

江苏省仪征中学 2020—2021 学年度第一学期高二数学

周末练习 (2)

2020.9.19

一、选择题 (本大题共 8 小题, 共 40.0 分)

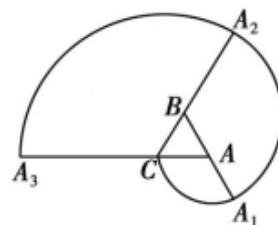
1. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_1 + a_3 + a_5 = 6$, $a_1 + a_2^2 = -3$, 则 a_{11} 的值为()
A. 20 B. 22 C. 24 D. 26
2. 已知正项数列 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列, 若 a_1, a_3, a_2 成等差数列, 则公比 q 的值为()
A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. $-\frac{1}{2}$ 或 1 D. $\frac{1}{2}$ 或 1
3. 正项等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 + a_4 + a_7 = 2$, $a_3 + a_6 + a_9 = 18$, 则 $\{a_n\}$ 的前 9 项和 $S_9 =$ ()
A. 14 B. 26 C. 30 D. 29
4. 在各项不为零的等差数列 $\{a_n\}$ 中, $2a_{2017} - a_{2018}^2 + 2a_{2019} = 0$, 数列 $\{b_n\}$ 是等比数列, 且 $b_{2018} = a_{2018}$, 则 $\log_2(b_{2017} \cdot b_{2019})$ 的值为()
A. 1 B. 2 C. 4 D. 8
5. 中国古代数学著作《算法统宗》中有这样一个问题: “三百七十八里关, 初行健步不为难, 次日脚痛减一半, 六朝才得至其关, 要见次日行里数, 请公仔细算相还”, 其意思为有一个人走 378 里路, 第一天健步行走, 从第二天起脚痛, 每天走的路程为前一天的一半, 走了 6 天后到达目的地, 请问第二天走了()
A. 96 里 B. 48 里 C. 192 里 D. 24 里
6. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $S_4 = 4$, $S_8 = 16$, 则 $S_{12} =$ ()
A. 64 B. 28 C. 36 D. 52
7. 设等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 a_4, a_3, a_5 成等差数列, 且 $S_k = 33$, $S_{k+1} = -63$, 其中 $k \in \mathbf{N}^*$, 则 k 的值为()
A. 4 B. 5 C. 6 D. 7
8. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足递推关系: $a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n + 1}$, $a_1 = \frac{1}{2}$, 则 $a_{2020} =$ ()
A. $\frac{1}{2018}$ B. $\frac{1}{2019}$ C. $\frac{1}{2020}$ D. $\frac{1}{2021}$

二、不定项选择题 (本大题共 4 小题, 共 20.0 分)

9. 已知数列 $\{a_n\}$ 是等比数列, 有下列四个命题, 其中正确的命题有 ()
A. 数列 $\{|a_n|\}$ 是等比数列 B. 数列 $\{a_n a_{n+1}\}$ 是等比数列
C. 数列 $\{\lg a_n^2\}$ 是等比数列 D. 数列 $\{\frac{1}{a_n}\}$ 是等比数列

10. “泥居壳屋细莫详，红螺行沙夜生光”，是宋代诗人欧阳修对鹦鹉螺的描述. 假设一条螺旋线是用以下方法画成(如图): $\triangle ABC$ 是边长为1的正三角形, 曲线 CA_1 , A_1A_2 , A_2A_3 分别是以 A , B , C 为圆心, AC , BA_1 , CA_2 为半径画的弧, 曲线 $CA_1A_2A_3$ 称为螺旋线, 然后以 A 为圆心, AA_3 为半径画弧.....如此画下去, 则所得弧 CA_1 , A_1A_2 , A_2A_3 , ..., $A_{28}A_{29}$, $A_{29}A_{30}$ 的总长度为 S , 则下列结论正确的是 ()

- A. $S = 310\pi$ B. $CA_1 = \frac{2}{3}\pi$
C. $A_{n-1}A_n = (n-1) \times \frac{2}{3}\pi$ D. $S = 290\pi$



11. 设 $\{a_n\}$ 是等差数列, S_n 是其前 n 项的和, 且 $S_5 < S_6$, $S_6 = S_7 > S_8$, 则下列结论正确的是 ()

- A. $d > 0$ B. $a_7 = 0$
C. $S_9 > S_5$ D. S_6 与 S_7 均为 S_n 的最大值

12. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $a_1 = 5$, $a_n = -\frac{1}{2}a_{n-1} + 6(n \geq 2)$, 若对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$, $1 \leq p(S_n - 4n) \leq 3$ 恒成立, 则实数 p 可能的取值为 ()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

三、填空题 (本大题共 4 小题, 共 20.0 分)

13. 若 $1, a_1, a_2, 4$ 成等差数列, $1, b_1, b_2, b_3, 4$ 成等比数列, 则 $\frac{a_1 - a_2}{b_2}$ 的值等于_____.

14. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $S_n = n^2 + n$, 则 $a_6 =$ _____.

15. 等差数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的前 n 项和分别为 S_n 和 T_n , 若 $\frac{S_n}{T_n} = \frac{3n-2}{2n+1}$, 则 $\frac{a_7}{b_7} =$ _____.

16. 设等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_2 = 5$, $a_6 + a_8 = 30$, 则数列 $\{\frac{1}{a_n^2 - 1}\}$ 的前 n 项和等于_____.

四、解答题 (本大题共 6 小题, 共 70.0 分)

17. 已知数列 $\{a_n\}$ 是公比为 2 的等比数列, 且 $a_2, a_3 + 1, a_4$ 成等差数列.

- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
(2) 记 $b_n = \log_2(a_n + 1)$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

18. 在各项均为正数的等比数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_1=2$, $8a_2+2a_4=a_6$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n=a_n+2n$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

19. 设 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 已知 $a_3=7$, $a_n=2a_{n-1}+a_2-2(n\geq 2)$.

(1) 证明: 数列 $\{a_n+1\}$ 为等比数列;

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式, 并判断 n , a_n , S_n 是否成等差数列.

20. 已知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, $a_3=5, a_7=13$, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且有 $S_n=2b_n-1$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $c_n=a_nb_n$, $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 求 T_n .

21. 某投资理财公司推出一种新型理财方式：客户投入资金按期获得的盈利组成数列 $\{a_n\}$ ，设 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 $\frac{S_{2n}}{S_n}$ 是非零常数，则称数列 $\{a_n\}$ 是“和谐数列”，称该理财方式为“和谐理财”。

(1) 若数列 $\{3^n\}$ 是首项为 3，公比为 3 的等比数列，试判断数列 $\{b_n\}$ 是否为“和谐数列”；

(2) 若数列 $\{c_n\}$ 是首项为 c_1 ，公差为 $d(d \neq 0)$ 的等差数列，且数列 $\{c_n\}$ 是“和谐数列”，试探究 d 与 c_1 之间的等量关系。

22. 数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 满足 $a_1 = a$ ， $b_n = a_{n+1} - a_n$ ， S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 ($n \in \mathbf{N}^*$)。

(1) 设数列 $\{b_n\}$ 是首项和公比都为 $-\frac{1}{3}$ 的等比数列，且数列 $\{a_n\}$ 也是等比数列，求 a 的值；

(2) 若 $a = 3$ 且 $b_n \geq 0$ 对 $n \in \mathbf{N}^*$ 恒成立，求 a_2 的取值范围；

* (3) 设 $a = 4$ ， $b_n = 2$ ， $C_n = \frac{S_n + 2\lambda}{2^n}$ ($n \in \mathbf{N}^*$ ， $\lambda \geq -2$)，若存在整数 k, l ，且 $k > l \geq 2$ ，使得 $C_k = C_l$ 成立，求 λ 的所有可能值。

答案和解析

一、选择题（本大题共 8 小题，共 40.0 分）

1. D 2. B 3. B 4. C 5. A 6. D 7. B 8. D

二、不定项选择题（本大题共 4 小题，共 20.0 分）

9. ABD

10. AB 解：根据弧长公式及题意知，弧 $CA_1, A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-2}A_{n-1}, A_{n-1}A_n$ 的长度分别为 $\frac{2}{3}\pi, 2 \times \frac{2}{3}\pi, 3 \times \frac{2}{3}\pi, \dots, (n-1) \times \frac{2}{3}\pi, n \times \frac{2}{3}\pi$,

此数列是首项为 $\frac{2}{3}\pi$ ，公差为 $\frac{2}{3}\pi$ 的等差数列，

根据等差数列的求和公式，得其前 n 项和 $S_n = n \times \frac{2}{3}\pi + \frac{n(n-1)}{2} \times \frac{2}{3}\pi = \frac{\pi}{3}n(n+1)$ ，

所以所得弧 $CA_1, A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{28}A_{29}, A_{29}A_{30}$ 的总长度为

$$S_{30} = \frac{\pi}{3} \times 30 \times (30+1) = 310\pi. \text{ 故选 AB.}$$

11. BD 解：根据题意， $\{a_n\}$ 是等差数列，若 $S_6 = S_7$ ，则 $S_7 - S_6 = a_7 = 0$ ，故 B 正确；

又由 $S_5 < S_6$ 得 $S_6 - S_5 = a_6 > 0$ ，则有 $d = a_7 - a_6 < 0$ ，故 A 错误；

而 C 选项 $S_9 > S_5$ ，即 $a_6 + a_7 + a_8 + a_9 > 0$ ，可得 $2(a_7 + a_8) > 0$ ，由结论 $a_7 = 0$ ， $a_8 < 0$ ，显然 C 选项是错误的。

$\because S_5 < S_6, S_6 = S_7 > S_8, \therefore S_6$ 与 S_7 均为 S_n 的最大值，故 D 正确；

故选：BD.

12. BC 解：由 $a_n = -\frac{1}{2}a_{n-1} + 6 (n \geq 2)$ ，得 $a_{n+1} - 4 = -\frac{1}{2}(a_n - 4)$ ，

则数列 $\{a_n - 4\}$ 是首项为 $a_1 - 4 = 1$ ，公比为 $-\frac{1}{2}$ 的等比数列，

则 $a_n - 4 = 1 \times (-\frac{1}{2})^{n-1}$ ，即 $a_n = (-\frac{1}{2})^{n-1} + 4$ ，

$$\text{所以 } S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \dots + (-\frac{1}{2})^{n-1} + 4n = \frac{1 \times [1 - (-\frac{1}{2})^n]}{1 - (-\frac{1}{2})} + 4n = \frac{2}{3}[1 - (-\frac{1}{2})^n] + 4n,$$

若 $1 \leq p(S_n - 4n) \leq 3$ 恒成立，则 $1 \leq p \cdot \frac{2}{3}[1 - (-\frac{1}{2})^n] \leq 3$ 恒成立，

令 $b_n = \frac{2}{3}[1 - (-\frac{1}{2})^n]$ ，则易知 $(b_n)_{\max} = b_1 = 1, (b_n)_{\min} = b_2 = \frac{1}{2}$ ，

所以 $\begin{cases} p \leq 3 \\ \frac{1}{2}p \geq 1 \end{cases}$ ，得 $2 \leq p \leq 3$ ，即实数 p 的取值范围为 $[2, 3]$ 。故选 BC.

三、填空题（本大题共 4 小题，共 20.0 分）

13. $-\frac{1}{2}$ 14. 12 15. $\frac{37}{27}$

16. $\frac{n}{4(n+1)}$ 解：由题意知 $a_6 + a_8 = 2a_7 = 30$ ，则 $a_7 = 15$ ，

设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ，则 $d = \frac{a_7 - a_2}{7 - 2} = 2$ ，

所以 $a_n = a_2 + (n-2)d = 2n+1$ ，则 $\frac{1}{a_n^2 - 1} = \frac{1}{(2n+1)^2 - 1} = \frac{1}{4n(n+1)} = \frac{1}{4}(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})$ ，

于是数列 $\{\frac{1}{a_n^2 - 1}\}$ 的前 n 项和为 $\frac{1}{4}[(1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}] = \frac{1}{4}(1 - \frac{1}{n+1}) = \frac{n}{4(n+1)}$ 。

四、解答题（本大题共 6 小题，共 70.0 分）

17. 解：（1） $\because a_2, a_3+1, a_4$ 成等差数列， $\therefore 2(a_3+1) = a_2 + a_4$ 。

$\therefore 2(2a_2+1) = a_2 + 2^2a_2$ ，解得： $a_2 = 2$ 。 $\therefore a_1 = \frac{a_2}{2} = 1$ 。 $\therefore a_n = 2^{n-1}$ 。

（2） $b_n = \log_2 a_{n+1} = n$ 。 $\therefore$ 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 $T_n = 1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ 。

18. 解：（1）设 $\{a_n\}$ 的公比为 q ， $q > 0$ ，

因为 $8a_2 + 2a_4 = a_6$ ，所以 $8a_1q + 2a_1q^3 = a_1q^5$ ，所以 $8 + 2q^2 = q^4$ ，即 $q^4 - 2q^2 - 8 = 0$ ，

解得 $q^2 = 4$ ，又因为 $q > 0$ ，所以 $q = 2$ 。因为 $a_1 = 2$ ，所以 $a_n = 2^n$ ， $n \in \mathbb{N}^*$ 。

（2）由（1）知 $b_n = 2^n + 2n$ 。则 $T_n = (2^1 + 2) + (2^2 + 4) + (2^3 + 6) + \cdots + (2^n + 2n) =$

$(2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n) + (2 + 4 + 6 + \cdots + 2n) = 2(2^n - 1) + \frac{n(2n+2)}{2} = 2^{n+1} + n^2 + n - 2$ 。

所以数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 $T_n = 2^{n+1} - n^2 + n - 2$ 。

19. 解：（1）由题意得 $a_3 = 7$ ， $a_3 = 3a_2 - 2$ ，所以 $a_2 = 3$ ，则 $a_n = 2a_{n-1} + 1 (n \geq 2)$ ，

取 $n = 2$ ，得 $a_2 = 2a_1 + 1$ ，求得 $a_1 = 1$ ，

由 $a_n = 2a_{n-1} + 1$ ，得 $a_n + 1 = 2(a_{n-1} + 1)$ ， $a_1 + 1 = 2 \neq 0$ ，即 $\frac{a_n + 1}{a_{n-1} + 1} = 2 (n \geq 2)$ ，

所以数列 $\{a_n + 1\}$ 是首项为 $a_1 + 1 = 2$ ，公比为 2 的等比数列。

（2）由（1）知， $a_n + 1 = 2 \times 2^{n-1} = 2^n$ ，即 $a_n = 2^n - 1$ ，

所以 $S_n = \frac{2(1-2^n)}{1-2} - n = 2^{n+1} - n - 2$ ，

于是 $n + S_n - 2a_n = n + (2^{n+1} - n - 2) - 2(2^n - 1) = 0$ ，

所以 $n + S_n = 2a_n$ ，即 n, a_n, S_n 成等差数列。

20. 解: (1) $\{a_n\}$ 是等差数列, 且 $a_3 = 5, a_7 = 13$,

$$\text{设公差为 } d, \therefore \begin{cases} a_1 + 2d = 5 \\ a_1 + 6d = 13 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} a_1 = 1 \\ d = 2 \end{cases},$$

$$\therefore a_n = 1 + 2(n-1) = 2n-1 \ (n \in \mathbf{N}^+),$$

在 $\{b_n\}$ 中, $\because S_n = 2b_n - 1$, 当 $n=1$ 时, $b_1 = 2b_1 - 1$, $\therefore b_1 = 1$,

当 $n \geq 2$ 时, 由 $S_n = 2b_n - 1$ 及 $S_{n-1} = 2b_{n-1} - 1$,

$$\text{可得 } b_n = 2b_n - 2b_{n-1}, \therefore b_n = 2b_{n-1},$$

$\therefore \{b_n\}$ 是首项为 1 公比为 2 的等比数列, $\therefore b_n = 2^{n-1} \ (n \in \mathbf{N}^+)$.

$$(2) c_n = a_n b_n = (2n-1) \cdot 2^{n-1} \quad T_n = 1 + 3 \cdot 2 + 5 \cdot 2^2 + \cdots + (2n-1) \cdot 2^{n-1} \text{ ①},$$

$$2T_n = 1 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2^3 + \cdots + (2n-3) \cdot 2^{n-1} + (2n-1) \cdot 2^n \text{ ②},$$

$$\text{由 ①} - \text{②} \text{ 得: } -T_n = 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + \cdots + 2 \cdot 2^{n-1} - (2n-1) \cdot 2^n$$

$$= 1 + 2 \cdot \frac{2(1-2^{n-1})}{1-2} - (2n-1) \cdot 2^n = 1 + 4(2^{n-1} - 1) - (2n-1) \cdot 2^n = -3 - (2n-3) \cdot 2^n,$$

$$\therefore T_n = (2n-3) \cdot 2^n + 3 \ (n \in \mathbf{N}^+).$$

21. 解: (1) 依题意, 数列 $\{3^{b_n}\}$ 是首项为 3, 公比为 3 的等比数列,

所以 $3^{b_n} = 3 \cdot 3^{n-1} = 3^n$, 因此 $b_n = n$,

设数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 则 $T_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$,

$$T_{2n} = \frac{2n(2n+1)}{2} = n(2n+1),$$

$$\text{因为 } \frac{T_{2n}}{T_n} = \frac{n(2n+1)}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{4n+2}{n+1} \text{ 不是非零常数, 所以数列 } \{b_n\} \text{ 不是“和谐数列”}.$$

(2) 设数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 R_n , 若数列 $\{c_n\}$ 是“和谐数列”,

$$\text{则 } \frac{R_{2n}}{R_n} = k \ (k \text{ 为常数, 且 } k \neq 0),$$

因为数列 $\{c_n\}$ 是等差数列, 所以 $R_n = nc_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$,

$$R_{2n} = 2nc_1 + \frac{2n(2n-1)}{2}d, \text{ 于是 } \frac{R_{2n}}{R_n} = \frac{2nc_1 + \frac{2n(2n-1)}{2}d}{nc_1 + \frac{n(n-1)}{2}d} = k \text{ 对一切 } n \in \mathbf{N}^* \text{ 都成立,}$$

$$\text{化简得 } (k-4)dn + (k-2)(2c_1-d) = 0, \text{ 则 } \begin{cases} (k-4)d = 0 \\ (k-2)(2c_1-d) = 0 \end{cases},$$

因为 $d \neq 0$, 所以可解得 $k=4$, $d=2c_1$.

22. 解: (1) 数列 $\{b_n\}$ 是首项和公比都为 $-\frac{1}{3}$ 的等比数列, 所以 $b_n = (-\frac{1}{3})^n$.

数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 满足 $a_1 = a$, $b_n = a_{n+1} - a_n$, 所以 $a_{n+1} - a_n = (-\frac{1}{3})^n$.

$$\text{所以 } a_2 = a - \frac{1}{3}, \quad a_3 = a_2 + \frac{1}{9} = a - \frac{2}{9},$$

由于数列 $\{a_n\}$ 也是等比数列, 所以 $a_2^2 = a_1 \cdot a_3$, 整理得

$$(a - \frac{1}{3})^2 = a(a - \frac{2}{9}), \text{ 解得 } a = \frac{1}{4}.$$

$$(2) \text{ 由 } b_{n+1} - b_n = 2^n - 1, \text{ 所以 } b_n - b_1 = 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} - (n-1) =$$

$$\frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1} - (n-1) = 2^n - n - 1.$$

由于 $b_1 = a_2 - 3$,

$$\text{所以 } b_n = 2^n - n + a_2 - 4.$$

依题意: $b_n \geq 0$ 对 $n \in \mathbf{N}^*$ 恒成立, 且数列 $\{b_n\}$ 单调递增

所以 $b_1 \geq 0$, 得到 $a_2 \geq 3$.

$$(3) \text{ 由于 } a=4, b_n=2. \text{ 所以 } a_{n+1} - a_n = 2, \text{ 整理得 } a_n = 2n+2.$$

$$\text{故 } S_n = 4n + 2 \times \frac{n(n-1)}{2} = n^2 + 3n.$$

$$\text{所以 } C_n = \frac{S_n + 2\lambda}{2^n} = \frac{n^2 + 3n + 2\lambda}{2^n}, \text{ 假设存在整数 } k, 1, \text{ 且 } k > 1 > 1, \text{ 使得}$$

$$C_k = C_1 \text{ 成立, 故 } \frac{k^2 + 3k + 2\lambda}{2^k} = \frac{1^2 + 3 \cdot 1 + 2\lambda}{2^1},$$

$$\text{当 } \begin{cases} k=3 \\ 1=2 \\ \lambda=-1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} k=4 \\ 1=2 \\ \lambda=-2 \end{cases} \text{ 时, 满足条件.}$$