江苏省仪征中学 2020-2021 学年第二学期高二数学 期末模拟（2）

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.

1．已知复数 $z=\left(1-2i\right)\cdot i$（i 为虚数单位），则 $\left|z\right|=$ （　　）

A．$\sqrt{5}$　　　B．2.　　　C．$\sqrt{3}$　　　D．1

2．若随机变量 $X\sim B(6,\ \frac{2}{3})$，则 $D(2X+1)=$ （　　）

A．$\frac{4}{3}$　　　B．$\frac{16}{3}$　　　C．$\frac{17}{3}$　　　D．$\frac{25}{3}$

3.甲、乙、丙、丁四名同学分别从篮球、足球、排球、羽毛球四种球类项目中选择一项进行活动，记事件 A 为“四名同学所选项目各不相同”，事件 B 为“只有甲同学选羽毛球”，则 $P\left(A|B\right)=$ （　　）

A．$\frac{8}{9}$　　　B．$\frac{2}{9}$　　　C．$\frac{3}{8}$　　　D．$\frac{3}{4}$

4.《中国诗词大会》（第二季）亮点颇多，十场比赛每场都有一首特别设计的开场诗词在声光舞美的配合下，百人团齐声朗诵，别有韵味．若《将进酒》《山居秋暝》《望岳《送杜少府之任蜀州》和另确定的两首诗词排在后六场，且《将进酒》排在《望岳》的前面，《山居秋暝》与《送杜少府之任蜀州》不相邻且均不排在最后，则后六场的排法有（　　）

A．720 种　　　B．360 种　　　C．　288 种　　　D．144 种

5.设随机变量 $\xi\sim N\left(\mu,1\right)$，函数 $f\left(x\right)=x^2+2x-\xi$ 没有零点的概率是 0.5，则 $P\left(0<\xi\leq 1\right)=$（　　）

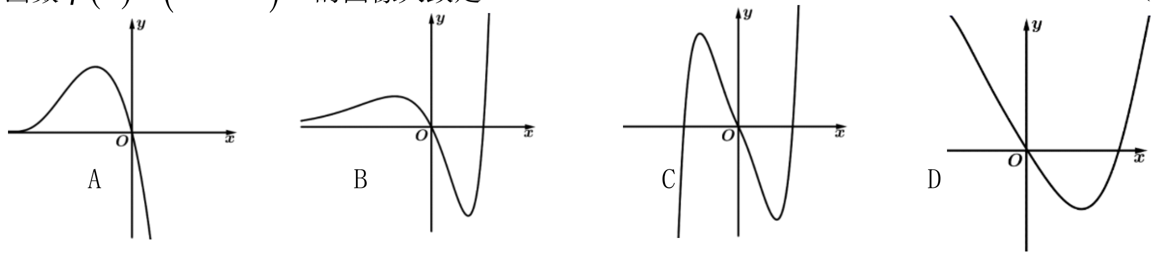
附：若 $\xi\sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$，则 $P\left(\mu-\sigma<X\leq\mu+\sigma\right)\approx 0.6826$，$P\left(\mu-2\sigma<X\leq\mu+2\sigma\right)\approx 0.9544$.

A．0.1587　　　B．0.1359　　　C．0.2718　　　D．0.3413

6.若 $x=-2$ 是函数 $f(x)=(x^2+ax-1)e^{x-1}$ 的极值点，则 $f(x)$ 的极小值为 （　　）

A．-1　　　B．$-2e^{-3}$　　　C．$5e^{-3}$　　　D．1

7．函数 $f\left(x\right)=\left(x^2-2x\right)e^x$ 的图像大致是 （　　）



8．定义在 $(0,+\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $xf'(x)+1>0$，$f(3)=-\ln 3$，则不等式 $f(e^x)+x>0$ 的解集为 （　　）

A．$(e^3,+\infty)$　　　B．$(0,e^3)$　　　C．$(\ln 3,+\infty)$　　　D．$(\ln 3,e^3)$

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

9．已知 $z=a+bi\left(a,b\in R\right)$ 为复数，$\overline{z}$ 是其共轭复数，则下列命题一定正确的是（　　）

A．$z^2=|z|^2$　　　　B．$z\cdot\overline{z}=|z|^2$

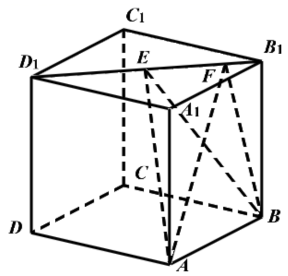
C．若 z^2 为纯虚数，则 $a=b\neq0$　　　　D．复数 z 是实数的充要条件是 $z=\overline{z}$

10、对于 $\left(2x-\dfrac{1}{x^2}\right)^6$ 的展开式，下列说法正确的是（　　）

A．展开式共有 6 项　　　　B．展开式中的常数项是-240

C．展开式中各项系数之和为 1　　　　D．展开式中的二项式系数之和为 64

11．如图，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 a，线段 B_1D_1 上有两个动点 E，F，且 $EF=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$，以下结论正确的有（　　）



A．$AC\perp BE$

B．点 A 到平面 BEF 的距离为定值

C．三棱锥 $A-BEF$ 的体积是正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 体积的 $\dfrac{1}{12}$

D．异面直线 AE，BF 所成的角为定值

12．已知函数 $f(x)=\ln x-ax$ 有两个零点 x_1，x_2，且 $x_1<x_2$，则下列选项正确的是（　　）

A．$a\in\left(0,\dfrac{1}{e}\right)$　　　　B．$y=f(x)$ 在 $(0,e)$ 上单调递增

C．$x_1+x_2>6$　　　　D．若 $a\in\left(\dfrac{2}{e^2},\dfrac{1}{e}\right)$，则 $x_2-x_1<\dfrac{2-a}{a}$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13．某高校进行强基招生面试，评分规则是共设 3 道题，每道题答对给 20 分、答错倒扣 10 分（每道题都必须回答，但相互不影响）．设某学生每道题答对的概率都为 $\dfrac{2}{3}$，则该学生在面试时恰好答对 2 道题的概率是___________

14．随机变量 X 的分布列如下表：其中 a，b，c 成等差数列，则 $P(|X|=1)=$_______

X	-1	0	1
P	a	b	c

15．若 $\left(1+x\right)\left(1-2x\right)^7=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_8x^8$，则 $a_1+a_2+\cdots+a_7$ 的值是____；在上述展开式右边的九项中，随机任取不同的三项，假设这三项均不相邻，则有_____种不同的取法.

16.设函数 $f\left(x\right)$ 在定义域(0，+∞)上是单调函数，$\forall x\in\left(0,+\infty\right)$，$f\left[f\left(x\right)-e^x+x\right]=e$，若不等式 $f\left(x\right)+f'\left(x\right)\geq ax$ 对 $x\in\left(0,+\infty\right)$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是______.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答题应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（10 分）已知$\left(2x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$展开式中前三项的二项式系数和为 16.

（1）求n的值；　　（2）求展开式中含x^2的项的系数.

18.（12 分） 已知函数$f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{m}{2}x^2-x+\frac{1}{6}$.

（1）当$m=1$时，求曲线$f(x)$上点$(1，f(1))$处的切线方程；

（2）在“①在区间$(m,m+1)$上是单调减函数；②在$(\frac{1}{2}，2)$上存在减区间；③在区间$(m,+\infty)$上存在极小值”这三个条件中任选一个补充在下面问题中，并加以解答．若$f(x)$________，求实数m的取值范围.

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

19. 为了了解A地区足球特色学校的发展状况，某调查机构得到如下统计数据：

年份x	2014	2015	2016	2017	2018
足球特色学校y（百个）	0.30	0.60	1.00	1.40	1.70

（1）根据上表数据，计算y与x的相关系数r，并说明y与x的线性相关性强弱

（已知：$0.75\le|r|\le1$，则认为y与x线性相关性很强；$0.3\le|r|\le0.75$，则认为y与x线性相关性一般；$|r|\le0.25$，则认为y与x线性相关性较弱）；

（2）求y关于x的线性回归方程，并预测A地区 2022 年足球特色学校的个数(精确到个位数).

参考公式：$r=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}$，$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2=10$，$\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2=1.3$，$\sqrt{13}\approx3.6056$，

$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$，　$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}$

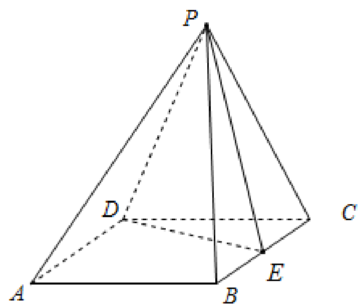
20.（12 分）已知四棱锥$P-ABCD$的底面是菱形，$\angle BCD=60°, PD\perp AD$，点$E$是$BC$边的中点.

（1）求证：$AD\perp$平面PDE；

（2）若二面角$P-AD-C$的大小等于$60°$，且$AB=4$，$PD=\frac{8\sqrt{3}}{3}$

①求点P到平面$ABCD$的距离；

②求直线PB与平面$ABCD$所成角的大小.



21．（12 分）高品质示范高中建设是某省普通高中教育在星级评估基础上创设的引领性发展项目，是顺应高中教育以下几个环节的考核：第一是材料评审；第二是现场答辩；第三是准予立项；第四是综合评价．其中评价结果分为“通过”“有条件通过”“不通过”三种．结果为“不通过”的学校取消立项；结果为“有条件通过”的学校可以继续建设一年，一年后评估仍未达标的，取消立项．统计 60 所满足基本申报条件的高中，其中准予立项率为$\frac{1}{3}$，县中（学校所在位置为县城或县级市）率为$\frac{1}{6}$，未准予立项且非县中的学校有 35 所．

（1）若满足基本申报条件的 3 所高中能通过前三个环节考核的概率均分别为$\frac{3}{4}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{1}{2}$求恰有一所学校准予立项的概率．

（2）完成下面的2×2列联表，并判断是否有 90%的把握认为学校是否准予立项与学校是否是县中有关．

	准予立项	为准予立项	合计
县中			
非县中			
合计			

（3）经统计，准予立项的学校中有 70%被评估为“通过”，10%被评估为“有条件通过”，一年后“有条件通过”的学校中有 50%被重新评估为“通过”．从这 60 所学校中任取 2 所学校，用X表示最终被评估为“通过”的学校数量，求X的分布列和数学期望．

附：$K^2=\frac{n\left(ad-bc\right)^2}{\left(a+b\right)\left(c+d\right)\left(a+c\right)\left(b+d\right)}$，其中$n=a+b+c+d$．

$P\left(K^2\geq k_0\right)$	0.50	0.40	0.25	0.15	0.10	0.05
k_0	0.455	0.708	1.323	2.072	2.706	3.841

22．(12 分)已知函数$f\left(x\right)=xe^x-ax$．

（1）若$f\left(x\right)$在$\mathbf{R}$上单调递增，求a的取值范围；

（2）设$g\left(x\right)=f\left(x\right)-\frac{a}{2}x^2$，若$g\left(x\right)$有三个不同的零点，求$a$的取值范围．

江苏省仪征中学2020-2021学年第二学期高二数学期末模拟（2）答案

一、单项选择题：ABBD　BABC

二、多项选择题：BD　CD　ABC　ABD

三、填空题： 13. $\dfrac{4}{9}$　　14. $\dfrac{2}{3}$　　15. 125；35.　　16. $(-\infty,2e-1]$

四、解答题：

17．解：（1）由题意，$\left(2x+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$展开式中前三项的二项式系数和为16.

即：$C_n^0+C_n^1+C_n^2=1+n+\dfrac{n(n-1)}{2}=16$

解得：$n=5$或$n=-6$（舍去），即n的值为5. .... 5分

（2）由通项公式$T_{k+1}=C_5^k(2x)^{5-k}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^k=C_5^k2^{5-k}x^{5-\frac{3k}{2}}$，

令$5-\dfrac{3}{2}k=2$，可得：$k=2$................ 7分

所以展开式中含x^2的项为$T_{2+1}=C_5^22^{5-2}x^{5-\frac{6}{2}}=80x^2$，

故展开式中含x^2的项的系数为80. .... 10分

18．解：（1）当$m=1$时，$f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{2}x^2-x+\dfrac{1}{6}$，所以$f$（1）$=0$，

切点为(1，0)），　$f'(x)=x^2+x-1\Rightarrow f'$（1）$=1$，

根据函数导数的几何意义可得，函数曲线在点$(1,0)$处的切线方程即为：$y=x-1$；

故点$(1,0)$处的切线方程为$x-y-1=0$.

（2）$\because f'(x)=x^2+mx-1$，

$\therefore$若选①函数$f(x)$在区间$(m,m+1)$上是单调减函数，则有：

$f'(x)\leqslant 0$在区间$(m,m+1)$上恒成立，即$x^2+mx-1\leqslant 0$在$(m,m+1)$上恒成立，

$\therefore\begin{cases}f'(m)=m^2+m^2-1\leqslant 0\\ f'(m+1)=(m+1)^2+m(m+1)-1\leqslant 0\end{cases}$，解之可得$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\leqslant m\leqslant 0$；

若选②函数$f(x)$在$(\dfrac{1}{2}$，$2)$上存在减区间，则有：$f'(x)<0$在区间$(\dfrac{1}{2}$，$2)$上有解，

即得$m<\dfrac{1}{x}-x$在区间$(\dfrac{1}{2}$，$2)$上有解，

此时令 $g(x)=\frac{1}{x}-x$，因为 $g(x)$ 在区间 $(\frac{1}{2}$，$2)$ 上单调递减，所以 $g(x)<g(\frac{1}{2})=\frac{3}{2}$，故有 $m<\frac{3}{2}$；

若选③函数在区间 $(m,+\infty)$ 上存在极小值，则有：函数 $f(x)$ 的极小值点应落在 $(m,+\infty)$；

令 $f'(x)=x^2+mx-1=0$，求得 $x_1=\frac{-m-\sqrt{m^2+4}}{2}$，$x_2=\frac{-m+\sqrt{m^2+4}}{2}$，

此时可得，$f(x)$ 在 $(-\infty,x_1)$，$(x_2$，$+\infty)$ 上单调递增；在 $(x_1$，$x_2)$ 上单调递减；

所以 $x=x_2$ 是函数 $f(x)$ 的极小值点，即得 $\frac{-m+\sqrt{m^2+4}}{2}>m \Rightarrow \sqrt{m^2+4}>3m$，所以当 $m\leqslant 0$ 时，恒成立，

当 $m>0$ 时，$m^2+4>9m^2$，解之可得 $0<m<\frac{\sqrt{2}}{2}$，

综上可得，$m<\frac{\sqrt{2}}{2}$．

19． 解:(1)．$\overline{x}=2016,\overline{y}=1$，$r=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)\left(y_i-\overline{y}\right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\overline{y}\right)^2}}=\frac{3.6}{\sqrt{10}\sqrt{1.3}}=\frac{3.6}{3.6056}>0.75$，

∴ y 与 x 线性相关性很强.

(2)．$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{5}\left(x_i-\overline{x}\right)\left(y_i-\overline{y}\right)}{\sum_{i=1}^{5}\left(x_i-\overline{x}\right)^2}=\frac{(-2)\times(-0.7)+(-1)\times(-0.4)+1\times 0.4+2\times 0.7}{4+1+0+1+4}=0.36$，

$a=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}=1-2016\times 0.36=-724.76$，

∴ y 关于 x 的线性回归方程是 $y=0.36x-724.76$．

当 $x=2022$ 时，$y=0.36x-724.76=3.16$，

即 A 地区 2022 年足球特色学校有 316 个.

20．(1)证明：连接 BD，底面 $ABCD$ 是菱形，$\angle BDC=60^\circ$，

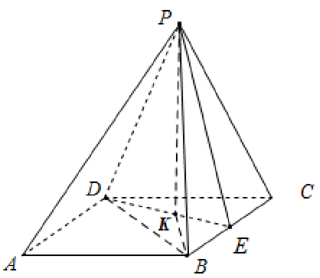
∴△ BCD是正三角形．∵点 E 是 BC 边的中点，∴ $DE\perp BC$，∵ $AD//BC$，

∴ $DE\perp AD$．∵ $DP\perp AD$，$DP\cap DE=D$，DP，DE ⊂平面 PDE，∴ AD

(2)解：① ∵ $DE\perp AD$，$PD\perp AD$，∴ $\angle PDE$为二面角$P-AD-C$的平

过 P 在平面 PDE 内作$PK\perp DE$于 K，

如图所示：由(Ⅰ)得$AD\perp$平面 PDE，



∵ PK ⊂平面 PDE，∴ $AD\perp PK$， ∵ $AD\cap DE=D$，AD，DE ⊂平面$ABCD$，∴ $PK\perp$平面 $ABCD$．

$\because PD=\frac{8\sqrt{3}}{3}$，$\therefore DK=\frac{1}{2}PD=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，$PK=\sqrt{PD^2-DK^2}=4$. 即点 P 到平面 $ABCD$ 的距离是 4.

②$AB=4$，$\therefore DE=2\sqrt{3}$，$\therefore DK=\frac{2}{3}DE$，$\therefore K$为$\triangle BCD$重心.

连接 BK，$\because\triangle BCD$为正三角形，所以 BK 为 PB 在平面 $ABCD$ 内的射影，

$\therefore \angle PBK$为直线 PB 与平面 $ABCD$ 所成角的平面角.

在$Rt\triangle PKB$中，$\tan\angle PBK=\frac{PK}{KB}=\frac{PK}{DK}=\sqrt{3}$，则$\angle PBK=\frac{\pi}{3}$，故直线 PB 与平面 $ABCD$ 所成角的大小为$\frac{\pi}{3}$.

21．解:（1）由题意知，这 3 所学校中每所学校准予立项的概率均为$\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$，

所以恰有一所学校准予立项的概率为$C_3^1\times\frac{1}{4}\times\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{27}{64}$.

（2）完成2×2列联表如下所示：

	准予立项	为准予立项	合计
县中	5	5	10
非县中	15	35	50
合计	20	40	60

$$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}=\frac{60\times(35\times5-15\times5)^2}{20\times40\times10\times50}=1.5<2.706,$$

故没有 90%的把握认为学校是否准予立项与学校是否是县中有关.

（3）由题意知，最终被评估为“通过”的学校有$60\times\frac{1}{3}(70\%+10\%\times50\%)=15$（所).

随机交量 X 的所有可能取值为 0，1，2，

$$P(X=0)=\frac{C_{45}^2}{C_{60}^2}=\frac{33}{59},\quad P(X=1)=\frac{C_{15}^1C_{45}^1}{C_{60}^2}=\frac{45}{118},\quad P(X=2)=\frac{C_{15}^2}{C_{60}^2}=\frac{7}{118},$$

所以 X 的分布列如下所示：

X	0	1	2
P	$\frac{33}{59}$	$\frac{45}{118}$	$\frac{7}{118}$

$$E(X)=\frac{33}{59}\times0+\frac{45}{118}\times1+\frac{7}{118}\times2=\frac{59}{118}=\frac{1}{2}.$$

22． $f'(x)=e^x+xe^x-a$，.......... 1 分

若 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，则 $f'(x)\ge 0$，即 $e^x+xe^x\ge a$

设 $h(x)=e^x+xe^x$，则 $h'(x)=(x+2)e^x$，

令 $h'(x)=0$ 得 $x=-2$，当 $x<-2$ 时，$h'(x)<0$，当 $x>-2$ 时，$h'(x)>0$，

所以 $h(x)\ge h(-2)=-\dfrac{1}{e^2}$，.......... 3 分

因此 a 的取值范围为 $\left(-\infty,-\dfrac{1}{e^2}\right]$.......... 4 分

（2）由题意 $g(x)=xe^x-ax-\dfrac{a}{2}x^2$，则 $g'(x)=e^x+xe^x-a-ax=(e^x-a)(x+1)$

若 $a\le 0$，$g'(x)$，$g(x)$ 随 x 变化的情况如下表：

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,+\infty)$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	极小值	↗

此时 $g(x)$ 不可能有三个零点.................... 6 分

若 $a>0$，令 $g'(x)=0$，得 $x=\ln a$ 或 $x=-1$

①若 $\ln a>-1$，即 $a>\dfrac{1}{e}$，$g'(x)$，$g(x)$ 随 x 变化的情况如下表：

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,\ln a)$	$\ln a$	$(\ln a,+\infty)$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

要使 $g(x)$ 有三个不同零点，需 $\begin{cases} g(-1)=-\dfrac{1}{e}+\dfrac{a}{2}>0, \\ g(\ln a)=-\dfrac{a}{2}(\ln a)^2<0, \end{cases}$ 得 $a>\dfrac{2}{e}$ 且 $a\ne 1$.............. 8 分

②若 $\ln a=-1$，即 $a=\dfrac{1}{e}$，此时 $g'(x)\ge 0$，$g(x)$ 单调递增，不可能有三个零点....... 9 分

③若$\ln a<-1$，即$0<a<\frac{1}{e}$，$g'(x)$，$g(x)$随x变化的情况如下表：

x	$(-\infty,\ln a)$	$\ln a$	$(\ln a,-1)$	-1	$(-1,+\infty)$
$g'(x)$	+	0	−	0	+
$g(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

要使$g(x)$有三个不同的零点，

需$\begin{cases} g(-1)=-\frac{1}{e}+\frac{a}{2}<0, \\ g(\ln a)=-\frac{a}{2}(\ln a)^2>0, \end{cases}$ 无解…………………… 11 分

综上所述：a的取值范围是$\left(\frac{2}{e},1\right)\cup(1,+\infty)$…………………… 12 分