江苏省仪征中学 2020 届高三（上）期末考试热身练习 11

班级______________ 姓名______________ 学号______________ 评价______________

一、填空题

1．已知集合 $A=\{1,2,3,4\}$， $B=\{y|y=x-2,x\in A\}$，则 $A\cap B=$__________.

2．若 $z(1+2i)=5$，i 为虚数单位，则 z 的实部为__________.

3. 某课题组进行城市空气质量调查，按地域把 24 个城市分成甲、乙、丙三组，对应的城市数分别为 4，12，8，若用分层抽样抽取 6 个城市，则丙组中应抽取的城市数为___.

4．执行如图所示的伪代码，则输出的结果为__________.

```
I←1
While  I<7
        S←2I+1
        I←I+2
End  While
Print  S
```

（第 4 题图）

5．从集合{2,3,4,5}中随机抽取一个数 a，从集合{1,3,5}中随机抽取一个数 b，则向量 $\vec{m}=(a，b)$ 与向量 $\vec{n}=(-1，1)$垂直的概率为__________.

6．已知圆锥的侧面积为 8π，侧面展开图是半圆，则该圆锥的体积为__________.

7. 已知函数 $y=\sin 2x$ 的图象上每个点向左平移 $\varphi(0<\varphi<\dfrac{\pi}{2})$ 个单位长度得到函数 $y=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的图象，则 φ 的值为__________.

8．若双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的一个焦点到一条渐近线的距离为 $2a$，则双曲线的离心率为__________.

9．等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $4a_1$， $2a_2$， a_3 成等差数列，若 $a_1=1$，则 $S_4=$_____.

10．在平面直角坐标系 xOy 中，已知圆 $C:x^2+(y-1)^2=6$，AB 为圆 C 上的两个动点，且 $AB=2\sqrt{2}$，G 为弦 AB 的中点．直线 $l:x-y-2=0$ 上有两个动点 PQ，且 $PQ=2$．当 AB 在圆 C 上运动时，$\angle PGQ$ 恒为锐角，则线段 PQ 中点 M 的横坐标取值范围为__________.

11. 已知点 P 为平行四边形 $ABCD$ 所在平面上任一点，且满足 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+2\overrightarrow{PD}=\vec{0}$，$\lambda\overrightarrow{PA}+\mu\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\vec{0}$，则 $\lambda\mu=$__________.

12. 已知函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}1+\ln x, x\ge 1\\ \frac{1}{2}x+\frac{1}{2}, x<1\end{cases}$，若 $x_1\ne x_2$，$f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)=2$，则 x_1+x_2 的取值范围是__________.

二、解答题

13.　在△ABC 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c．已知 $12(a\cos C+c\cos A)=13b\cos B$.

（1）求 $\cos B$；

（2）若 $a+c=15$，且△ABC 的面积为 5，求 b 的值．

14.在平面直角坐标系 xOy 中，已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$，左、右焦点分别为 $F_1(-1，0)$，$F_2(1，0)$，椭圆离心率为 $\frac{1}{2}$，过点 P(4，0)的直线 l 与椭圆 C 相交于 A、B 两点（A 在 B 的左侧）.

（1）求椭圆 C 的方程；

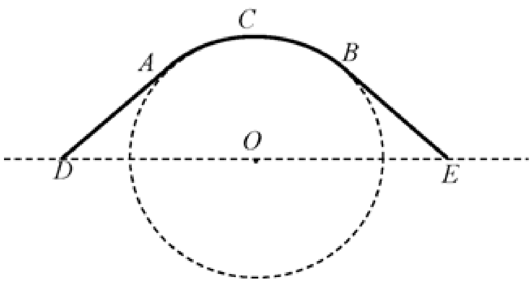
（2）若 B 是 AP 的中点，求直线 l 的方程；

（3）若 B 点关于 x 轴的对称点是 E，证明：直线 AE 与 x 轴相交于定点．

15. 某公园为了美化环境和方便顾客，计划建造一座圆弧形拱桥，已知该桥的剖面如图所示，共包括圆弧形桥面 ACB 和两条长度相等的直线型路面 AD、BE，桥面跨度 DE 的长不超过 12 米，拱桥 ACB 所在圆的半径为 3 米，圆心 O 在水面 DE 上，且 AD 和 BE 所在直线与圆 O 分别在连结点 A 和 B 处相切．设$\angle ADO=\theta$，已知直线型桥面每米修建费用是 a 元，弧形桥面每米修建费用是$\frac{4a}{3}$元．

(1)若桥面(线段 AD、BE 和弧ACB)的修建总费用为 W 元，求 W 关于θ的函数关系式；

(2)当θ为何值时，桥面修建总费用 W 最低？



16.已知二阶矩阵 $M=\begin{bmatrix} a & 1 \\ 3 & b \end{bmatrix}$的特征值 $\lambda=-1$ 所对应的一个特征向量为$\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

（1）求矩阵 M;

（2）设曲线 C 在变换矩阵 M 作用下得到的曲线C'的方程为 $y^2=x$，求曲线 C 的方程.

17.以坐标原点为极点，x 轴的正半轴为极轴，且在两种坐标系中取相同的长度单位，建立极坐标系，判断直线$l:\begin{cases}x=1+2t\\y=1-2t\end{cases}$（$t$ 为参数）与圆$C:\rho^2+2\rho\cos\theta-2\rho\sin\theta=0$的位置关系.

18 袋中装有 9 只球，其中标有数字 1，2，3，4 的小球各 2 个，标数字 5 的小球有 1 个．从袋中任取 3 个小球，每个小球被取出的可能性都相等，用ξ表示取出的 3 个小球上的最大数字.

（1）求取出的 3 个小球上的数字互不相同的概率；

（2）求随机变量ξ的分布列和期望.

参考答案：

1．{1，2}　　2．1　　3．2　　4．11　　5．$\frac{1}{6}$　　6．$\frac{8\sqrt{3}\pi}{3}$　　7．$\frac{\pi}{12}$　　8．$\sqrt{5}$

9．　15　10．$(-\infty,0)\cup(3,+\infty)$　　11．$-\frac{3}{4}$　　12．$[3-2\ln 2,+\infty)$

13．（本小题满分 14 分）解：（1）因为 $12(a\cos C+c\cos A)=13b\cos B$，

由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ 得 $12(\sin A\cos C+\sin C\cos A)=13\sin B\cos B$，……………… 2 分

因此 $12\sin(A+C)=13\sin B\cos B$．

在$\triangle ABC$ 中，$A+B+C=\pi$，所以 $12\sin(\pi-B)=13\sin B\cos B$，于是 $12\sin B=13\sin B\cos B$，……………… 4 分

因为 $B\in(0，\pi)$，所以 $\sin B>0$，所以 $\cos B=\frac{12}{13}$. ……………… 7 分

（2）由（1）知 $\cos B=\frac{12}{13}$，$\sin B>0$，所以 $\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\frac{5}{13}$. ……………… 9 分

因为$\triangle ABC$ 的面积为 5，即 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=5$，

所以$\frac{5}{26}ac=5$，即 $ac=26$．……………… 11 分　　又因为 $a+c=15$，

所以 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=a^2+c^2-\frac{24}{13}ac=(a+c)^2-\frac{50}{13}ac=15^2-\frac{50}{13}\times26=125$，……………… 13 分

因此 $b=5\sqrt{5}$．……………… 14 分

14 解：（1）由题得 $c=1$，$e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，$\therefore a=2$，$\therefore b^2=a^2-c^2=3$，

$\therefore$ 椭圆 C 方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$．.................. 4 分

（2）设 $B(x_0,y_0)$，$\because B$ 是 AP 中点，$P(4,0)$，$\therefore A(2x_0-4,2y_0)$．$\because A,B$ 都在椭圆上，

$\therefore \begin{cases} \dfrac{x_0^2}{4}+\dfrac{y_0^2}{3}=1 \\ \dfrac{(2x_0-4)^2}{4}+\dfrac{4y_0^2}{3}=1 \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x_0=\dfrac{7}{4} \\ y_0=\dfrac{3\sqrt{5}}{8} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x_0=\dfrac{7}{4} \\ y_0=-\dfrac{3\sqrt{5}}{8} \end{cases}$，$\therefore B\left(\dfrac{7}{4},\dfrac{3\sqrt{5}}{8}\right)$ 或 $B\left(\dfrac{7}{4},-\dfrac{3\sqrt{5}}{8}\right)$ ．...6 分

$\therefore k_l=\dfrac{\frac{3\sqrt{5}}{8}}{\frac{7}{4}-4}=-\dfrac{\sqrt{5}}{6}$ 或 $k_l=\dfrac{-\frac{3\sqrt{5}}{8}}{\frac{7}{4}-4}=\dfrac{\sqrt{5}}{6}$，

$\therefore$ 直线 l 方程为 $\sqrt{5}x-6y-4\sqrt{5}=0$ 或 $\sqrt{5}x+6y-4\sqrt{5}=0$ ．.................. 9 分

（3）设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $E(x_2,-y_2)$，设 D 为直线 AE 与 x 轴的交点，且 $D(m,0)$，

$\because A,D,E$ 三点共线，$\therefore \dfrac{y_1}{x_1-m}=\dfrac{-y_2}{x_2-m}$ 解得 $m=\dfrac{x_1y_2+x_2y_1}{y_1+y_2}$ ．.................. 11 分

设直线 l 方程为 $y=k(x-4)$，$k\neq 0$，则 $y_1=k(x_1-4)$，$y_2=k(x_2-4)$，

$\therefore m=\dfrac{2kx_1x_2-4k(x_1+x_2)}{k(x_1+x_2)-8k}=\dfrac{2x_1x_2-4(x_1+x_2)}{(x_1+x_2)-8}$，

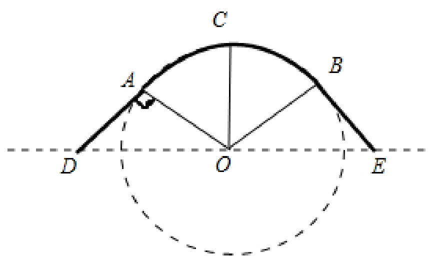
联立 $\begin{cases} y=k(x-4) \\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1 \end{cases}$，化简得 $(3+4k^2)x^2-32k^2x+64k^2-12=0$，

$\therefore x_1+x_2=\dfrac{32k^2}{3+4k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{64k^2-12}{3+4k^2}$，.................. 13 分

则 $m=\dfrac{2x_1x_2-4(x_1+x_2)}{x_1+x_2-8}=\dfrac{2\times\frac{64k^2-12}{3+4k^2}-4\times\frac{32k^2}{3+4k^2}}{\frac{32k^2}{3+4k^2}-8}=1$ ．.................. 15 分

$\therefore$ 直线 AE 与 x 轴相交于定点 $(1,0)$ ．.................. 16 分

15.【答案】解：(1)设 C 为弧 AB 的中点，连结 OA，OC，OB.则 $OA\perp AD$.具体如下图：



在$Rt\triangle OAD$中，$AD=\frac{OA}{\tan\theta}=\frac{3cos\theta}{\sin\theta}$. 又$\because\angle AOC=\angle ADO=\theta$，$\therefore$弧 AC 长为$l=3\theta$.

$$\therefore W=2(l\times\frac{4a}{3}+AD\times a)=2(3\theta\cdot\frac{4a}{3}+\frac{3cos\theta}{\sin\theta}\cdot a)=2a(4\theta+\frac{3cos\theta}{\sin\theta}).$$

当$DE=6$时，$\theta=\frac{\pi}{2}$；当$DE=12$时，$\theta=\frac{\pi}{6}$.

$\therefore\frac{\pi}{6}\le\theta<\frac{\pi}{2}$. $\therefore W=2a(4\theta+\frac{3cos\theta}{\sin\theta})$，$\frac{\pi}{6}\le\theta<\frac{\pi}{2}$.

(2)根据(1)，可设$f(\theta)=4\theta+\frac{3cos\theta}{\sin\theta}$，则

$f'(\theta)=4-\frac{3}{\sin^2\theta}=\frac{4sin^2\theta-3}{\sin^2\theta}$. 令$f'(\theta)=0$，解得$\theta=\frac{\pi}{3}\in[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2})$.

当$\theta\in[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3})$时，$f'(\theta)<0$，函数$f(\theta)$单调递减；当$\theta\in(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2})$时，$f'(\theta)>0$，函数$f(\theta)$单调递增.

$\therefore$当$\theta=\frac{\pi}{3}$时，函数$f(\theta)$取得最小值，此时桥面修建总费用最低.

16 解：（1）依题意得$\begin{bmatrix}a&1\\3&b\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-3\end{bmatrix}$， 即$\begin{cases}-a+3=1\\-3+3b=-3\end{cases}$，解得$\begin{cases}a=2\\b=0\end{cases}$，

所以$M=\begin{bmatrix}2&1\\3&0\end{bmatrix}$. ……………… 4 分

（2）设曲线 C 上一点$P(x,y)$在矩阵 M 的作用下得到曲线$y^2=x$上一点$P'\left(x',y'\right)$，

则$\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1\\3&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$，即$\begin{cases}x'=2x+y\\y'=3x\end{cases}$， 因为$y'^2=x'$，所以$9x^2=2x+y$，

所以曲线 C 的方程为$y=9x^2-2x$. ……………… 10 分

17 解：把直线化为普通方程为$x+y=2$，……………… 2 分

将圆化为普通方程为$x^2+2x+y^2-2y=0$，即$\left(x+1\right)^2+\left(y-1\right)^2=2$. ……………… 5 分

圆心C到直线l的距离$d=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$，……………… 8 分

所以直线l与圆C相切．……………… 10 分

18. 解：（1）一次取出的3个小球上的数字互不相同的事件记为A，

则$\overline{A}$为一次取出的3个小球上有两个数字相同，

$\therefore P\left(\overline{A}\right)=\dfrac{C_4^1C_7^1}{C_9^3}=\dfrac{28}{84}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow P\left(A\right)=1-\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}$． ……………… 4 分

（2）由题意可知ξ所有可能的取值为：2，3，4，5．

$P\left(\xi=2\right)=\dfrac{C_2^2C_2^1+C_2^1C_2^2}{C_9^3}=\dfrac{4}{84}=\dfrac{1}{21}$；$P\left(\xi=3\right)=\dfrac{C_4^2C_2^1+C_4^1C_2^2}{C_9^3}=\dfrac{16}{84}=\dfrac{4}{21}$；

$P\left(\xi=4\right)=\dfrac{C_6^2C_2^1+C_6^1C_2^2}{C_9^3}=\dfrac{36}{84}=\dfrac{3}{7}$；$P\left(\xi=5\right)=\dfrac{C_8^2}{C_9^3}=\dfrac{28}{84}=\dfrac{1}{3}$．

$\therefore \xi$的分布列为：

ξ	2	3	4	5
P	$\dfrac{1}{21}$	$\dfrac{4}{21}$	$\dfrac{3}{7}$	$\dfrac{1}{3}$

……………… 8 分

则$E\left(\xi\right)=2\times\dfrac{1}{21}+3\times\dfrac{4}{21}+4\times\dfrac{3}{7}+5\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{85}{21}$．

答：随机变量ξ的期望是$\dfrac{85}{21}$． ……………… 10 分