

江苏省仪征中学 2021-2022 学年度第一学期高三数学学科导学案

§7.4 空间位置关系的综合问题

研制人：雷成才 审核人：陈宏强

班级：_____ 姓名：_____ 学号：_____ 授课日期：_____

- ①借助长方体，通过直观感知，了解空间中直线与直线、直线与平面、平面与平面的平行和垂直的关系，归纳出以下性质定理，并加以证明。
- ②能运用公理、定理证明一些空间图形的位置关系和计算一些数量关系。

课前热身

1. 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， $AB=BC=2$ ， AC_1 与平面 BB_1C_1C 所成的角为 30° ，则该长方体的体积为（ ）

- A. 8 B. $6\sqrt{2}$ C. $8\sqrt{2}$ D. $8\sqrt{3}$

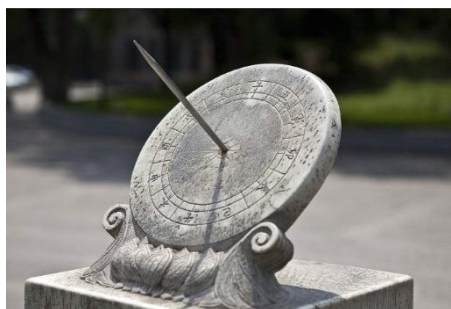
【答案】C

2. 已知直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中， $\angle ABC=120^\circ$ ， $AB=2$ ， $BC=CC_1=1$ ，则异面直线 AB_1 与 BC_1 所成角的余弦值为（ ）

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{15}}{5}$ C. $\frac{\sqrt{10}}{5}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

【答案】C

3. 日晷是中国古代用来测定时间的仪器，利用与晷面垂直的晷针投射到晷面的影子来测定时间．把地球看成一个球(球心记为 O)，地球上一点 A 的纬度是指 OA 与地球赤道所在平面所成角，点 A 处的水平面是指过点 A 且与 OA 垂直的平面.在点 A 处放置一个日晷，若晷面与赤道所在平面平行，点 A 处的纬度为北纬 40° ，则晷针与点 A 处的水平面所成角为（ ）



A. 20°

B. 40°

C. 50°

D. 90°

【答案】B

4. (多选) α, β 是两个平面, m, n 是两条直线, 有下列四个命题, 其中正确的命题有 ()

A. 如果 $m \perp n, m \perp \alpha, n \parallel \beta$, 那么 $\alpha \perp \beta$.

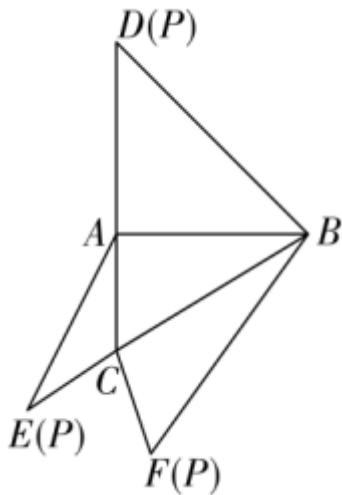
B. 如果 $m \perp \alpha, n \parallel \alpha$, 那么 $m \perp n$.

C. 如果 $\alpha \parallel \beta, m \subset \alpha$, 那么 $m \parallel \beta$.

D. 如果 $m \parallel n, \alpha \parallel \beta$, 那么 m 与 α 所成的角和 n 与 β 所成的角相等.

【答案】BCD

5. (2020 年全国卷 I 16) 如图, 在三棱锥 $P-ABC$ 的平面展开图中, $AC=1, AB=AD=\sqrt{3}, AB \perp AC, AB \perp AD, \angle CAE=30^\circ$, 则 $\cos \angle FCB=$ _____.



【答案】 $-\frac{1}{4}$

6. a, b 为空间中两条互相垂直的直线, 等腰直角三角形 ABC 的直角边 AC 所在直线与 a, b 都垂直, 斜

边 AB 以直线 AC 为旋转轴旋转，有下列结论：

①当直线 AB 与 a 成 60° 角时， AB 与 b 成 30° 角；

②当直线 AB 与 a 成 60° 角时， AB 与 b 成 60° 角；

③直线 AB 与 a 所成角的最小值为 45° ；

④直线 AB 与 a 所成角的最大值为 60° 。

其中正确的是_____。

【答案】②③

知识梳理

1. 定理知识体系

2. 综合法求角步骤

典例研究

考点一 多面体中平行与垂直关系的证明

例 1. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为矩形，平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$ ， $PA \perp PD$ ， $PA = PD$ ， E ， F 分别为 AD ， PB 的中点。

(1)求证： $PE \perp BC$ ；

(2)求证：平面 $PAB \perp$ 平面 PCD ；

(3)求证： $EF \parallel$ 平面 PCD 。

证明 (1)因为 $PA = PD$ ， E 为 AD 的中点，

所以 $PE \perp AD$ 。

因为底面 $ABCD$ 为矩形，

所以 $BC \parallel AD$ 。

所以 $PE \perp BC$ 。

(2)因为底面 $ABCD$ 为矩形，

所以 $AB \perp AD$ 。

又因为平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, 平面 $PAD \cap$ 平面 $ABCD = AD$, $AB \subset$ 平面 $ABCD$,

所以 $AB \perp$ 平面 PAD .

又 $PD \subset$ 平面 PAD , 所以 $AB \perp PD$.

又因为 $PA \perp PD$, 且 $PA \cap AB = A$,

所以 $PD \perp$ 平面 PAB . 又 $PD \subset$ 平面 PCD ,

所以平面 $PAB \perp$ 平面 PCD .

(3)如图, 取 PC 中点 G , 连接 FG , DG .

因为 F , G 分别为 PB , PC 的中点 ,

所以 $FG \parallel BC$, $FG = \frac{1}{2}BC$.

因为 $ABCD$ 为矩形 , 且 E 为 AD 的中点 ,

所以 $DE \parallel BC$, $DE = \frac{1}{2}BC$.

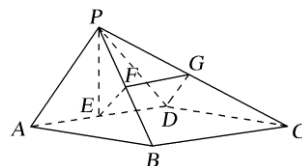
所以 $DE \parallel FG$, $DE = FG$.

所以四边形 $DEFG$ 为平行四边形.

所以 $EF \parallel DG$.

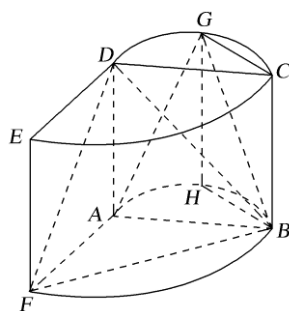
又因为 $EF \not\subset$ 平面 PCD , $DG \subset$ 平面 PCD ,

所以 $EF \parallel$ 平面 PCD .



考点二 空间位置关系与几何体的度量计算

例 2. 如图, 几何体是由半个圆柱及 $\frac{1}{4}$ 个圆柱拼接而成, 其中 G , H 分别为 $\widehat{CD}$ 与 $\widehat{AB}$ 的中点, 四边形 $ABCD$ 为正方形.



(1)证明: 平面 $DFB \perp$ 平面 $GCBH$;

(2)若 $AB = 2\sqrt{2}$, 求三棱锥 $E - ABG$ 的体积.

(1)证明 由题意知 $\angle ABF = \frac{\pi}{4}$, 因为 H 为 $\widehat{AB}$ 的中点 ,

所以 $\angle ABH = \frac{\pi}{4}$, 故 $\angle HBF = \frac{\pi}{2}$,

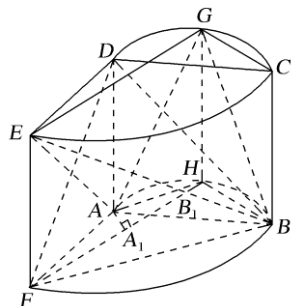
即 $BF \perp BH$.

又因为 $BC \perp$ 平面 ABF , $BF \subset$ 平面 ABF , 所以 $BC \perp BF$,

又因为 $BC \cap BH = B$, 所以 $BF \perp$ 平面 $GCBH$,

因为 $BF \subset$ 平面 DFB , 所以平面 $DFB \perp$ 平面 $GCBH$.

(2)解 连接 AH , AE , BE , EG , FH , 如图所示 , 由图知 ,



几何体的体积是 $V_{E-ABG} = V_{A-EFHG} + V_{B-EFHG} - V_{F-ABE} - V_{H-ABG} = V_{A-EFHG} +$

$V_{B-EFHG} - V_{E-ABF} - V_{G-ABH}$,

因为 $AB = 2\sqrt{2}$, 所以 $BF = 4$, $BH = 2$,

由(1)知 $BF \perp BH$, 所以 $FH = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$,

过点 A , B 分别作 FH 的垂线 , 垂足分别为 A_1 , B_1 , 则 $AA_1 \perp$ 平面 $EFHG$, $BB_1 \perp$ 平面 $EFHG$.

计算得 $AA_1 = \frac{AF \cdot AH \sin \frac{3\pi}{4}}{FH} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$,

$BB_1 = \frac{BH \cdot BF}{FH} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$,

所以 $V_{A-EFHG} + V_{B-EFHG} = \frac{1}{3} \times 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{5} \times \left(\frac{2\sqrt{5}}{5} + \frac{4\sqrt{5}}{5} \right) = 8\sqrt{2}$,

又 $V_{E-ABF} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = \frac{8\sqrt{2}}{3}$,

$V_{G-ABH} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times 2\sqrt{2} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$,

所以 $V_{E-ABG} = 8\sqrt{2} - \frac{8\sqrt{2}}{3} - \frac{4\sqrt{2}}{3} = 4\sqrt{2}$.

考点三 综合法求角

例 3. 如图, 已知三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$, 平面 $A_1ACC_1 \perp$ 平面 ABC , $\angle ABC = 90^\circ$, $\angle BAC = 30^\circ$, $A_1A = A_1C = AC$, E, F 分别是 AC, A_1B_1 的中点.

(1) 证明: $EF \perp BC$;

(2) 求直线 EF 与平面 A_1BC 所成角的余弦值.

(1) 证明 如图, 连接 A_1E .

因为 $A_1A = A_1C$, E 是 AC 的中点,

所以 $A_1E \perp AC$.

又平面 $A_1ACC_1 \perp$ 平面 ABC , $A_1E \subset$ 平面 A_1ACC_1 , 平面 $A_1ACC_1 \cap$ 平面 $ABC = AC$,

所以 $A_1E \perp$ 平面 ABC ,

又 $BC \subset$ 平面 ABC ,

则 $A_1E \perp BC$.

又因为 $A_1F \parallel AB$, $\angle ABC = 90^\circ$, 故 $BC \perp A_1F$.

又 $A_1E \cap A_1F = A_1$, $A_1E, A_1F \subset$ 平面 A_1EF ,

所以 $BC \perp$ 平面 A_1EF .

又 $EF \subset$ 平面 A_1EF , 因此 $EF \perp BC$.

(2) 解 如图, 取 BC 的中点 G , 连接 EG, GF , 则四边形 $EGFA_1$ 是平行四边形.

由于 $A_1E \perp$ 平面 ABC , $EG \subset$ 平面 ABC , 故 $A_1E \perp EG$,

所以平行四边形 $EGFA_1$ 为矩形.

由(1)得 $BC \perp$ 平面 $EGFA_1$, 又 $BC \subset$ 平面 A_1BC ,

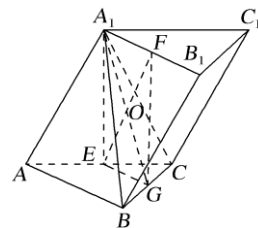
则平面 $A_1BC \perp$ 平面 $EGFA_1$,

所以 EF 在平面 A_1BC 上的射影在直线 A_1G 上.

连接 A_1G 交 EF 于点 O ,

则 $\angle EOG$ 是直线 EF 与平面 A_1BC 所成的角(或其补角).

不妨设 $AC = 4$, 则在 $\text{Rt}\triangle A_1EG$ 中, $A_1E = 2\sqrt{3}$, $EG = \sqrt{3}$.



由于 O 为 A_1G 的中点, 故 $EO = OG = \frac{A_1G}{2} = \frac{\sqrt{15}}{2}$,

$$\text{所以 } \cos \angle EOG = \frac{EO^2 + OG^2 - EG^2}{2EO \cdot OG} = \frac{3}{5}.$$

因此, 直线 EF 与平面 A_1BC 所成角的余弦值是 $\frac{3}{5}$.

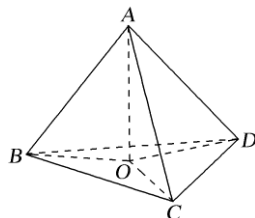
课堂小结

跟踪反馈

1. 在空间四边形 $ABCD$ 中, 若 $AB \perp CD$, $BC \perp AD$, 则对角线 AC 与 BD 的位置关系为()

- A. 相交但不垂直 B. 垂直但不相交
C. 不相交也不垂直 D. 无法判断

解析 如图所示, 作 $AO \perp$ 平面 BCD , 又 $CD \subset$ 平面 BCD , $\therefore AO \perp CD$, 又知 $AB \perp CD$, $AB \cap AO = A$, $\therefore CD \perp$ 平面 ABO . 又 $OB \subset$ 平面 ABO , $\therefore CD \perp OB$, 同理可得 $OD \perp BC$, $\therefore O$ 为 $\triangle BCD$ 的垂心, $\therefore OC \perp BD$. 又知 $AO \perp BD$, $AO \cap OC = O$, $\therefore BD \perp$ 平面 AOC . 又 $AC \subset$ 平面 AOC , $\therefore BD \perp AC$. 又 AC 与 BD 是异面直线, 所以 AC 与 BD 垂直但不相交, 故选 B.



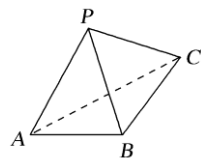
答案 B

2. 已知 P 为 $\triangle ABC$ 所在平面外一点, 且 PA, PB, PC 两两垂直, 有下列结论: ① $PA \perp BC$; ② $PB \perp AC$;

③ $PC \perp AB$; ④ $AB \perp BC$. 其中正确的是()

- A. ①②③ B. ①②④
C. ②③④ D. ①②③④

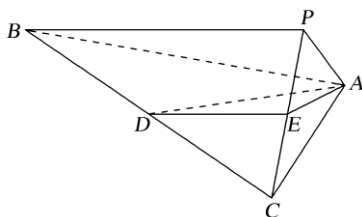
解析 如图, 因为 $PA \perp PB$, $PA \perp PC$, $PB \cap PC = P$, 且 $PB \subset$ 平面 PBC , $PC \subset$ 平面 PBC , 所以 $PA \perp$ 平面 PBC . 又 $BC \subset$ 平面 PBC , 所以 $PA \perp BC$, 同理可得 $PB \perp AC$, $PC \perp AB$, 故 ①②③ 正确.



答案 A

3. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle CAB = 90^\circ$, $AC = 1$, $AB = \sqrt{3}$. 将 $\triangle ABC$ 绕 BC 旋转, 使得点 A 转到点 P , 如图. 若 D 为

BC 的中点, E 为 PC 的中点, $AE = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 则 AB 与平面 ADE 所成角的正弦值是()



A. $\frac{\sqrt{3}}{8}$

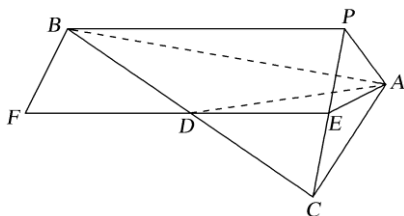
B. $\frac{\sqrt{3}}{6}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{4}$

D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

解析 因为 D, E 分别是 BC 和 PC 的中点, 所以 $DE \parallel PB$, 又 $\angle CAB = 90^\circ$, 所以 $DE \perp PC$, 又 $AC = 1$, $CE = \frac{1}{2}$, $AE = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 所以 $AE^2 + CE^2 = AC^2$, 即 $AE \perp PC$, 又 $DE \cap AE = E$, 所以 $PC \perp$ 平面 ADE , 如图, 延长 ED 至 F , 使得 $EF = PB$, 连接 BF , 所以 $BF \perp$ 平面 AED , 连接 AF , 所以 $\angle BAF$ 为 AB 与平面 ADE 所成的

角, 所以 $\sin \angle BAF = \frac{BF}{AB} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$.



答案 B

4. 如图, 点 N 为正方形 $ABCD$ 的中心, $\triangle ECD$ 为正三角形, 平面 $ECD \perp$ 平面 $ABCD$, M 是线段 ED 的中点, 则()

A. $BM = EN$, 且直线 BM, EN 是相交直线

B. $BM \neq EN$, 且直线 BM, EN 是相交直线

C. $BM = EN$, 且直线 BM, EN 是异面直线

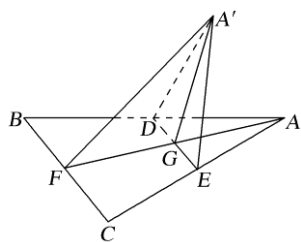
D. $BM \neq EN$, 且直线 BM, EN 是异面直线

解析 取 CD 的中点 O , 连接 ON, EO , 因为 $\triangle ECD$ 为正三角形, 所以 $EO \perp CD$, 又平面 $ECD \perp$ 平面 $ABCD$, 平面 $ECD \cap$ 平面 $ABCD = CD$, $EO \subset$ 平面 ECD , 所以 $EO \perp$ 平面 $ABCD$. 设正方形 $ABCD$ 的边长为 2, 则 $EO = \sqrt{3}$, $ON = 1$, 所以 $EN^2 = EO^2 + ON^2 = 4$, 得 $EN = 2$. 过 M 作 CD 的垂线, 垂足为 P , 连接 BP , 则 $MP = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $CP = \frac{3}{2}$, 所以 $BM^2 = MP^2 + BP^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2^2 = 7$, 得 $BM = \sqrt{7}$, 所以 $BM \neq EN$. 连接 BD, BE , 因为四边形 $ABCD$ 为正方形, 所以 N 为 BD 的中点, 即 EN, MB 均在平面 BDE 内, 所以直线 BM, EN 是相交直线, 故选 B.

答案 B

5. 如图, 正三角形 ABC 的中线 AF 与中位线 DE 相交于点 G , 已知 $\triangle A'DE$ 是 $\triangle ADE$ 绕直线 DE 翻折过程中的一个图形, 现给出下列命题:

①恒有直线 $BC \parallel$ 平面 $A'DE$; ②恒有直线 $DE \perp$ 平面 $A'FG$; ③恒有平面 $A'FG \perp$ 平面 $A'DE$, 其中正确命题的个数为()



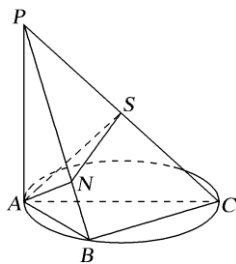
A.0 B.1 C.2 D.3

解析 对于①, $\because DE$ 为 $\triangle ABC$ 的中位线, $\therefore DE \parallel BC$, 又知 $DE \subset$ 平面 $A'DE$, $BC \not\subset$ 平面 $A'DE$, $\therefore BC \parallel$ 平面 $A'DE$, 故①正确; 对于②, $\because \triangle ABC$ 为等边三角形, AF 为 BC 边上的中线, $\therefore BC \perp AF$, 又知 $DE \parallel BC$, $\therefore DE \perp AF$, $\therefore DE \perp FG$, 根据翻折的性质可知, $DE \perp A'G$, 又 $A'G \cap FG = G$, $\therefore DE \perp$ 平面 $A'FG$, 故②正确; 对于③, 由②知 $DE \perp$ 平面 $A'FG$, 又知 $DE \subset$ 平面 $A'DE$, $\therefore$ 平面 $A'FG \perp$ 平面 $A'DE$, 故③正确. 综上, 正确的命题为①②③.

答案 D

6. (多选) 如图, $AC = 2R$ 为圆 O 的直径, $\angle PCA = 45^\circ$, PA 垂直于圆 O 所在的平面, B 为圆周上不与点 A 、 C 重合的点, $AS \perp PC$ 于 S , $AN \perp PB$ 于 N , 则下列说法正确的有()

- A. 平面 $ANS \perp$ 平面 PBC
- B. 平面 $ANS \perp$ 平面 PAB
- C. 平面 $PAB \perp$ 平面 PBC
- D. 平面 $ABC \perp$ 平面 PAC



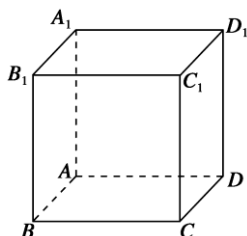
解析 $\because PA \perp$ 平面 ABC , $BC \subset$ 平面 ABC , $\therefore PA \perp BC$,
又 AC 为圆 O 直径, 所以 $AB \perp BC$,
又 $PA \cap AB = A$, $\therefore BC \perp$ 平面 PAB ,
又 $AN \subset$ 平面 ABP , $\therefore BC \perp AN$,
又 $AN \perp PB$, $BC \cap PB = B$, $\therefore AN \perp$ 平面 PBC ,
又 $PC \subset$ 平面 PBC , $\therefore AN \perp PC$,
又 $\because PC \perp AS$, $AS \cap AN = A$, $\therefore PC \perp$ 平面 ANS ,

又 $PC \subset \text{平面 } PBC$, $\therefore \text{平面 } ANS \perp \text{平面 } PBC$,

$\therefore A$ 正确, C, D 显然正确, 故选 ACD .

答案 ACD

7. (多选) 在如图所示的棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 P 在侧面 BCC_1B_1 所在的平面上运动, 则下列命题中正确的为(ABD)

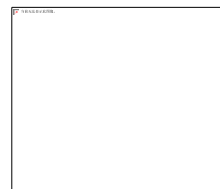


- A. 若点 P 总满足 $PA \perp BD_1$, 则动点 P 的轨迹是一条直线
- B. 若点 P 到点 A 的距离为 $\sqrt{2}$, 则动点 P 的轨迹是一个周长为 2π 的圆
- C. 若点 P 到直线 AB 的距离与到点 C 的距离之和为 1, 则动点 P 的轨迹是椭圆
- D. 若点 P 到直线 AD 与直线 CC_1 的距离相等, 则动点 P 的轨迹是双曲线

8. 如图所示, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 底面 $ABCD$, 且底面各边都相等, M 是 PC 上的一动点, 当点 M 满足_____时, 平面 $MBD \perp$ 平面 PCD (只要填写一个你认为是正确的条件即可).

解析 连接 AC, BD , 则 $AC \perp BD$, 因为 $PA \perp$ 底面 $ABCD$, $BD \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $PA \perp BD$. 又 $PA \cap AC = A$, 所以 $BD \perp$ 平面 PAC , $PC \subset$ 平面 PAC , 所以 $BD \perp PC$. 所以当 $DM \perp PC$ (或 $BM \perp PC$) 时, 即有 $PC \perp$ 平面 MBD . 而 $PC \subset$ 平面 PCD , 所以平面 $MBD \perp$ 平面 PCD .

答案 $DM \perp PC$ (或 $BM \perp PC$)



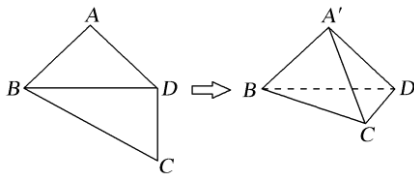
9. (多填题) 如图, 已知 $\angle BAC = 90^\circ$, $PC \perp$ 平面 ABC , 则在 $\triangle ABC$, $\triangle PAC$ 的边所在的直线中, 与 PC 垂直的直线有_____; 与 AP 垂直的直线有_____.

解析 因为 $PC \perp$ 平面 ABC , 所以 PC 垂直于直线 AB, BC, AC . 因为 $AB \perp AC$, $AB \perp PC$, $AC \cap PC = C$, 所以 $AB \perp$ 平面 PAC , 又因为 $AP \subset$ 平面 PAC , 所以 $AB \perp AP$, 与 AP 垂直的直线是 AB .

答案 AB, BC, AC AB

10. 如图所示, 在四边形 $ABCD$ 中, $AB = AD = CD = 1$, $BD = \sqrt{2}$, $BD \perp CD$, 将四边形 $ABCD$ 沿对角线 BD

折成四面体 $A'BCD$ ，使平面 $A'BD \perp$ 平面 BCD ，则下列结论正确的是_____ (填序号).



① $A'C \perp BD$ ；② $\angle BA'C = 90^\circ$ ；③ 四面体 $A'BCD$ 的体积为 $\frac{1}{6}$.

解析 $\because BD \perp CD$ ，平面 $A'BD \perp$ 平面 BCD ，平面 $A'BD \cap$ 平面 $BCD = BD$ ， $CD \subset$ 平面 BCD ，
 $\therefore CD \perp$ 平面 $A'BD$ ，又 $A'D \subset$ 平面 $A'BD$ ， $\therefore CD \perp A'D$.

$\because AB = AD = CD = 1$ ， $BD = \sqrt{2}$ ，

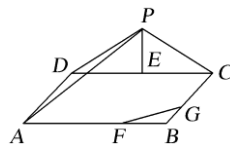
$\therefore A'C = \sqrt{2}$ ， $BC = \sqrt{3}$ ， $\therefore A'B^2 + A'C^2 = BC^2$ ，

$\therefore A'B \perp A'C$ ，即 $\angle BA'C = 90^\circ$ ，

四面体 $A'BCD$ 的体积 $V = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1^2 \times 1 = \frac{1}{6}$.

答案 ②③

11. 如图，三角形 PDC 所在的平面与长方形 $ABCD$ 所在的平面垂直， $PD = PC = 4$ ，
 $AB = 6$ ， $BC = 3$. 点 E 是 CD 边的中点，点 F, G 分别在线段 AB, BC 上，且 $AF = 2FB$ ，
 $CG = 2GB$.



(1) 证明： $PE \perp FG$.

(2) 求二面角 $P - AD - C$ 的正切值.

(3) 求直线 PA 与直线 FG 所成角的余弦值.

(1) 证明 因为 $PD = PC$ 且点 E 为 CD 的中点，

所以 $PE \perp DC$.

又平面 $PDC \perp$ 平面 $ABCD$ ，且平面 $PDC \cap$ 平面 $ABCD = CD$ ， $PE \subset$ 平面 PDC ，所以 $PE \perp$ 平面 $ABCD$ ，

又 $FG \subset$ 平面 $ABCD$ ，所以 $PE \perp FG$.

(2) 解 由(1)知 $PE \perp$ 平面 $ABCD$ ， $\therefore PE \perp AD$ ，

又 $AD \perp CD$ ， $PE \cap CD = E$ ，

$\therefore AD \perp$ 平面 PDC ， $\therefore AD \perp PD$ ，

$\therefore \angle PDC$ 为二面角 $P - AD - C$ 的平面角，

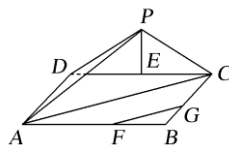
在 $\text{Rt}\triangle PDE$ 中， $PD = 4$ ， $DE = 3$ ，

$$\therefore PE = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}, \therefore \tan \angle PDC = \frac{PE}{DE} = \frac{\sqrt{7}}{3}.$$

故二面角 $P - AD - C$ 的正切值为 $\frac{\sqrt{7}}{3}$.

(3)解 如图, 连接 AC , $\because AF = 2FB, CG = 2GB, \therefore AC \parallel FG$.

$\therefore$ 直线 PA 与 FG 所成角即直线 PA 与 AC 所成角 $\angle PAC$.



在 $\text{Rt}\triangle PDA$ 中, $PA^2 = AD^2 + PD^2 = 25, \therefore PA = 5$.

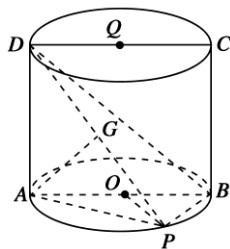
又 $PC = 4$.

$$AC^2 = CD^2 + AD^2 = 36 + 9 = 45, \therefore AC = 3\sqrt{5}.$$

$$\text{又 } \cos \angle PAC = \frac{PA^2 + AC^2 - PC^2}{2PA \cdot AC} = \frac{25 + 45 - 16}{2 \times 5 \times 3\sqrt{5}} = \frac{9}{25}\sqrt{5}.$$

所以直线 PA 与直线 FG 所成角的余弦值为 $\frac{9\sqrt{5}}{25}$.

12. 如图, 圆柱 OQ 的上, 下底面圆的圆心分别为 Q, O , 四边形 $ABCD$ 是圆柱 OQ 的轴截面, 点 P 在圆柱 OQ 的下底面圆周上, G 是 DP 的中点, 圆柱 OQ 的底面圆的直径 $AB = 4$, 母线 $AD = AP = 2\sqrt{3}$. 求证: $AG \perp BD$.



[证明] (1)证法 1: $\because AD = 2CD, \angle ADC = 60^\circ$,

$\therefore DC \perp AC$, 又 $AA_1 \perp$ 平面 ABC , $\therefore AA_1 \perp DC$.

$\therefore DC \perp$ 平面 AA_1C_1C , 又 $AC_1 \subset$ 平面 AA_1C_1C ,

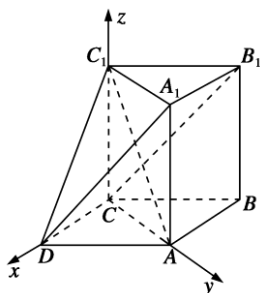
$\therefore DC \perp AC_1$,

$\because AA_1 = AC$, $\therefore$ 四边形 AA_1C_1C 为菱形, $\therefore AC_1 \perp A_1C$,

而 $DC \cap A_1C = C$, $\therefore AC_1 \perp$ 平面 A_1B_1CD .

证法 2: $\because AD = 2CD, \angle ADC = 60^\circ$,

$\therefore \angle ACD = 90^\circ$, 则 CD, CA, CC_1 两两垂直. 如图, 建立空间直角坐标系 $C-xyz$.



不妨设 $CD=1$, 则 $C(0,0,0)$, $D(1,0,0)$, $A(0, \sqrt{3}, 0)$, $C_1(0,0, \sqrt{3})$, $A_1(0, \sqrt{3}, \sqrt{3})$.

$$\therefore \vec{AC_1} = (0, -\sqrt{3}, \sqrt{3}), \vec{CD} = (1, 0, 0), \vec{CA_1} = (0, \sqrt{3}, \sqrt{3}).$$

$$\text{易得 } \vec{AC_1} \cdot \vec{CD} = 0, \vec{AC_1} \cdot \vec{CA_1} = 0.$$

$$\therefore AC_1 \perp CD, AC_1 \perp CA_1, \text{ 又 } \because CD \cap CA_1 = C,$$

$$\therefore AC_1 \perp \text{平面 } A_1B_1CD.$$

(2)证法 1: $\because AD=AP$, 又 G 是 DP 的中点,

$$\therefore AG \perp DP. \quad \text{①}$$

$$\because AB \text{ 为圆 } O \text{ 的直径}, \therefore AP \perp BP,$$

易知 $DA \perp$ 底面 ABP , $\therefore DA \perp BP$, 而 $AD \cap AP = A$,

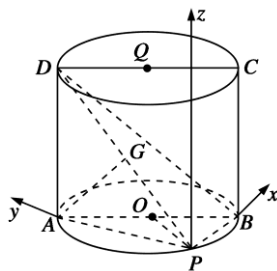
$$\therefore BP \perp \text{平面 } ADP,$$

$$\text{又 } AG \subset \text{平面 } ADP, \therefore BP \perp AG, \quad \text{②}$$

$$\therefore \text{由①②可知: } AG \perp \text{平面 } BDP, \text{ 又 } BD \subset \text{平面 } BDP,$$

$$\therefore AG \perp BD.$$

证法 2: $\because AB$ 为 $\odot O$ 的直径, $\therefore PA \perp PB$, 如图建立空间直角坐标系,



由题意知 $P(0,0,0)$, $A(0,2\sqrt{3}, 0)$, $B(2,0,0)$, $D(0,2\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$, $G(0, \sqrt{3}, \sqrt{3})$,

$$\therefore \vec{AG} = (0, -\sqrt{3}, \sqrt{3}), \vec{BD} = (-2, 2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}),$$

$$\therefore \vec{AG} \cdot \vec{BD} = 0, \text{ 即 } AG \perp BD.$$