解析高中数学例题解答中导数的应用

◉江苏省启东市汇龙中学 朱玉华

在高中数学学习中，纷繁复杂的数学问题给高中生提出了很多难题.导数和函数一样是高中学习的重要知识点，具有一定的难度，同时又是高考中必不可少的知识点，而且在高考中所占的比重令人咋舌.高中时候必须要打好导数学习的基础，而且应该使导数学习的难点和重点更为突出.针对高中数学与大学数学的衔接学习来说，导数作为数学学习的重点之一，将与函数的学习有很密切的关系，促使学生在未来学习微积分.但是由于导数较难借助实际例题开展深入的分析和学习，因此例题对于高中生解决导数难题来说具有更好的效果.

一、使用导数解决函数的单调性问题

正是因为导数和函数天然具备密切的联系，因此借助导数加深学生对于函数概念和性质的理解，其中一个最基本的应用就是函数的单调性问题，导数的解题思路需要通过学生的数学思维拓展而实现，在实际的解题过程中，利用一定的例题解答，能够明确函数的定义范围.高中生的解题思路是借助导数解决函数单调性的问题，因此需要得出函数的导函数，证明区间之内函数的单调性与否，在解题过程中需要根据已知函数的单调性进行导数正负的转化，从而求解导数在某一给定区间内恒成立的问题.利用导数解决函数的单调性问题，确定函数的单调区间.

例1 函数 $y=\ln(x^2-x-2)$ 的单调递减区间为______.

解析：因为函数 $y=\ln(x^2-x-2)$ 的定义域为 $(2,+\infty)\cup(-\infty,-1)$.令 $f(x)=x^2-x-2$，则由 $f'(x)=2x-1<0$，得 $x<\frac{1}{2}$，所以函数 $y=\ln(x^2-x-2)$ 的单调递减区间为 $(-\infty,-1)$.

例2 已知函数 $y=x+\frac{1}{x}$，试讨论出此函数的单调区间.

解析：由题意知，函数的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，且 $y'=\left(x+\frac{1}{x}\right)'=1-1\cdot x^{-2}=\frac{x^2-1}{x^2}=\frac{(x+1)(x-1)}{x^2}$.

令 $\frac{(x+1)(x-1)}{x^2}>0$，解得 $x>1$ 或 $x<-1$，所以 $y=x+\frac{1}{x}$ 的单调递增区间 $(-\infty,-1)$ 和 $(1,+\infty)$；令 $\frac{(x+1)(x-1)}{x^2}<0$，解得 $-1<x<0$ 或 $0<x<1$，所以 $y=x+\frac{1}{x}$ 的单调递减区间是 $(-1,0)$ 和 $(0,1)$

为了考查学生导数基本运算的掌握情况，可以借助导数研究函数的单调性，加入二次函数求解函数单调区间的过程，需要介入导数并开展变式训练，当确定了 $f(x)$ 单调区间的求解范围，就可以借助导数的变式训练，学生掌握变式和单调区间求证的步骤.使用导数求解函数单调性，一方面是为了提高学生的解题能力，另一方面也能够通过讨论函数的对象范围，也可以经过适当地归纳总结，找出利用导数求解函数单调性的一般规律，从而能够给定范围之内的单调性问题.

二、借助导数公式解决不等式问题

不等式的学习同样是高中数学教学中的热点，不等式学习的难度，决定了在高考中利用综合题目重点考查不等式问题.学生能够借助导数来解决不等式的相关问题，就可以使用目标函数，对未知条件下的函数求导，并且能够据此完成不等式的求解和证明过程.通过转变不等式问题，利用导数的方法解答函数不等式问题.

例3 已知函数 $f(x)=x^3-\frac{1}{2}x^2+bx+c$.

若 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是增函数，求 b 的取值范围．

解：由题意可知，$f'(x)=3x^2-x+b$，因为 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是增函数，则 $f'(x)\geqslant 0$，即 $3x^2-x+b\geqslant 0$，所以 $b\geqslant x-3x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 恒成立．设 $g(x)=x-3x^2$．当 $x=\frac{1}{6}$ 时，$g(x)_{\max}=\frac{1}{12}$，所以 $b\geqslant\frac{1}{12}$．

利用函数解决不等式，首先需要选取与之相对应的函数，同时必须要利用函数的单调性来求证．任何数学难题都是围绕基本数学知识点展开的，函数的单调性能够完美地解答不等式中的一些问题，并且在证明的过程中，其推导过程变得非常科学而有意义．不等式问题的解答和证明有多种不同的方法，但是在解答不等式问题的过程中，应时刻牢记最基本的导数公式，逐步调整才能够解决导数公式与研究不贴合的问题，完成不等式的解答过程，同时也必须要附带适当的证明过程，分步骤予以解答和说明．

三、利用导数基本知识解决曲线的切线类问题

在高中数学教学过程中，很多难点和重点，其中一个比较难以理解的就是几何问题和代数问题是互通的．很多高中学生提出在平面直角坐标系内的切线方程求解非常难，如，根据已知条件的曲线为坐标，如果想要求切线的方程，可以引入导数，完成更简便的解决过程，由于曲线和切线的交点刚好为切点，那么就等于已知曲线，寻求曲线和切线的交点，并且求和直线垂直的曲线点，写出切线方程，根据解题过程完成导数求解．有的时候还会根据已知曲线的函数方程，求解过曲线切点．

例 4　已知函数 $f(x)=x^3+bx^2+cx+d$ 的图像过点 $P(0,2)$，且在点 $M(-1,f(-1))$ 处的切线方程为 $6x-y+7=0$．

(1) 求函数 $y=f(x)$ 的解析式；

(2) 求函数 $y=f(x)$ 的单调区间．

解：(1) 由 $f(x)$ 的图像经过 $P(0,2)$ 知，$d=2$，

所以 $f(x)=x^3+bx^2+cx+2$，$f'(x)=3x^2+2bx+c$．

由在 $M(-1,f(-1))$ 处的切线方程是 $6x-y+7=0$ 知，$-6-f(-1)+7=0$，$f'(x)=3x^2+2bx+c$．

利用导数基础知识解决曲线的切线问题，要考虑切线点 P 在曲线上时不一定就能够区分曲线的关联，但如果这一点不是切点时，又可以在解题中根据整个题的大意，列出求解导数公式．选择导数，解决切线问题，必须要求学生耐心细致的深入分析，其中最为关键的点是该切点是否可以直接利用导数解决题目中切线的切点，结合已经给定点 P 在题目解答过程中的解题方法和步骤，将导数和解决曲线切线类问题联立，优化解题的方式，使解题步骤更为简便．

四、结束语

导数的概念是高中数学中非常重要的概念，帮助学生解决了高中数学中很多问题，导数作为一个重要的工具，对于数学各个方面的知识求解都具有特殊的含义．函数是一个变量引起另一变量的变化，函数和导数之间的关系非常密切，但是很多高中生对于函数和导数的理解不当，常常会出现求导法则和规律的使用不当等问题．就是因为如此，如果能够在高中导数学习环节加入更多的导函数知识，能够提升学生的数学文化素养，并且灵活地运用导数解答问题，促进其全面发展．通过对上述导数和函数内涵的解答，总结出几种比较常见的高中数学导数应用范围和应用规律，能够为高中生的复习提供良好的抓手，从而理解函数是集合之间的对应关系，导数作为函数求导的一种基本工具，能够更好地帮助学生解决函数的问题．为了能够为未来的数学定理奠定基础，应借助相关题目的解答，帮助学生更好地掌握有难度的数学知识和经验，锻炼学生的解题能力，促进学生在解题技巧和解题思维方面的全面发展，为未来下一步的学习打下扎实的基础．

参考文献：

[1] 杨勇．用问题驱动探究　让结论自主建构——以“导数在研究函数单调性中的应用”为例[J]．数学通报，2019(4)．

[2] 曹广福，张蜀青．论数学课堂教学与评价的核心要素——以高中导数概念课为例[J]．数学教育学报，2016(2)．