不共线，即$\frac{\lambda}{-2}\neq\frac{3}{1}$，∴λ≠-6．

综上可得，λ的范围为$\{\lambda|\lambda<\frac{3}{2}$且$\lambda\neq-6\}$，

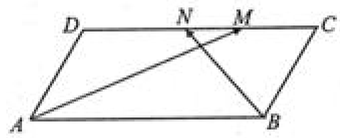
故答案为：$\{\lambda|\lambda<\frac{3}{2}$且$\lambda\neq-6\}$．

根据题意可得$\vec{a}\cdot\vec{b}>0$，且$\vec{a}$、$\vec{b}$不共线，由此求得λ的取值范围.

本题主要考查两个向量的数量积、两个向量共线的条件，属于基础题.

8.【答案】-7

【解析】



解：∵在平行四边形 ABCD 中，AB=6，AD=2，∠BAD=60°.

$\overrightarrow{CM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{CN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$，

$\therefore\overrightarrow{AM}\bullet\overrightarrow{BN}=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DM})\bullet(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN})$

$=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{CN}$

$=4+4\times2\times\cos60°+2\times3\times\cos120°+4\times3\times\cos180°=-7$.

故答案为：-7.

$\overrightarrow{AM}\bullet\overrightarrow{BN}=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DM})\bullet(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN})=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{CN}$，由此能求出结果.

本题考查向量的数量积的求法，考查向量加法定理、向量的数量积公式等基础知识，考查运算求解能力，考查函数与方程思想，是中档题.

9.【答案】$\sqrt{2}$

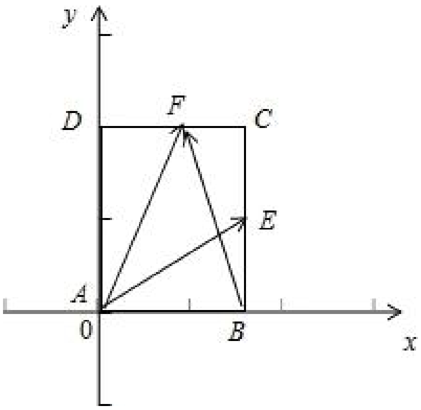
【解析】

【分析】

本题考查平面向量的数量积的坐标运算.建立直角坐标系，由已知条件可得 F 的坐标，进而可得向量$\overrightarrow{AE}$和$\overrightarrow{BF}$的坐标，可得数量积.

【解答】

解：建立如图所示的坐标系，



可得 A(0，0)，

B($\sqrt{2}$，0)，E($\sqrt{2}$，1)，F(x，2)

∴$\overrightarrow{AB}$=($\sqrt{2}$，0)，$\overrightarrow{AF}$=(x，2)，

∴$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF}$=$\sqrt{2}$x=$\sqrt{2}$，解得 x=1，∴F(1，2)

∴$\overrightarrow{AE}$=($\sqrt{2}$，1)，$\overrightarrow{BF}$=(1-$\sqrt{2}$，2)

∴$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BF}$=$\sqrt{2}$(1-$\sqrt{2}$)+1×2=$\sqrt{2}$

故答案为$\sqrt{2}$.

10.【答案】解：（1）如图可知，A=2，$T=4\times\left[\frac{\pi}{12}-\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]=\pi$，

$\therefore\omega=\frac{2\pi}{T}=2$.

$\because\begin{cases}2sin\left(2\times\frac{\pi}{12}+\varphi\right)=2\\|\varphi|<\frac{\pi}{2}\end{cases}$，

$\therefore\varphi=\frac{\pi}{3}$，

即函数解析式为$y=2sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$；

（2）根据图象平移原则得$g(x)=2sin\left(4x+\frac{\pi}{3}\right)$，

$\because x \in \left[0,\frac{\pi}{4}\right]$,

$\therefore 4x+\frac{\pi}{3} \in \left[\frac{\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right]$,

$\therefore 2sin\left(4x+\frac{\pi}{3}\right) \in [-\sqrt{3},2]$,

即函数 g（x）在$\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$区间上的最大值为 2，此时$x=\frac{\pi}{24}$.

【解析】

本题考查了三角函数的图象与性质的应用.

(1)利用三角函数的图象，得出振幅与周期 T，即可求出函数解析式；

(2)根据图像平移，得到的解析式，最后利用函数的性质求出结果.

11.【答案】解：$\because \vec{b}$=（2，-2），$\vec{c}$=（sin$x$-3，1），

$\therefore \vec{b}+\vec{c}$=（sin$x$-1，-1），

$\because \vec{a} \parallel (\vec{b}+\vec{c})$，∴-（2+sin$x$）=sin$x$-1，

$\therefore 2sinx=-1$，$sinx=-\frac{1}{2}$，

$\because x \in [-\frac{\pi}{2}，\frac{\pi}{2}]$，

$\therefore x=-\frac{\pi}{6}$.

（II）$\vec{a}+\vec{d}$=（3+sinx，1+k），$\vec{b}+\vec{c}$=（sin$x$-1，-1）

若（$\vec{a}+\vec{d}$）⊥（$\vec{b}+\vec{c}$），则即（3+sin$x$）（sin$x$-1）-（1+k）=0，k=sin^2x+2sin$x$-4=（sin$x$+1）^{2}-5，

$sinx \in [-1，1]$，$sinx+1 \in [0，2]$，

x∈R，$(sinx+1)^2 \in [0，4]$，

$k \in [-5，-1]$，

存在 k∈[-5，-1]使（$\vec{a}+\vec{d}$）⊥（$\vec{b}+\vec{c}$）.

【解析】

本题考查了向量共线以及向量平行的充要条件，两者不要混淆.

(I)先根据$\vec{b}$=(2，-2)，$\vec{c}$=(sinx-3，1)，求出$\vec{b}+\vec{c}$的坐标，再根据$\vec{a} \parallel (\vec{b}+\vec{c})$，找到向量坐标满足的关系式，根据 x 的范围，就可求出 x 的值.

(II)先假设存在实数 k 和 x，使($\vec{a}+\vec{d}$)⊥($\vec{b}+\vec{c}$)，则可得($\vec{a}+\vec{d}$)•($\vec{b}+\vec{c}$)=0，再用向量数量级积的坐标公式计算，若能解出 k 的值，则存在，否则，不存在.

12.【答案】解:（1）由已知，1 是$f(x)=ax+\frac{b}{x}-2$ 的唯一零点，

所以$ax+\frac{b}{x}-2=0$ 即$ax^2-2x+b=0$ 有两个相等的实根 1，

即$\begin{cases} x_1+x_2=\frac{2}{a}=2 \\ x_1x_2=\frac{b}{a}=1 \end{cases}$，

得$a=b=1$;

（2）由已知可得$f(x)=x+\frac{1}{x}-2$，所以$f(2^x)-k\cdot 2^x \geqslant 0$ 可化为$2^x+\frac{1}{2^x}-2 \geqslant k\cdot 2^x$，

即 $1+(\frac{1}{2^x})^2-2\cdot\frac{1}{2^x}\geqslant k$，

令$t=\frac{1}{2^x}$，因$x\in[-1,1]$，故$t\in[\frac{1}{2},2]$，则$k\leqslant t^2-2t+1$，

记$h(t)=t^2-2t+1$，因为$t\in[\frac{1}{2},2]$，

故$h(t)_{\min}=0$，

所以k的取值范围是$(-\infty,0]$;

（3）当$x=0$ 时，$2^x-1=0$，所以$x=0$ 不是方程的解，

令|2x-1|=t,

由已知有$t^2-(3k+2)t+(2k+1)=0$ 有两个不同的实数解t_1,t_2，其中 $0<t_1<1,t_2>1$，或 $0<t_1<1,t_2=1$.

记$h(t)=t^2-(3k+2)t+(2k+1)$，

则①$\begin{cases} 2k+1>0 \\ h(1)=-k<0 \end{cases}$ 或 ②$\begin{cases} 2k+1>0 \\ h(1)=-k=0 \\ 0<\frac{3k+2}{2}<1 \end{cases}$，

解不等组①得$k>0$，而不等式组②无实数解.

所以实数k的取值范围是$(0,+\infty)$.

【解析】

本题考查函数零点与方程根的关系及指数函数对数函数的性质,同时考查二次方程根的分布.

（1）将已知转化$ax^2-2x+b=0$有两个相等的实根 1 即可求解;

（2）不等式可化为$2^x+\frac{1}{2^x}-2\geq k\cdot 2^x$，故有 $k\leq t^2-2t+1$，$t\in\left[\frac{1}{2},2\right]$，求出 $h(t)=t^2-2t+1$ 的最小值，从而求得 k 的取值范围；

（3）方程$f(|2^x-1|)+k\cdot\frac{2}{|2^x-1|}-3k=0$可化为：$|2^x-1|^2-(2+3k)|2^x-1|+(1+2k)=0$，令$|2^x-1|=t$，则 $t^2-(2+3k)t+(1+2k)=0$（$t\neq 0$），构造函数 $h(t)=t^2-(2+3k)t+(1+2k)$，结合等价转化的思想即可求得 k 的范围.