多视角剖析一道 2021 年高考解三角形问题*

卓晓萍　(福建省莆田第二中学　351131)
蔡海涛　(福建省莆田第二中学　351131　福建教育学院数学教育研究所　350025)

1　试题呈现

(2021 年新高考 Ⅰ 卷第 19 题)记$\triangle ABC$的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c.已知 $b^2=ac$,点 D 在边 AC 上,$BD\sin\angle ABC=a\sin C$.

(1)证明:$BD=b$;

(2)若 $AD=2DC$,求 $\cos\angle ABC$.

本题以三角形为载体,主要考查正弦定理、余弦定理、三角恒等变换等基础知识,考查推理论证能力、运算求解能力,考查化归与转化思想、函数与方程思想,考查数学运算、逻辑推理等核心素养,体现基础性和综合性.

本题属解答题中的中档题.高考结束后,笔者随机访谈了部分学生,大部分考生解答此题时都抱有一种想尽快解答的应试心态,但由于紧张而"欲速则不达",特别在第(2)问未能较快寻找到解决问题的突破口,最后虽然解出来了,但花费了不少的时间.

2　多视角剖析

对于第(1)问,在$\triangle ABC$中,$\dfrac{AC}{\sin\angle ABC}=\dfrac{AB}{\sin C}$ ①,由 $BD\sin\angle ABC=a\sin C$,得$\dfrac{BD}{\sin C}=\dfrac{a}{\sin\angle ABC}$ ②.

联立①②得$\dfrac{AB}{BD}=\dfrac{AC}{a}$,即 $ac=b\cdot BD$.

又因为 $b^2=ac$,所以 $BD=b$.

评注　第(1)问要证明的是边的关系,已知条件含有边、角的关系,因此需要进行边角转化.再根据已知条件中含有 $\angle ABC$,$\angle C$,故利用含有这两个角的正弦定理,后续的证明不难完成.

本题的难点在第(2)问,主要有以下视角.

视角 1　利用函数与方程思想,结合平行线性质,建立方程.

方法 1　如图1,过点 A 作直线 BC 的平行线 AE,延长线段 BD,与 AE 交于点 E.因为 $AD=2DC$,所以 $AE=2a$,$DE=2b$.又$\angle ABC+\angle BAE=\pi$,所以 $\cos\angle ABC=-\cos\angle BAE$.

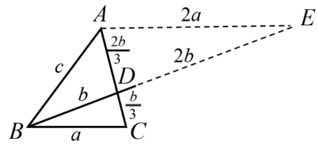

图 1

而在$\triangle ABC$中,

可求得 $\cos\angle ABC=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$,

在$\triangle ABE$中,$\cos\angle BAE=\dfrac{c^2+(2a)^2-(3b)^2}{4ac}$,

故$-\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{c^2+(2a)^2-(3b)^2}{4ac}$,整理得 $6a^2+3c^2=11b^2$ ③.

将 $b^2=ac$ 代入③式,得 $6a^2+3c^2=11ac$,即 $6a^2-11ac+3c^2=(2a-3c)(3a-c)=0$,所以 $a=\dfrac{c}{3}$ 或 $a=\dfrac{3}{2}c$.

当 $a=\dfrac{c}{3}$ 时,$b^2=ac=\dfrac{c^2}{3}$,则 $\cos\angle ABC=$

$$\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{\frac{c^2}{9}+c^2-\frac{c^2}{3}}{\frac{2}{3}c^2}=\frac{\frac{7}{9}c^2}{\frac{2}{3}c^2}=\frac{7}{6}(\text{舍去}).$$

当 $a=\dfrac{3}{2}c$ 时,$b^2=ac=\dfrac{3}{2}c^2$,则 $\cos\angle ABC=$

$$\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{\frac{9}{4}c^2+c^2-\frac{3}{2}c^2}{3c^2}=\frac{\frac{7}{4}c^2}{3c^2}=\frac{7}{12}.$$

利用本视角还可以有以下方法,碍于篇幅,本文只提供思路,具体解题过程不再赘述.

方法 2　如图 2,过点 D 作 $DG\parallel AB$,利用 $\angle ABC+\angle DGB=\pi$,$\cos\angle ABC=-\cos\angle DGB$ 构造方程.

方法 3　如图 3,过点 D 作 $DF\parallel BC$,利用 $\angle ABC+\angle DFB=\pi$,$\cos\angle ABC=-\cos\angle DFB$ 构造方程.

评注　根据余弦定理,结合已知条件 $b^2=$

* 本文系 2020 年福建省电化教育馆课题"基于动态数学技术环境高中实验教学的实践研究"(编号:闽教电馆 KT2042)的研究成果.

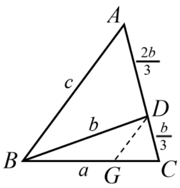

图 2

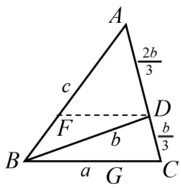

图 3

ac，不难得到 $\cos\angle ABC=\dfrac{a^2+c^2-ac}{2ac}$，利用函数与方程思想，只需再找到一个用边来表示 $\cos\angle ABC$ 的表达式即可，则对 $\angle ABC$ 进行平移，因此考虑平几中平行线的性质，结合已知条件 $AD=2DC$ 作平行线，从而突破了难点.

视角 2 利用化归与转化思想，结合角度关系，建立方程.

方法 4 $\triangle ABD$ 与 $\triangle ABC$ 有公共角 A，则 $\cos\angle BAD=\cos\angle BAC$.

而在 $\triangle ABD$ 中，$\cos\angle BAD=\dfrac{c^2+\left(\dfrac{2b}{3}\right)^2-b^2}{2c\cdot\dfrac{2b}{3}}$，

在 $\triangle ABC$ 中，$\cos\angle BAC=\dfrac{c^2+b^2-a^2}{2bc}$，所以

$$\frac{c^2+\left(\dfrac{2b}{3}\right)^2-b^2}{2c\cdot\dfrac{2b}{3}}=\frac{c^2+b^2-a^2}{2bc}.$$

整理得 $6a^2+3c^2=11b^2$，下同方法 1.

本视角还可以有以下方法，具体解题过程不再赘述.

方法 5 $\triangle BDC$ 与 $\triangle ABC$ 有公共角 C，则 $\cos\angle BCD=\cos\angle BCA$.

方法 6 $\triangle ABD$ 与 $\triangle BDC$ 有一对互补角，$\angle ADB+\angle BDC=\pi$，则 $\cos\angle BDA=-\cos\angle BDC$.

评注 视角 2 的思路与视角 1 的思路类似，都是着力去寻找到用边表示 $\cos\angle ABC$ 的表达式，区别之处在于视角 2 结合了 $\triangle ABC$，$\triangle BDC$，$\triangle ABD$ 之间的角度关系，利用相等或互补关系进行转化.这种方法是解决含多个三角形问题的常用方法.

视角 3 利用向量的工具性，建立方程.

方法 7 因为 $AD=2DC$，所以 $\overline{BD}=\dfrac{1}{3}\overline{BA}+\dfrac{2}{3}\overline{BC}$.

又因为 $|\overline{BD}|=b$，所以 $b^2=\dfrac{1}{9}\overline{BA}^2+\dfrac{4}{9}\overline{BA}\cdot\overline{BC}+\dfrac{4}{9}\overline{BC}^2=\dfrac{1}{9}c^2+\dfrac{4}{9}c\cdot a\cos\angle ABC+\dfrac{4}{9}a^2$，所以 $\cos\angle ABC=\dfrac{9b^2-c^2-4a^2}{4ac}$.

又因为 $\triangle ABC$ 中，$\cos\angle ABC=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，

所以 $\dfrac{9b^2-c^2-4a^2}{4ac}=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，整理得 $6a^2+3c^2=11b^2$.下同方法 1.

评注 向量是高中数学的基础知识，也是解决诸多问题的有力工具，可解决三角形中的角和长度问题.本题即利用向量的模得到一个等量关系.

视角 4 利用化归与转化思想，把斜三角形化为直角三角形，建立方程.

方法 8 如图 4，过点 A 作 $AN\perp BC$ 于点 N，过点 D 作 $DM\perp BC$ 于点 M，设 $BN=x$，$CM=y$.则 $CN=3y$.

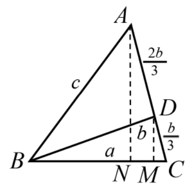

图 4

在 $\triangle ABN$ 和 $\triangle ACN$ 中，由勾股定理得 $c^2-x^2=b^2-(3y)^2$，即 $c^2-b^2=x^2-(3y)^2=(x+3y)(x-3y)$ ④.

由 $BC=BN+NC$，得 $x+3y=a$ ⑤.

在 $\triangle DMC$ 中，$DM^2=DC^2-CM^2=\dfrac{b^2}{9}-y^2$.

在 $\triangle BDN$ 中，$BD^2=DM^2+BM^2$，得 $b^2=\dfrac{b^2}{9}-y^2+(x+2y)^2$，即 $\dfrac{8b^2}{9}=x^2+4xy+3y^2=(x+y)(x+3y)$ ⑥.

把 ⑤ 式分别代入 ④ 和 ⑥ 可得 $x-3y=\dfrac{c^2-b^2}{a}$ ⑦，$x+y=\dfrac{8b^2}{9a}$ ⑧.

联立方程 $\begin{cases}x+3y=a,\\ x-3y=\dfrac{c^2-b^2}{a},\\ x+y=\dfrac{8b^2}{9a},\\ b^2=ac,\end{cases}$ 消去 x，y 得 $6a^2+3c^2=11ac$.下同方法 1.

评注 一般地，在含多个三角形的复杂图形中，从直角三角形入手会比较简单，因此往往把斜三角形问题转化为直角三角形问题进行处理.

视角 5　利用海伦公式,建立方程.

方法 9　$\triangle ABD$ 的三边为 $c,b,\frac{2b}{3}$,记 $p=\frac{c+b+\frac{2b}{3}}{2}=\frac{c+\frac{5b}{3}}{2}$,则 $\triangle ABD$ 的面积为

$$S_1=\sqrt{p(p-c)(p-b)\left(p-\frac{2b}{3}\right)}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{c+\frac{5b}{3}}{2}\right)\left(\frac{\frac{5b}{3}-c}{2}\right)\left(\frac{c-\frac{b}{3}}{2}\right)\left(\frac{c+\frac{b}{3}}{2}\right)}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{\left(\frac{25b^2}{9}-c^2\right)\left(c^2-\frac{b^2}{9}\right)},$$

同理可得 $\triangle BDC$ 的面积为

$$S_2=\sqrt{\left(\frac{a+\frac{4b}{3}}{2}\right)\left(\frac{\frac{4b}{3}-a}{2}\right)\left(\frac{a+\frac{2b}{3}}{2}\right)\left(\frac{a-\frac{2b}{3}}{2}\right)}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{\left(\frac{16b^2}{9}-a^2\right)\left(a^2-\frac{4b^2}{9}\right)}.$$

又因为 $AD=2DC$,所以 $S_1=2S_2$,得

$$\frac{1}{4}\sqrt{\left(\frac{25b^2}{9}-c^2\right)\left(c^2-\frac{b^2}{9}\right)}$$

$$=2\times\frac{1}{4}\sqrt{\left(\frac{16b^2}{9}-a^2\right)\left(a^2-\frac{4b^2}{9}\right)},$$

整理得 $(25b^2-9c^2)(9c^2-b^2)=4(16b^2-9a^2)(9a^2-4b^2)$.将 $b^2=ac$ 代入得

$(25ac-9c^2)(9c^2-ac)=4(16ac-9a^2)(9a^2-4ac)$,解得 $a=\frac{c}{3}$ 或 $a=\frac{3}{2c}$.下同方法 1.

评注　由已知条件得 $\triangle ABD$ 与 $\triangle BDC$ 面积的关系,又因为要研究三角形三边的关系,故考虑利用海伦公式.

3　教学启示

由以上解答视角不难看出,本题解题的切入点较多,很好地考查了解三角形的有关知识及思想方法,是一道质量较高的选拔性试题.学生的思路不顺畅也告诫我们,教师在教学过程中可引导学生多角度去思考问题.“横看成岭侧成峰,远近高低各不同”,每一种解法背后都有一个故事.教师在展示解法的同时,多让学生去领会其中渗透的数学思想方法,揭示蕴含的数学本质,积累解题经验,从而发展学生的核心素养.

(上接第 3 页)

要有兴趣,数学就会变得迥然不同.各种不同现象背后都有一个本质的联系,如果能找到这种联系,你就会感受到数学无尽的魅力.”他希望,通过我们一起努力,不仅要让我们的孩子们取得优异的数学成绩,更期望他们喜欢数学,觉得数学是有趣的、是漂亮的.

第三层含义是数学教育回到数学的“大家庭”.在 ICME 14 大会期间(7 月 12 日),中国数学会数学教育分会在华东师范大学召开了成立大会,第一届理事长由中国数学会理事长田刚院士兼任,很多的数学家和数学教育研究者是其常务理事,这意味着数学教育与数学将成为名副其实的“一家亲”.

其实,数学与数学教育从来都是不可能“分家”的.但由于数学教育,特别是基础教育所受到的各方面影响因素众多,以至于在世界各国的教育改革历程中都出现了一些像已故的张奠宙先生所说的“去数学化”的现象.我相信,通过数学教育的“回家”,可以让中小学的数学教育更好地回归数学本质,聚焦数学核心素养.

参考文献

[1] 顾泠沅.教学实验论——青浦实验的方法学与教学原理研究[M].北京:教育科学出版社,1994:162-178.
[2] 顾泠沅,周伟灿.运用尝试指导和效果回授等心理效应改革初中一年级数学教学的实验报告[J].教育科研情况交流,1983(2):9-19.
[3] 顾泠沅.利用变式图形进行几何概念教学的效果分析一例[J].教育科研情况交流,1982(5):34-37.
[4] 鲍建生,黄荣金,易凌峰,顾泠沅.变式教学研究[J].数学教学,2003(1):11-12.
[5] 鲍建生,黄荣金,易凌峰,顾泠沅.变式教学研究(续)[J].数学教学,2003(2):6-10,23.
[6] 鲍建生,黄荣金,易凌峰,顾泠沅.变式教学研究(再续)[J].数学教学,2003(3):6-12.
[7] 顾非石,顾泠沅.数学教师专门化的上海范例[J].现代教学,2016(21):13-15.
[8] Cartier P,Dhombres J,Heinzmann G,Villani C.Freedom in Mathematics[M].New Delhi:Springer India,2016.