

扬州市 2018—2019 学年度第一学期期中检测试题

高三数学参考答案

2018. 11

第一部分

1. $3-i$ 2. $(-\infty, 2]$ 3. $\frac{1}{2}$ 4. 2 5. 1 6. $\frac{\pi}{4}$ 7. 3 8. $x=-3$
 9. $a \leq -2$ 10. $y = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}x$ 11. $(-3, 0)$ (区间开闭皆可) 12. 1 13. $\frac{13}{5}$ 14. $\{3, 4, 5, 6, 7\}$

15. 解: (1) 由 $\sqrt{3}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|$, 得 $\sqrt{3}|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cos \alpha = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|$,

所以 $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$, 又因为 $0 < \alpha < \pi$, 所以 $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - (\frac{1}{\sqrt{3}})^2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

$\therefore \tan \alpha = \sqrt{2}$ 6 分

(2) $\because \cos \beta = \frac{3}{5}, \beta \in (0, \frac{\pi}{2}) \therefore \sin \beta = \frac{4}{5}$ 8 分

由 (1) 知: $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \therefore \cos(\beta - \alpha) = \cos \beta \cos \alpha + \sin \beta \sin \alpha = \frac{3}{5} \times \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{4}{5} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3} + 4\sqrt{6}}{15}$.

.....14 分

16. 解: (1) $\because f(x) \leq 2x$ 对 $x \in (0, 2)$ 恒成立 $\therefore a \leq \frac{1}{x} + 2x$ 对 $x \in (0, 2)$ 恒成立

$\because \frac{1}{x} + 2x \geq 2\sqrt{2}$, 当且仅当 $\frac{1}{x} = 2x$, 即 $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时取等号

$\therefore a \leq 2\sqrt{2}$...6 分

(2) 当 $a=1$ 时, $f(x) = 1 - \frac{1}{|x|}$, $\because f(x) \geq 2x \therefore 1 - \frac{1}{|x|} \geq 2x$ (*)

①若 $x > 0$, 则 (*) 可化为: $2x^2 - x + 1 \leq 0$, 所以 $x \in \emptyset$; ...9 分

②若 $x < 0$, 则 (*) 可化为: $2x^2 - x - 1 \geq 0$, 解得: $x \geq 1$ 或 $x \leq -\frac{1}{2}$, $\because x < 0 \therefore x \leq -\frac{1}{2}$...12 分

由①②可得, (*) 的解集为 $(-\infty, -\frac{1}{2}]$14 分

17. 解: $\because$ 直线 $x - 3y - 10 = 0$ 与圆 $O: x^2 + y^2 = r^2 (r > 0)$ 相切

$\therefore$ 圆心 O 到直线 $x - 3y - 10 = 0$ 的距离为 $r = \frac{|10|}{\sqrt{1+9}} = \sqrt{10}$2 分

(1) 记圆心到直线 l 的距离为 d , 所以 $d = \sqrt{10 - 6} = 2$.

当直线 l 与 x 轴垂直时, 直线 l 的方程为 $x = 2$, 满足题意; ...3 分

当直线 l 与 x 轴不垂直时, 设直线 l 的方程为 $y-1=k(x-2)$, 即 $kx-y+(1-2k)=0$

$$\text{所以 } d = \frac{|1-2k|}{\sqrt{1+k^2}} = 2, \text{ 解得 } k = -\frac{3}{4}, \text{ 此时直线 } l \text{ 的方程为 } 3x+4y-10=0 \quad \dots 6 \text{ 分}$$

综上, 直线 l 的方程为 $x=2$ 或 $3x+4y-10=0$7 分

(2) 设 $P(x_0, y_0)$. $\because$ 直线 $y=3$ 与圆 O 交于 A, B 两点, 不妨取 $A(1,3), B(-1,3)$,

$$\therefore \text{直线 } PA, PB \text{ 的方程分别为 } y-3 = \frac{y_0-3}{x_0-1}(x-1), \quad y-3 = \frac{y_0-3}{x_0+1}(x+1)$$

$$\text{令 } x=0, \text{ 得 } M(0, \frac{3x_0-y_0}{x_0-1}), N(0, \frac{3x_0+y_0}{x_0+1}), \text{ 则 } y_M \cdot y_N = \frac{3x_0-y_0}{x_0-1} \cdot \frac{3x_0+y_0}{x_0+1} = \frac{9x_0^2-y_0^2}{x_0^2-1} \quad (*) \quad \dots 13 \text{ 分}$$

因为点 $P(x_0, y_0)$ 在圆 C 上, 所以 $x_0^2 + y_0^2 = 10$, 即 $y_0^2 = 10 - x_0^2$, 代入 $(*)$ 式

$$\text{得 } y_M \cdot y_N = \frac{9x_0^2 - (10 - x_0^2)}{x_0^2 - 1} = 10 \text{ 为定值.} \quad \dots 15 \text{ 分}$$

18. 解: (1) $\because \angle COF = \theta$, 南京园在中心广场的南偏西 45° 方向上, 且到中心广场的距离为 $\sqrt{2}km$

$$\therefore \angle AOE = \frac{\pi}{4} - \theta \quad \therefore d_1 = \sqrt{2} \sin(\frac{\pi}{4} - \theta) \quad \dots \dots \dots 4 \text{ 分}$$

(2) 分别设点 B, C 到直线 EF 的距离为 d_2, d_3 . 由 (1) 知: $d_2 = 2\sqrt{2} \sin(\frac{\pi}{4} - \theta), d_3 = \sqrt{10} \sin \theta$

$$\begin{aligned} \therefore y &= 2[(\sqrt{2} \sin(\frac{\pi}{4} - \theta))^2 + (2\sqrt{2} \sin(\frac{\pi}{4} - \theta))^2 + (\sqrt{10} \sin \theta)^2] = 20[\frac{1 - \cos(\frac{\pi}{2} - 2\theta)}{2} + \frac{1 - \cos 2\theta}{2}] \\ &= 20 - 10(\sin 2\theta + \cos 2\theta) = 20 - 10\sqrt{2} \sin(2\theta + \frac{\pi}{4}), \quad \theta \in (0, \frac{\pi}{4}) \end{aligned} \quad \dots \dots \dots 9 \text{ 分}$$

$$\because \theta \in (0, \frac{\pi}{4}) \quad \therefore 2\theta + \frac{\pi}{4} \in (\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}) \quad \therefore \text{当 } 2\theta + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \text{ 时, } y_{\min} = 20 - 10\sqrt{2} \text{ (万元)} \quad \dots 12 \text{ 分}$$

$$\text{此时 } 2\theta = \frac{\pi}{4} \quad \therefore \tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} = 1, \text{ 解得: } \tan \theta = \sqrt{2} - 1 \quad \dots \dots \dots 14 \text{ 分}$$

答: 铺设三条鹅卵石路的总费用为 $(20 - 10\sqrt{2})$ 万元, 此时 $\tan \theta$ 的值为 $\sqrt{2} - 1$15 分

19. 解: (1) 因为两焦点与短轴的一个顶点的连线构成等腰直角三角形, 所以 $a = \sqrt{2}c$,

$$\text{又由右准线方程为 } x=2, \text{ 得到 } \frac{a^2}{c} = 2,$$

$$\text{解得 } a = \sqrt{2}, c = 1, \text{ 所以 } b^2 = a^2 - c^2 = 1$$

$$\text{所以, 椭圆 } C \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{2} + y^2 = 1 \quad \dots 4 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ 设 } B(x_1, y_1), \text{ 而 } A(0,1), \text{ 则 } M(\frac{x_1}{2}, \frac{1+y_1}{2}),$$

$$\because \overrightarrow{ON} = \frac{\sqrt{6}}{2} \overrightarrow{OM}, \therefore N\left(\frac{\sqrt{6}x_1}{4}, \frac{\sqrt{6}(1+y_1)}{4}\right)$$

因为点 B, N 都在椭圆上, 所以

$$\begin{cases} \frac{x_1^2}{2} + y_1^2 = 1 \\ \frac{3x_1^2}{16} + \frac{3(1+y_1)^2}{8} = 1 \end{cases}, \text{ 将下式两边同时乘以 } \frac{8}{3} \text{ 再减去上式, 解得 } y_1 = \frac{1}{3}, x_1^2 = \frac{16}{9} \quad \dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } OB = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \sqrt{\frac{16}{9} + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{17}}{3} \quad \dots 9 \text{ 分}$$

(3) 由原点 O 到直线 l 的距离为 1, 得 $\frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}} = 1$, 化简得: $1+k^2 = m^2$

$$\text{联立直线 } l \text{ 的方程与椭圆 } C \text{ 的方程: } \begin{cases} y = kx + m \\ \frac{x^2}{2} + y^2 = 1 \end{cases}, \text{ 得 } (1+2k^2)x^2 + 4kmx + 2m^2 - 2 = 0$$

$$\text{设 } A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), \text{ 则 } x_1 + x_2 = -\frac{4km}{1+2k^2}, x_1x_2 = \frac{2m^2-2}{1+2k^2}, \text{ 且 } \Delta = 8k^2 > 0 \quad \dots 11 \text{ 分}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} &= x_1x_2 + y_1y_2 = x_1x_2 + (kx_1 + m)(kx_2 + m) = (1+k^2)x_1x_2 + km(x_1 + x_2) + m^2 \\ &= (1+k^2)\frac{2m^2-2}{1+2k^2} - \frac{4k^2m^2}{1+2k^2} + m^2 = \frac{2m^2-2+2k^2m^2-2k^2-4k^2m^2+m^2+2k^2m^2}{1+2k^2} = \frac{3m^2-2-2k^2}{1+2k^2} = \frac{1+k^2}{1+2k^2} = \lambda, \end{aligned}$$

$$\text{所以 } k^2 = \frac{1-\lambda}{2\lambda-1}$$

$$\begin{aligned} \triangle OAB \text{ 的面积 } S &= \frac{1}{2} \times 1 \times AB = \frac{1}{2} \sqrt{1+k^2} |x_1 - x_2| = \frac{1}{2} \sqrt{1+k^2} \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{1+k^2} \sqrt{\frac{8k^2}{(1+2k^2)^2}} = \sqrt{2} \sqrt{\frac{(1+k^2)k^2}{(1+2k^2)^2}} = \sqrt{2\lambda(1-\lambda)} \quad \dots 14 \text{ 分} \end{aligned}$$

因为 $S = \sqrt{2\lambda(1-\lambda)}$ 在 $[\frac{4}{5}, \frac{5}{6}]$ 为单调减函数,

$$\text{并且当 } \lambda = \frac{4}{5} \text{ 时, } S = \frac{2\sqrt{2}}{5}, \text{ 当 } \lambda = \frac{5}{6} \text{ 时, } S = \frac{\sqrt{10}}{6},$$

$$\text{所以 } \triangle OAB \text{ 的面积 } S \text{ 的范围为 } [\frac{\sqrt{10}}{6}, \frac{2\sqrt{2}}{5}]. \quad \dots 16 \text{ 分}$$

20. 解: (1) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $f(1) = 0$, 所以 P 点坐标为 $(1, 0)$;

$$\text{又 } f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}, f'(1) = 1, \text{ 则切线方程为 } y - 0 = x - 1,$$

所以函数 $f(x)$ 在点 $P(1, f(1))$ 处的切线方程为 $x - y - 1 = 0$ 3 分

$$(2) f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2} (x > 0)$$

x	$(0, e)$	e	$(e, +\infty)$
$f'(x)$	正	0	负
$f(x)$	单调增	极大值	单调减

由 $f^2(x) + tf(x) > 0$, 得 $f(x)[f(x) + t] > 0$;

- ① $t > 0$ 时, $f(x) > 0$ 或 $f(x) < -t$, 满足条件的整数解有无数个, 舍;
 ② $t = 0$ 时, $f(x) \neq 0$, 得 $x > 0$ 且 $x \neq 1$, 满足条件的整数解有无数个, 舍;
 ③ $t < 0$ 时, $f(x) < 0$ 或 $f(x) > -t$, 当 $f(x) < 0$ 时, 无整数解;

当 $f(x) > -t$ 时, 不等式有且仅有三个整数解, 又 $f(3) = \frac{\ln 3}{3}$, $f(2) = f(4) = \frac{\ln 2}{2}$, $f(5) = \frac{\ln 5}{5}$

因为 $f(x)$ 在 $(0, e)$ 递增, 在 $(e, +\infty)$ 递减; 所以 $f(5) \leq -t < f(4)$, 即 $\frac{\ln 5}{5} \leq -t < \frac{\ln 2}{2}$, 即 $-\frac{\ln 2}{2} < t \leq -\frac{\ln 5}{5}$;

所以实数 t 的取值范围为 $-\frac{\ln 2}{2} < t \leq -\frac{\ln 5}{5}$8 分

(3) $h(x) = x^2 - 2x + 4\ln x$,

因为 $h(x_1) + h(x_2) - x_1^2 x_2^2 = 0$,

所以 $x_1^2 - 2x_1 + 4\ln x_1 + x_2^2 - 2x_2 + 4\ln x_2 - x_1^2 x_2^2 = 0$,

即 $(x_1 + x_2)^2 - 2(x_1 + x_2) = x_1^2 x_2^2 + 2x_1 x_2 - 4\ln x_1 x_2$,

令 $t = x_1 x_2$, $\varphi(t) = t^2 + 2t - 4\ln t (t > 0)$, ...11 分

则 $\varphi'(t) = 2t + 2 - \frac{4}{t} = \frac{2(t-1)(t+2)}{t} (t > 0)$,

当 $t \in (0, 1)$ 时, $\varphi'(t) < 0$, 所以函数 $\varphi(t) = t^2 + 2t - 4\ln t (t > 0)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减;

当 $t \in (1, +\infty)$ 时, $\varphi'(t) > 0$, 所以函数 $\varphi(t) = t^2 + 2t - 4\ln t (t > 0)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增.

所以函数 $\varphi(t) = t^2 + 2t - 4\ln t (t > 0)$ 在 $t = 1$ 时, 取得最小值, 最小值为 3. ...14 分

因为存在两个正实数 x_1, x_2 , 满足 $h(x_1) + h(x_2) - x_1^2 x_2^2 = 0$, 所以 $(x_1 + x_2)^2 - 2(x_1 + x_2) \geq 3$,

即 $(x_1 + x_2)^2 - 2(x_1 + x_2) - 3 \geq 0$, 所以 $x_1 + x_2 \geq 3$ 或 $x_1 + x_2 \leq -1$.

因为 x_1, x_2 为正实数, 所以 $x_1 + x_2 \geq 3$16 分

第二部分（加试部分）

21. 解：设直线 $y=kx+1$ 上任意点 $M(x,y)$ 在矩阵 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ 对应的变换下得到的点 $M'(x',y')$ ，则

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ x+y \end{bmatrix}, \text{ 即 } \begin{cases} x'=y \\ y'=x+y \end{cases}, \therefore \begin{cases} x=-x'+y' \\ y=x' \end{cases} \quad \dots 5 \text{ 分}$$

代入直线方程 $y=kx+1$ 得： $x'=k(-x'+y')+1$ ，将 $P(3,2)$ 代入上式，解得： $k=-2$ 。...10 分

22. 解：（1）设 $A_i (i=1,2,3)$ 表示第 i 次投篮命中， $\overline{A_i}$ 表示第 i 次投篮不中；设投篮连续命中 2 次为事件 A ，则

$$P(A) = P(A_1 A_2 \overline{A_3} + \overline{A_1} A_2 A_3) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{27}. \quad \dots 4 \text{ 分}$$

（2）命中的次数 X 可取 0, 1, 2, 3;

$$P(X=0) = (1-\frac{2}{3})^3 = \frac{1}{27}, \quad P(X=1) = C_3^1 (\frac{2}{3})^1 (1-\frac{2}{3})^2 = \frac{2}{9}, \quad P(X=2) = C_3^2 (\frac{2}{3})^2 (1-\frac{2}{3})^1 = \frac{4}{9},$$

$$P(X=3) = (\frac{2}{3})^3 = \frac{8}{27}$$

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{27}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{27}$

...8 分

$$\text{所以 } E(X) = 1 \times \frac{2}{9} + 2 \times \frac{4}{9} + 3 \times \frac{8}{27} = 2$$

答： X 的数学期望为 2.

...10 分

23. （1）根据题中空间直角坐标系可知：

$$A(0,-1,0), C(0,1,0), B(2,1,0), A_1(0,0,\sqrt{3}), \quad \dots 1 \text{ 分}$$

$$\therefore \overrightarrow{AB} = (2,2,0), \overrightarrow{A_1C} = (0,1,-\sqrt{3})$$

$$\therefore \cos \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A_1C} \rangle = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A_1C}}{|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{A_1C}|} = \frac{2 \times 0 + 2 \times 1 + 0 \times (-\sqrt{3})}{\sqrt{2^2 + 2^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \quad \dots 3 \text{ 分}$$

$$\text{设异面直线 } AB \text{ 与 } A_1C \text{ 的所成角为 } \alpha, \text{ 则 } \alpha \in (0, \frac{\pi}{2}], \therefore \cos \alpha = |\cos \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A_1C} \rangle| = \frac{\sqrt{2}}{4} \quad \dots 4 \text{ 分}$$

（2）由（1）得： $\overrightarrow{A_1B} = (2,1,-\sqrt{3}), \overrightarrow{BC} = (-2,0,0)$ ，设平面 A_1BC 的法向量为 $\vec{n} = (x,y,z)$ ，

$$\therefore \begin{cases} \vec{n} \perp \overrightarrow{A_1B} \\ \vec{n} \perp \overrightarrow{BC} \end{cases} \therefore \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{A_1B} = 2x + y - \sqrt{3}z = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{BC} = -2x = 0 \end{cases}, \text{ 取 } z=1, \text{ 则 } \vec{n} = (0, \sqrt{3}, 1) \quad \dots 7 \text{ 分}$$

$$\therefore \cos \langle \overrightarrow{AB}, \vec{n} \rangle = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n}}{|\overrightarrow{AB}| |\vec{n}|} = \frac{2 \times 0 + 2 \times \sqrt{3} + 0 \times 1}{\sqrt{2^2 + 2^2} \cdot \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{6}}{4}. \quad \dots 9 \text{ 分}$$

$$\text{设直线 } AB \text{ 与平面 } A_1BC \text{ 所成角为 } \beta, \beta \in (0, \frac{\pi}{2}], \text{ 则 } \sin \beta = |\cos \langle \overrightarrow{AB}, \vec{n} \rangle| = \frac{\sqrt{6}}{4}. \quad \dots 10 \text{ 分}$$

24. 证明: (1) 由 $a_1 - a_1^2 = a_2 > 0$, 解得 $0 < a_1 < 1$.

...1 分

下用数学归纳法证明: 当 $n \geq 2$ 时, $a_n \leq \frac{1}{n+2}$

① 当 $n=2$ 时, $a_2 = a_1 - a_1^2 = -(a_1 - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4}$.

所以不等式成立;

② 假设当 $n=k(k \geq 2)$ 时, 不等式成立, 即 $a_k \leq \frac{1}{k+2}$

则当 $n=k+1$ 时, 有

$$a_{k+1} = a_k - a_k^2 = -(a_k - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4} \leq -(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4} = \frac{k+1}{(k+2)^2} < \frac{k+1}{(k+1)(k+3)} = \frac{1}{(k+1)+2}$$

则当 $n=k+1$ 时, 不等式也成立.

综合①②, 当 $n \geq 2$ 时, 都有 $a_n \leq \frac{1}{n+2}$.

...5 分

(2) 记 $f(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{1+x} (x > 0)$

...6 分

当 $x > 0$ 时, $f'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{x}{(1+x)^2} > 0$

所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数, 则 $f(x) > f(0) = 0$, 即 $\ln(1+x) > \frac{x}{1+x}$

...8 分

令 $x = \frac{1}{i+1} (i \in N^*)$, 则 $\frac{1}{i+2} < \ln \frac{i+2}{i+1} < \ln \frac{i+1}{i}$, 从而有

$$\sum_{i=2}^n a_i < \sum_{i=2}^n \frac{1}{i+2} < \sum_{i=2}^n [\ln(i+1) - \ln i] = \ln(n+1) - \ln 2 < \ln(n+1).$$

...10 分