

应用三角公式化简求值的技巧问题

三角函数在高考中通常以中低档题型出现，难度不大，但由于三角公式的特殊性，解题中往往也涉及一些小的变换技巧，如果处理得当，往往可以事半功倍，快速而准确地得到正确结论. 通常情况下，三角变换应从“角度、函数、常数、次数、结构”等几方面着手解决.

一、三角变换，角为先锋

三角函数作为一种特殊函数，其“角”的特殊性不容忽视，因此我们在三角函数恒等变换中，应该首先注意角的形式，从统一角的角度出发，往往能够达到事半功倍的效果.

【例 1】已知 α 、 β 为锐角， $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ ， $\tan(\alpha - \beta) = -\frac{1}{3}$ ，则 $\tan\beta =$ _____.

【例 2】已知 $\cos\alpha = \frac{1}{3}$ ， $\cos(\alpha + \beta) = -\frac{1}{3}$ ，且 α 、 $\beta \in (0, \frac{\pi}{2})$ ，则 $\cos(\alpha - \beta)$ 的值等于_____.

【变式演练】已知 $\sin(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{3}{5}$ ，则 $\sin 2x$ 的值为_____.

二、函数变换，乃是重点

三角函数作为一类特殊的函数，其六种三角函数(当今教材要求重点掌握正弦函数、余弦函数、正切函数)之间有着密切的联系，因此，充分注意函数之间的关系，是三角函数变形的另一个重点.

【例 3】已知 $\tan\alpha = 4$ ，则 $\frac{1 + \cos 2\alpha + 8\sin^2\alpha}{\sin 2\alpha}$ 的值为_____.

【变式演练】设 $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ ， $\beta \in (0, \frac{\pi}{2})$ ，且 $\tan\alpha = \frac{1 + \sin\beta}{\cos\beta}$ ，则 $2\alpha - \beta =$ _____.

三、常数化角，曲径通幽

三角公式中有不少常数，如 1 、 $\sqrt{3}$ 、 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 等，在三角变换中，若能巧妙利用它们与三角函数式或函数值之间的关系进行转换，往往可以起到意想不到的效果.

【例 4】已知 $\frac{\sin\alpha + 3\cos\alpha}{3\cos\alpha - \sin\alpha} = 5$ ，则 $\sin^2\alpha - \sin\alpha\cos\alpha$ 的值是_____.

四、降幂化一，热点不断

三角公式中，一次关系式较多，特别是同角关系式，以及化一公式等等，因此在观察函数关系式时，注意其次数的特征，将高次化为一次，也是解决问题的重要途径。

【例 5】已知函数 $f(x) = \cos x(\sin x + \cos x) - \frac{1}{2}$ 。求函数 $f(x)$ 的最小正周期及单调递增区间。

五、和差倍分，注意结构

三角变换中，函数表达式结构上的变换也要充分注意，结构式的差异往往隐藏着对条件和结论的联系。

【例 6】已知 $\sin \frac{x}{2} - 2\cos \frac{x}{2} = 0$ 。

- (1) 求 $\tan x$ 的值；
- (2) 求 $\frac{\cos 2x}{\sqrt{2} \cos(\frac{\pi}{4} + x) \cdot \sin x}$ 的值。

六、公式变用，柳暗花明

三角函数有众多的公式，我们不仅要会使用公式，还要会使用其变形的等价形式。

如 $\cos \alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2 \sin \alpha}$ ， $\tan \alpha \pm \tan \beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos(\alpha \pm \beta)}$ 等。

【例 7】 $\tan 10^\circ + \tan 50^\circ + \sqrt{3} \tan 10^\circ \tan 50^\circ$ 的值为_____。

【迁移运用】

1. 已知 $\tan \alpha = -\frac{4}{3}$, 则 $\tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) =$ _____.

2. 已知 $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, $\beta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, $\cos \alpha = \frac{1}{3}$, $\sin(\alpha + \beta) = -\frac{3}{5}$, 则 $\cos \beta =$ _____.

3. 已知 $\cos(\frac{5\pi}{2} + \alpha) = \frac{3}{5}$, $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$, 则 $\sin 2\alpha$ 的值是_____.

4. 若 $\tan \beta = 2 \tan \alpha$, 且 $\cos \alpha \sin \beta = \frac{2}{3}$, 则 $\sin(\alpha - \beta)$ 的值为_____.

5. 已知 $0 < \alpha < \beta < \pi$, 且 $\cos \beta \cos \alpha = \frac{1}{5}$, $\sin \beta \sin \alpha = \frac{2}{5}$, 则 $\tan(\beta - \alpha)$ 的值为_____.

6. 已知 α 为锐角, 若 $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{5}$, 则 $\cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{6}\right) =$ _____.

7. 已知 $f(x) = \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$, 若 $f(\alpha) = \frac{1}{3}$, 则 $\sin \alpha =$ _____.

8. θ 为锐角, $\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{10}$, 则 $\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} =$ _____.

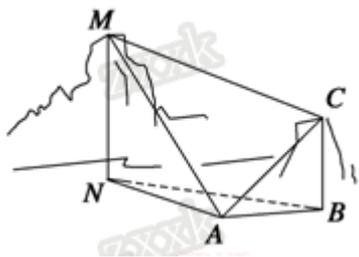
9. 若 $\sin(x + \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{3}$, 则 $\tan(2x + \frac{\pi}{3}) =$ _____.

10. 已知 $\sin(\frac{\pi}{6} - x) = \frac{3}{5}$, 则 $\cos(x + \frac{\pi}{3})$ 的值是_____.

11. 设 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, 向量 $\vec{a} = (\sin 2\theta, \cos \theta)$, $\vec{b} = (1, -\cos \theta)$, 若 $\vec{a} \perp \vec{b}$, 则 $\tan \theta =$ _____.

12. 已知 $\tan(3\pi - x) = 2$, 则 $\frac{2 \cos^2 x - \sin x - 1}{\sin x + \cos x} =$ _____.

13. 如图, 为测量山高 MN, 选择 A 和另一座山的山顶 C 为测量观测点. 从 A 点测得 M 点的仰角 $\angle MAN = 45^\circ$, C 点的仰角 $\angle CAB = 60^\circ$ 以及 $\angle MAC = 75^\circ$; 从 C 点测得 $\angle MCA = 45^\circ$. 已知山高 $BC = 10.0$ m, 则山高 $MN =$ _____ m.



14. 已知 $\sin(3\pi + \alpha) = 2\sin(\frac{3\pi}{2} + \alpha)$, 求下列各式的值.

(1) $\frac{\sin \alpha - 4\cos \alpha}{5\sin \alpha + 2\cos \alpha}$; (2) $\sin^2 \alpha + \sin 2\alpha$.

15. (1) 已知 $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, 化简 $\frac{(\sin 2\alpha + \cos 2\alpha - 1)(\cos \alpha + \sin \alpha)}{\sqrt{2 - 2\cos 2\alpha}}$;

(2) 已知 $\tan \beta = \frac{1}{2}$, $\tan(\alpha - \beta) = \frac{1}{3}$, α, β 均为锐角, 求角 α .

16. 已知, A, B, C, D 为平面四边形 $ABCD$ 的四个内角。

(1) 证明: $\tan \frac{B}{2} = \frac{1 - \cos B}{\sin B}$;

(2) 若 $A + C = 180^\circ$, $AB = 6$, $BC = 3$, $CD = 4$, $AD = 5$, 求 $\tan \frac{B}{2} + \tan \frac{D}{2}$ 的值。