

一、单选题

1. 1. 已知集合 $A = \{x | |x-1| \leq 3\}$, $B = \{x | x^2 - 4x - 5 \leq 0\}$, 则 $A \cap B =$ ()
 A. $\{x | -2 \leq x \leq -1\}$ B. $\{x | -1 \leq x \leq 4\}$ C. $\{x | -2 \leq x \leq 5\}$ D. $\{x | 4 \leq x \leq 5\}$
2. 若复数 $z = 3 + (a-1)i$ ($a \in \mathbb{R}$) 在复平面内对应的点在直线 $y = x + 2$ 上, 则 $a =$ ()
 A. 1 B. 2 C. 5 D. 6
3. 命题“对任意 $x > 0$, 都有 $x + e^x > 0$ ”的否定为 ()
 A. 对任意 $x > 0$, 都有 $x + e^x \leq 0$ B. 对任意 $x \leq 0$, 都有 $x + e^x \leq 0$
 C. 存在 $x > 0$, 使得 $x + e^x \leq 0$ D. 存在 $x \leq 0$, 使得 $x + e^x \leq 0$
4. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2 + x, & x \leq 0 \\ \ln(x+1), & x > 0 \end{cases}$, 则不等式 $f(6-x^2) > f(5x)$ 的解集是 ()
 A. $(-\infty, -6) \cup (1, +\infty)$ B. $(-\infty, -1) \cup (6, +\infty)$ C. $(-1, 6)$ D. $(-6, 1)$

二、多选题

5. 已知正实数 a, b 满足 $a + b = ab$, 则 ()
 A. $ab \geq 6$ B. $a + b \geq 4$ C. $a + 4b \geq 9$ D. $\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2} \geq 1$
6. 已知在棱长为 4 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, E 为棱 BC 的中点, 以点 E 为球心, 以 $\sqrt{10}$ 为半径的球的球面记为 Γ , 则下列结论正确的是 ()
 A. Γ 与面 ABB_1A_1 的交线长为 $\frac{\sqrt{6}\pi}{2}$ B. 直线 BD_1 被 Γ 截得的线段长为 $\frac{2\sqrt{66}}{3}$
 C. 若点 H 为 Γ 上的一个动点, 则 HD_1 的最小值为 $8 - \sqrt{10}$
 D. Γ 与截面 BDD_1B_1 的交线长为 $\frac{4\sqrt{2}}{3}\pi$

三、填空

7. 已知单位向量 $\vec{e}_1$ 和 $\vec{e}_2$ 的夹角为 60° , $\vec{a} = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2$, $\vec{b} = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2$, 则 $|\vec{a} + \vec{b}| =$ _____.
8. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的离心率为 2, 则双曲线的渐近线方程为 _____.

四、解答题

9. (12) 已知直线 $l: x - ay + 1 = 0$ 与圆 $C: x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$ 交于 A, B 两点, $|AB| = 2\sqrt{3}$.
 (1) 求 a 的值;
 (2) 求与直线 l 平行的圆 C 的切线方程.

10. (12) 已知函数 $f(x) = 2\sqrt{3}\sin(\pi-x)\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) - 2\cos^2 x + 1$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调递增区间;

(2) 在锐角 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $f(A) = 2$, $a = 2$, 求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.

$$(1) f(x) = 2\sqrt{3}\sin x \cos x - \cos 2x = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\cos 2x\right) = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right),$$

$$\text{由 } -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x - \frac{\pi}{6} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z}), \text{ 得 } k\pi - \frac{\pi}{6} \leq x \leq k\pi + \frac{\pi}{3} (k \in \mathbb{Z}),$$

$$\therefore \text{函数 } f(x) \text{ 的单调递增区间为 } \left[k\pi - \frac{\pi}{6}, k\pi + \frac{\pi}{3}\right] (k \in \mathbb{Z});$$

$$(2) \because f(A) = 2 \therefore 2\sin\left(2A - \frac{\pi}{6}\right) = 2, \text{ 即 } \sin\left(2A - \frac{\pi}{6}\right) = 1,$$

$$\because \triangle ABC \text{ 为锐角三角形, } \therefore 2A - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}, \therefore A = \frac{\pi}{3}$$

在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理得: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$, 又 $a = 2$,

$$\therefore 4 = b^2 + c^2 - bc \geq 2bc - bc = bc, \text{ 当且仅当 } b = c = 2 \text{ 时, } (bc)_{\max} = 4,$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc\sin A \leq \sqrt{3} \therefore \text{当 } b = c = 2 \text{ 时, } (S_{\triangle ABC})_{\max} = \sqrt{3}.$$

11. (12 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n + 3} (n \in \mathbb{N}^*)$.

(1) 证明: 数列 $\left\{\frac{1}{a_n} + \frac{1}{2}\right\}$ 是等比数列.

(2) 若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = \frac{n(3^n - 1)}{2^n} \cdot a_n$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

$$\text{证明: 由 } a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n + 3} (n \in \mathbb{N}^*), \text{ 知 } \frac{1}{a_{n+1}} + \frac{1}{2} = 3\left(\frac{1}{a_n} + \frac{1}{2}\right),$$

$$\text{又 } \frac{1}{a_1} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \therefore \left\{\frac{1}{a_n} + \frac{1}{2}\right\} \text{ 是以 } \frac{3}{2} \text{ 为首项, } 3 \text{ 为公比的等比数列.}$$

$$(2) \text{ 解: 由 (1) 知 } \frac{1}{a_n} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \times 3^{n-1} = \frac{3^n}{2}, \therefore a_n = \frac{2}{3^n - 1}, b_n = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

$$T_n = 1 \times \frac{1}{2^0} + 2 \times \frac{1}{2^1} + 3 \times \frac{1}{2^2} + \cdots + (n-1) \times \frac{1}{2^{n-2}} + n \times \frac{1}{2^{n-1}},$$

$$\frac{T_n}{2} = 1 \times \frac{1}{2^1} + 2 \times \frac{1}{2^2} + \cdots + (n-1) \times \frac{1}{2^{n-1}} + n \times \frac{1}{2^n},$$

$$\text{两式相减得 } \frac{T_n}{2} = \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} - n \times \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n},$$

$$\therefore T_n = 4 - \frac{n+2}{2^{n-1}}.$$

12.(12分) 已知中心为坐标原点的椭圆 C 的一个焦点为 $F(\sqrt{3}, 0)$, 且经过点 $M\left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

(1) 求椭圆 C 的标准方程.

(2) 若不过点 F 的直线 $l: y = kx + m (k < 0, m > 0)$ 与椭圆 C 交于 A, B 两点, 且与圆 $x^2 + y^2 = 1$ 相切, 试探究 $\triangle ABF$ 的周长是否为定值. 若是, 求出定值; 若不是, 请说明理由.

1) $\because$ 椭圆 C 的一个焦点为 $F(\sqrt{3}, 0)$

且经过点 $M(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$

$\therefore$ 设椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$

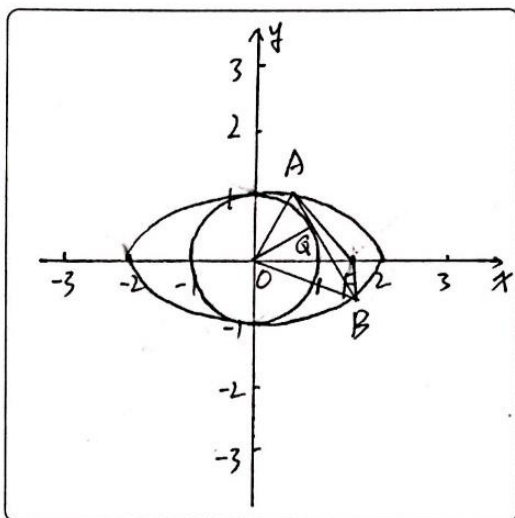
$$\text{又 } \because c = \sqrt{3} \quad \therefore a^2 - b^2 = c^2 = 3 \quad ①$$

又 $\because M(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$ 在椭圆上

$$\therefore \frac{1}{a^2} + \frac{3}{4b^2} = 1 \quad ②$$

联立 ① ② 得 $a^2 = 4, b^2 = 1$

$$\therefore \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$



2) 设 $A(x_1, y_1)$ $B(x_2, y_2)$ ($x_1 > 0, x_2 > 0$)

连接 OA, OQ , 在 $\triangle OAQ$ 中 $|AQ|^2 = x_1^2 + y_1^2 - 1 = x_1^2 + 1 - \frac{x_1^2}{4} - 1 = \frac{3}{4}x_1^2$

$$\text{即 } |AQ| = \frac{\sqrt{3}}{2}x_1 \quad \text{同理 } |BQ| = \frac{\sqrt{3}}{2}x_2$$

$$\therefore |AB| = |AQ| + |BQ| = \frac{\sqrt{3}}{2}(x_1 + x_2)$$

$$\therefore |AB| + |AF| + |BF| = \frac{\sqrt{3}}{2}(x_1 + x_2) + (2 - \frac{\sqrt{3}}{2}x_1) + (2 - \frac{\sqrt{3}}{2}x_2) = 4$$

$$(\text{其中 } |AF| = \sqrt{(x_1 - \sqrt{3})^2 + y_1^2} = \sqrt{x_1^2 - 2\sqrt{3}x_1 + 3 + 1 - \frac{x_1^2}{4}} = \sqrt{[\frac{\sqrt{3}}{2}(x_1 - \frac{4\sqrt{3}}{3})]^2} = 2 - \frac{\sqrt{3}}{2}x_1$$

$$(\text{其中 } x_1 - \frac{4\sqrt{3}}{3} < 0), \text{ 同理 } |BF| = 2 - \frac{\sqrt{3}}{2}x_2)$$

$\therefore \triangle ABF$ 周长为定值, 等于 4

1. B 2. D 3. C 4. D 5. BCD 6. ABD 7. $\sqrt{13}$ 8. $y = \pm\sqrt{3}x$

9. (1) $a = \frac{4}{3}$, (2) $3x - 4y + 8 = 0$ 或 $3x - 4y - 12 = 0$

10. (1) $\left[k\pi - \frac{\pi}{6}, k\pi + \frac{\pi}{3}\right] (k \in \mathbf{Z})$; (2) $\sqrt{3}$.

11. (1) 证明: 由 $a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n + 3} (n \in N^*)$, 知 $\frac{1}{a_{n+1}} + \frac{1}{2} = 3\left(\frac{1}{a_n} + \frac{1}{2}\right)$,

又 $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, $\therefore \left\{\frac{1}{a_n} + \frac{1}{2}\right\}$ 是以 $\frac{3}{2}$ 为首项, 3 为公比的等比数列.

(2) 解: 由 (1) 知 $\frac{1}{a_n} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \times 3^{n-1} = \frac{3^n}{2}$, $\therefore a_n = \frac{2}{3^n - 1}$, $b_n = \frac{n}{2^{n-1}}$.

$$T_n = 1 \times \frac{1}{2^0} + 2 \times \frac{1}{2^1} + 3 \times \frac{1}{2^2} + \cdots + (n-1) \times \frac{1}{2^{n-2}} + n \times \frac{1}{2^{n-1}},$$

$$\frac{T_n}{2} = 1 \times \frac{1}{2^1} + 2 \times \frac{1}{2^2} + \cdots + (n-1) \times \frac{1}{2^{n-1}} + n \times \frac{1}{2^n},$$

两式相减得 $\frac{T_n}{2} = \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} - n \times \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n},$

$$\therefore T_n = 4 - \frac{n+2}{2^{n-1}}.$$