数学学科考试题

本试卷分第Ⅰ卷和第Ⅱ卷两部分,共 4 页,满分为 150 分,考试用时 120 分钟.

注意事项：

1.答卷前,考生务必用 0.5 毫米黑色签字笔将自己的姓名、准考证号、考试科目填写在规定的位置上.

2.第Ⅰ卷每小题选出答案后,用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑,如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号.

3.第Ⅱ卷必须用 0.5 毫米黑色签字笔作答,答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应的位置；如需改动,先划掉原来的答案,然后再写上新的答案,不得使用涂改液、胶带纸、修正带和其它笔.

第Ⅰ卷

一、单项选择题（本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的）

1. 设集合 $M=\{x|\log_3(x-2)<0\}$,集合 $N=\{x|x\geq -2\}$,则 $M\cap N=$(　　)

A. $\{x|-2\leq x<2\}$　　B. $\{x|-2\leq x<3\}$　　C. $\{x|2<x<3\}$　　D. $\{x|x<3\}$

2.已知命题 $p:\forall x>1, x^2-x+1>0$,则 p 的否定为(　　)

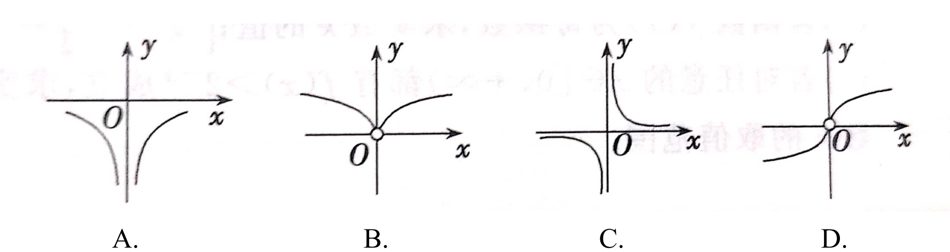
A. $\exists x\leq 1, x^2-x+1\leq 0$　　B. $\exists x>1, x^2-x+1\leq 0$

C. $\forall x\leq 1, x^2-x+1\leq 0$　　D. $\forall x>1, x^2-x+1\leq 0$

3.已知 $p:|x-a|<1, q:\dfrac{1}{x-2}\geq 1$.若 p 是 q 的必要不充分条件,则实数 a 的取值范围是(　　)

A. $(-\infty,3]$　　B. $[2,3]$　　C. $(2,3]$　　D. $(2,3)$

4. 函数 $f(x)=\dfrac{e^x+1}{x(1-e^x)}$ (其中 e 为自然对数的底数) 的图象大致为(　　)



A.　　B.　　C.　　D.

5. 酒驾是严重危害交通安全的违法行为. 为了保障交通安全, 国家有关规定：驾驶员血液中的酒精含量大于或等于 $20\text{mg}/100\text{ml}$, 小于 $80\text{mg}/100\text{ml}$ 的驾驶行为为酒后驾车, $80\text{mg}/100\text{ml}$ 及以上认定为醉酒驾车. 假设某驾驶员喝了一定量的酒后, 其血液中的酒精含量上升到了 $100\text{mg}/100\text{ml}$. 如果停止喝酒后, 他血液中酒精含量会以每小时 30% 的速度减少, 那么他至少经过(　　　)小时才能驾驶. (参考数据 $\lg 5\approx 0.7$, $\lg 7\approx 0.85$）

A. 3　　B. 5　　C. 7　　D. 9

6.已知定义在R上的函数 $f\left(x\right)=3^{|x-m|}-1$（$m$ 为实数）为偶函数,记 $a=f(\log_{0.5}3)$, $b=f(\log_{2}5)$, $c=f(2m)$,则 a,b,c 的大小关系为(　　)

A. $a<b<c$　　B. $a<c<b$　　C. $c<a<b$　　D. $c<b<a$

7.已知幂函数 $f(x)=(m-1)^2x^{m^2-4m+2}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,函数 $g(x)=2^x-a$. $\forall x_1\in[1,5],\exists x_2\in[1,5]$,使得 $f(x_1)\geq g(x_2)$ 成立,则实数 a 的取值范围是(　　)

A. $a\geq1$　　B. $a\geq-23$　　C. $a\geq31$　　D. $a\geq7$

8.已知函数 $f(x)=-x^2-2x, g(x)=\begin{cases}x+\dfrac{1}{4x}, x>0,\\ x+1, x\leq0.\end{cases}$,若方程 $g(f(x))-a=0$ 有4个实数根,则实数 a 的取值范围为(　　)

A. $(-\infty,1)$　　B. $(\frac{1}{2},1]$　　C. $(1,\frac{5}{4})$　　D. $[1,\frac{5}{4})$

二、多项选择题（本题共4小题,每小题5分,共20分.在每小题给出的四个选项中,有多项是符合题目要求的,全部选对的得5分,部分选对的得2分,有选错的得0分）

9.定义在R的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(x-3)=-f(x)$, 当 $x\in[0,3]$ 时 $f(x)=x^2-3x$, 则以下结论正确的有（　　　　）

A. $f(x)$ 的周期为6　　B. $f(x)$ 的图象关于 $(\frac{3}{2},0)$ 对称

C. $f(2021)=2$　　D. $f(x)$ 的图象关于 $x=\frac{3}{2}$ 对称

10. 如果函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上是增函数, 且 $\dfrac{f(x)}{x}$ 在区间 I 是减函数, 那么称函数 $y=f(x)$ 是区间 I 上的“缓增函数”, 区间 I 叫做“缓增区间”. 则下列函数是区间 $[1,\sqrt{3}]$ 上的“缓增函数”的是（　　　　）

A. $f(x)=e^x$　　B. $f(x)=\ln x$　　C. $f(x)=x^2-2x+3$　　D. $f(x)=-x^2+2\sqrt{3}x+3$

11. 下列说法正确的是（　　　　）

A.若 $a>b>0,c<d<0$,则一定有 $\dfrac{b}{c}>\dfrac{a}{d}$

B.若 $a>0,b\geq0$,且 $a+b=1$,则 $\dfrac{b(3-b)}{a}$ 的最小值为0

C.若 $x>0,y>0$, $xy+x+y=8$,则 $x+y$ 的最小值为4

D.若关于 x 的不等式 $ax^2-x-b<0$ 的解集是 $(2,3)$,则 $a+b=1$

12.已知函数 $f(x)=\begin{cases}-2^{-x}+a, x<0, \\ 2^{x}-a, x>0.\end{cases}(a\in \mathrm{R})$,下列结论正确的是(　　　　)

A. $f(x)$ 是奇函数　　　　B.若 $f(x)$ 在定义域上是增函数,则 $a\leq 1$

C.若 $f(x)$ 的值域为 R ,则 $a\geq 1$　　　　D.当 $a\leq 1$ 时,若 $f(x)+f(3x+4)>0$,则 $x\in(-1,+\infty)$

第II卷

三、填空题（本题共 4 个小题,每小题 5 分,共 20 分.）

13. 在二项式 $(x-\frac{1}{x})^{n}$ 的展开式中恰好第 3 项的二项式系数最大, 则展开式中的常数项是________.

14. 已知随机变量 $X\sim N(1,\sigma^{2})$, 若 $P(X<3)=0.9$, 则 $P(-1<X<1)=$__________.

15. 直线 $2ax+by-2=0(a>0,b>0)$ 过函数 $y=\frac{x+1}{x-1}$ 图象的对称中心, 则 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ 的最小值为________.

16. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 R , 且满足下列条件：① $f(x)=-f(x+2)$;

② $f(x)=\begin{cases}\cos\frac{\pi x}{2}, 0<x\leq 2, \\ \left|x+\frac{1}{2}\right|, -2<x\leq 0.\end{cases}$ 则 $f(f(2021))=$________；若方程 $f(x)-k=0$ 在 $(-2020,2020]$ 上有 2020 个不同的实数根,则实数 k 的取值范围是______________.（第一个空 2 分,第二个空 3 分）

四、解答题（本题共 6 个小题,共 70 分.解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤）

17.(10 分)求下列各式的值:

(1) $\left(2\sqrt[3]{a^{2}}\cdot\sqrt{b}\right)\left(-6\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{b}\right)\div\left(-3\sqrt[4]{a^{3}}\cdot\sqrt[6]{b^{5}}\right)$;

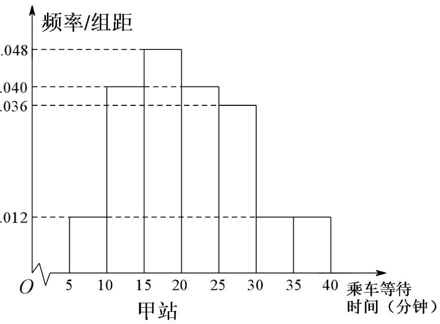
(2) $\frac{1}{2}\lg\frac{32}{49}-\frac{4}{3}\lg\sqrt{8}+\lg\sqrt{245}+3^{\log_{3}\frac{1}{4}}$.

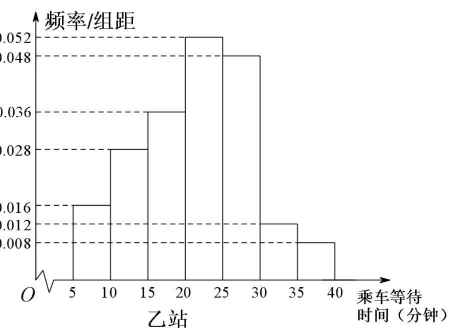
18. (12 分)已知函数 $f(x)=\lg(x+1)$.

(1)若 $0<f(1-2x)-f(x)<1$,求 x 的取值范围;

(2)若 $g(x)$ 是以 2 为周期的奇函数,且当 $0\leq x<1$ 时,有 $g(x)=f(x)$,求函数 $y=g(x)(x\in(1,2])$ 的解析式.

19. (12 分)某部门在同一上班高峰时段对甲、乙两地铁站各随机抽取了 50 名乘客,统计其乘车等待时间（指乘客从进站口到乘上车的时间,乘车等待时间不超过 40 分钟）.将统计数据按 [5,10),[10,15),[15,20), ⋯, [35,40] 分组,制成频率分布直方图:





假设乘客乘车等待时间相互独立.

（1）在上班高峰时段,从甲站的乘客中随机抽取1人,记为A；从乙站的乘客中随机抽取1人,记为B.用频率估计概率,求乘客A，B乘车等待时间都小于20分钟的概率;

（2）在上班高峰时段,从甲站乘车的乘客中随机抽取3人,X表示乘车等待时间小于20分钟的人数,用频率估计概率,求随机变量X的分布列与数学期望.

20.（12分）已知函数$f(x)=xe^x-a(\frac{x^2}{2}+x),(a\in\mathbf{R})$.

(1)当$a=1$时,求函数$f(x)$的极值;

(2)讨论函数$f(x)(x>-1)$的单调性.

21.（12分）已知函数$f(x)=\ln\frac{kx-1}{x+1}(k\in\mathrm{R})$为奇函数.

(1)求实数k的值;

(2)已知此函数在$(1,+\infty)$上单调递增.若存在$\alpha,\beta\in(1,+\infty)$,使得函数$f\left(x\right)$在区间$\left[\alpha,\beta\right]$上的值域为$\left[\ln\left(m\alpha-\frac{m}{2}\right),\ln\left(m\beta-\frac{m}{2}\right)\right]$,求实数$m$的取值范围.

22.（12分）设函数$f(x)=\ln x-ax,g(x)=e^x-ax$,其中$a$为实数.

(1)若$y=f(x)$在$x=1$处的切线方程为$x+y+1=0$,求实数a的值;

(2)若$g(x)$在$(-1,+\infty)$上是单调增函数,试求$f(x)$的零点个数,并证明你的结论.

数学答案

1. C；2. B；3. C；4. A；5. B；6. C；7. A；8. D ；9. ACD；10. CD；11. ABC；12. AB；

13. 6； 14. 0.4 ；15. $\frac{3}{2}+\sqrt{2}$； 16. $\frac{1}{2}$ $\left\{k \middle| k=0或\frac{1}{2}<k<1\right\}$

17．解：(1) $\left(2\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt{b}\right)\left(-6\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{b}\right)\div\left(-3\sqrt[4]{a^3}\cdot\sqrt[6]{b^5}\right)$

$=\left(2a^{\frac{2}{3}}\cdot b^{\frac{1}{2}}\right)\left(-6a^{\frac{1}{2}}\cdot b^{\frac{1}{3}}\right)\div\left(-3a^{\frac{3}{4}}\cdot b^{\frac{5}{6}}\right)$

$=4a^{\frac{5}{12}}\cdot b^0=4a^{\frac{5}{12}}$

（2）$\frac{1}{2}\lg\frac{32}{49}-\frac{4}{3}\lg\sqrt{8}+\lg\sqrt{245}+3^{\log_3\frac{1}{4}}$

$=\frac{1}{2}(\lg 32-\lg 49)-\frac{4}{3}\lg 8^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\lg 245+\frac{1}{4}$

$=\frac{1}{2}(5\lg 2-2\lg 7)-\frac{4}{3}\times\frac{3}{2}\lg 2+\frac{1}{2}(2\lg 7+\lg 5)+\frac{1}{4}$

$=\frac{5}{2}\lg 2-\lg 7-2\lg 2+\lg 7+\frac{1}{2}\lg 5+\frac{1}{4}$

$=\frac{1}{2}\lg 2+\frac{1}{2}\lg 5+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\lg 10+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

18.解：（1）由$\begin{cases}2-2x>0\\x+1>0\end{cases}$，得$-1<x<1$.

由$0<\lg(2-2x)-\lg(x+1)=\lg\frac{2-2x}{x+1}<1$得$1<\frac{2-2x}{x+1}<10$.

因为$x+1>0$，所以$x+1<2-2x<10x+10$，$-\frac{2}{3}<x<\frac{1}{3}$.

由$\begin{cases}-1<x<1\\-\frac{2}{3}<x<\frac{1}{3}\end{cases}$得$-\frac{2}{3}<x<\frac{1}{3}$.

（2）当$x\in$（1,2]时，2-$x\in$[0,1)，因此

$g(x)=-g(-x)=-g(2-x)=-f(2-x)=-\lg(3-x)$ ……12 分

19．解：（1）设M表示事件“乘客A乘车等待时间小于20分钟”，N表示事件“乘客B乘车等待时间小于20分钟”，C表示事件“乘客A,B乘车等待时间都小于20分钟”.

由题意知，乘客A乘车等待时间小于20分钟的频率为

$(0.012+0.040+0.048)\times 5=0.5$，故$P(M)$的估计值为$0.5$.

乘客B乘车等待时间小于20分钟的频率为

$(0.016+0.028+0.036)\times 5=0.4$，故$P(N)$的估计值为$0.4$.

又$P(C)=P(MN)=P(M)\cdot P(N)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}=\frac{1}{5}$.

故事件C的概率为$\frac{1}{5}$.

（2）由（1）可知，甲站乘客乘车等待时间小于20分钟的频率为0.5，

所以甲站乘客乘车等待时间小于 20 分钟的概率为$\dfrac{1}{2}$.

显然，X 的可能取值为$0,1,2,3$且$X\sim B(3,\dfrac{1}{2})$.

所以$P(X=0)=C_3^0(\dfrac{1}{2})^3=\dfrac{1}{8}$；$P(X=1)=C_3^1\dfrac{1}{2}\cdot(\dfrac{1}{2})^2=\dfrac{3}{8}$；

$P(X=2)=C_3^2(\dfrac{1}{2})^2\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{8}$；$P(X=3)=C_3^3(\dfrac{1}{2})^3=\dfrac{1}{8}$

故随机变量X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\dfrac{1}{8}$	$\dfrac{3}{8}$	$\dfrac{3}{8}$	$\dfrac{1}{8}$

$E(X)=3\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$

20. 解：解：（1）当$a=1$时，$f(x)=xe^x-(\dfrac{x^2}{2}+x)$

$f'(x)=e^x+xe^x-(x+1)=(x+1)(e^x-1)$

令$f'(x)=0$得$x=-1$，或$x=0$.

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗		↘		↗

$\therefore x=-1$时，$f(x)$有极大值$f(-1)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{e}$

$x=0$时，$f(x)$有极小值$f(0)=0$

（2）$f'(x)=e^x+xe^x-(x+1)=(x+1)(e^x-1)$ $\because x>-1,\therefore x+1>0$

（1）当$a\le 0,$时，有$e^x-a>0,$

当$x>-1$，$f'(x)>0$，$f(x)$在$(-1,+\infty)$上单调递增，

（2）当$a>0,$时，令$f'(x)=0,$得$x=\ln a$.

①当$\ln a\le -1,$即$0<a\le\dfrac{1}{e},$有$f'(x)>0$，从而函数$f(x)$在$(-1,+\infty)$上单调递增；

②当$\ln a>-1,$即$a>\dfrac{1}{e}$时，

当 $x\in(-1,\ln a), f'(x)<0,\ f(x)$ 单调递减；

当 $x\in(\ln a,+\infty), f'(x)>0,\ f(x)$ 单调递增；

综上，$a\le\dfrac{1}{e}$ 时，$f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增；

当 $a>\dfrac{1}{e}$ 时，$f(x)$ 在 $(-1,\ln a)$ 单调递减，在 $(\ln a,+\infty)$ 单调递增

21. 解：(1)由 $f\left(x\right)$ 为奇函数，得 $f(-x)=-f(x)$，即 $\ln\dfrac{-kx-1}{-x+1}=-\ln\dfrac{kx-1}{x+1}$

$\ln\dfrac{-kx-1}{-x+1}+\ln\dfrac{kx-1}{x+1}=0,\ln\dfrac{1-k^2x^2}{1-x^2}=0,\dfrac{1-k^2x^2}{1-x^2}=1,k^2=1,k=\pm1$

经检验

$k=1$………………4 分

（2）由已知知 $f\left(x\right)$ 在 $\left(1,+\infty\right)$ 上为增函数，

又因为函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left[\alpha,\beta\right]$ 上的值域为 $\left[\ln m\left(\alpha-\dfrac{1}{2}\right),\ln m\left(\beta-\dfrac{1}{2}\right)\right]$，

所以 $m>0$，且 $\begin{cases}\ln\dfrac{\alpha-1}{\alpha+1}=\ln\left(m\alpha-\dfrac{m}{2}\right),\\ \ln\dfrac{\beta-1}{\beta+1}=\ln\left(m\beta-\dfrac{m}{2}\right)\end{cases}$，所以 $\begin{cases}\dfrac{\alpha-1}{\alpha+1}=m\alpha-\dfrac{m}{2},\\ \dfrac{\beta-1}{\beta+1}=m\beta-\dfrac{m}{2}\end{cases}$，

即 α,β 是方程 $\dfrac{x-1}{x+1}=mx-\dfrac{m}{2}$ 的两实根，

问题等价于方程 $mx^2-\left(1-\dfrac{m}{2}\right)x+1-\dfrac{m}{2}=0$ 在 $\left(1,+\infty\right)$ 上有两个不等实根，

令 $h\left(x\right)=mx^2-\left(1-\dfrac{m}{2}\right)x+1-\dfrac{m}{2}$，对称轴 $x=\dfrac{1}{2m}-\dfrac{1}{4}$

则 $\begin{cases}m>0\\ \dfrac{1}{2m}-\dfrac{1}{4}>1\\ \Delta=\left(1-\dfrac{m}{2}\right)^2-4m\left(1-\dfrac{m}{2}\right)>0\\ h\left(1\right)=m>0\end{cases}$，

即 $\begin{cases}m>0\\ 0<m<\dfrac{2}{5}\\ m>2\text{或}m<\dfrac{2}{9}\end{cases}$，解得 $0<m<\dfrac{2}{9}$.

22 解：(1)由题 $f'(x)=\frac{1}{x}-a$，$f'(1)=1-a=-1\therefore a=2$

（2）法一：$f(x)=\ln x-ax$，定义域为$(0,+\infty)$．$f'(x)=\frac{1}{x}-a$

①当$a=0$时，$f(x)=\ln x$在有一个零点1.

②当$a<0$时，$f'(x)>0$，$f(x)$在$(0,+\infty)$增，

又因为$f(1)=-a>0$,

$f(e^a)=a(1-e^a)<0$，此时$f(x)$有一个零点.

③当$0<a\le\frac{1}{e}$时，令$f'(x)=\frac{1}{x}-a=0$，得$x=\frac{1}{a}\ge e$，

当$x\in(0,\frac{1}{a})$，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增；当$x\in(\frac{1}{a},+\infty)$，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减.

$$f_{\max}(x)=f(\frac{1}{a})=\ln\frac{1}{a}-1$$

（i）当$a=\frac{1}{e}$时，$f(x)$有1个零点；

（ii）当$0<a<\frac{1}{e}$时，$f(\frac{1}{a})>0$，

又$f(1)=-a<0.$

先证一个引理：$\ln x<\sqrt{x}$，

构造

$$\varphi(x)=\ln x-\sqrt{x},\varphi'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{2-\sqrt{x}}{2x}$$

所以$\varphi(x)$在$(0,4)$增，$(4,+\infty)$减$\varphi_{\max}(x)=\varphi(4)=\ln 4-2<0$，所以$\ln x<\sqrt{x}$

有$<\sqrt{x}-ax<0$，

$$f(\frac{1}{a^2})=\ln\frac{1}{a^2}-a\cdot\frac{1}{a^2}<\frac{1}{a}-\frac{1}{a}=0$$

得$x>\frac{1}{a^2}$，所以$f(\frac{1}{a^2})<0$，

所以，$f(x)$在区间$(1,\frac{1}{a}),(\frac{1}{a},\frac{1}{a^2})$上，各有一个零点.

综上，当$a\le 0$或$a=\frac{1}{e}$时，$f(x)$的零点有 1 个，当$0<a<\frac{1}{e}$时，$f(x)$的零点有 2 个.

法二：（酌情扣分）由题$g'(x)=e^x-a\ge 0$在$(-1,+\infty)$上恒成立，

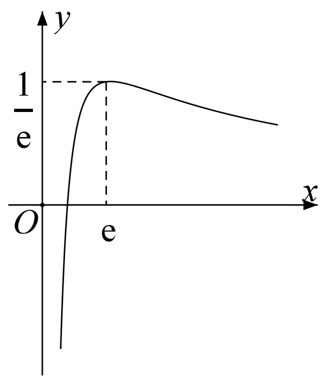
$\therefore e^x\ge a$在$(-1,+\infty)$上恒成立，$\therefore a\le\frac{1}{e}$，

由$f(x)=\ln x-ax=0,(x>0)$得 $a=\frac{\ln x}{x},(x>0)$，

令$h(x)=\frac{\ln x}{x},(x>0)$，则$h'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2},(x>0)$，

当$0<x<e$时，$h'(x)>0$，$h(x)=\frac{\ln x}{x},(x>0)$递增，

当$x>e$时，$h'(x)<0$，$h(x)=\frac{\ln x}{x},(x>0)$递减，



$\therefore x=e$ 时，$h(x)=\dfrac{\ln x}{x},(x>0)$ 最大值为$\dfrac{1}{e}$，

又$0<x<1$时，$h(x)=\dfrac{\ln x}{x}<0$，$x>1$时，$h(x)=\dfrac{\ln x}{x}>0$，

据此作出$h(x)=\dfrac{\ln x}{x},(x>0)$ 的大致图象，由图知：