

双曲线中的综合问题

1. 已知双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$, 过点 $P(1,1)$ 的直线 l 与双曲线只有一个公共点, 求直线 l 的方程.

[错解] 设 $l: y = k(x-1)+1$, 代入双曲线方程, 得 $(4-k^2)x^2 - (2k-2k^2)x - k^2+2k-5=0$. 由题意, $\Delta = (2k-2k^2)^2 - 4(4-k^2)(-k^2+2k-5) = 0$, 所以 $k = \frac{5}{2}$.

[辨析] 错因在于忽视了 $4-k^2=0$, 即 l 与双曲线的渐近线平行时, l 与双曲线只有一个交点也符合题意. 另外没有考虑直线 l 斜率不存在的情况.

[正解] 可分两种情况: (1) 直线 l 斜率不存在时, $l: x=1$ 与双曲线相切, 符合题意; (2) 直线 l 斜率存在时, 设 l 方程为 $y = k(x-1)+1$, 代入双曲线方程, 得 $(4-k^2)x^2 - (2k-2k^2)x - k^2+2k-5=0$, 当 $4-k^2=0$ 时, $k = \pm 2$, 即 l 与双曲线的渐近线平行时, l 与双曲线只有一个公共点; 当 $4-k^2 \neq 0$ 时, 令 $\Delta = 0$, 所以 $k = \frac{5}{2}$. 综上, $k = \frac{5}{2}$ 或 $k = \pm 2$ 或 k 不存在.

2. 如果直线 $y = kx-1$ 与双曲线 $x^2 - y^2 = 4$ 右支有两个公共点, 求 k 的取值范围

3. 过双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$ 的右焦点 F 作直线 l 交双曲线于 A, B 两点, 若 $|AB| = 4$, 则这样的直线 l 有 () A. 1

条 B. 2 条 C. 3 条 D. 4 条

2. 直线 $l: y = kx+1$ 与双曲线 $C: 2x^2 - y^2 = 1$ 的右支交于不同的两点 A, B . (1) 求实数 k 的取值范围; (2) 是否存在实数 k , 使得以线段 AB 为直径的圆经过双曲线 C 的右焦点 F ? 若存在, 求出 k 的值; 若不存在, 说明理由.

[解析] (1) 将直线 l 的方程 $y = kx+1$ 代入双曲线 C 的方程 $2x^2 - y^2 = 1$ 后整理得, $(k^2-2)x^2 + 2kx + 2 = 0$ ①

依题意, 直线 l 与双曲线 C 的右支交于不同的两点, 故
$$\begin{cases} k^2-2 \neq 0 \\ \Delta = (2k)^2 - 8(k^2-2) > 0 \\ -\frac{2k}{k^2-2} > 0 \\ \frac{2}{k^2-2} > 0 \end{cases},$$

解得 k 的取值范围为 $-2 < k < -\sqrt{2}$.

(2) 设 A, B 两点的坐标分别为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$, 则由①式得
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2k}{2-k^2} \\ x_1 x_2 = \frac{2}{k^2-2} \end{cases},$$

假设存在实数 k , 使得以线段 AB 为直径的圆经过双曲线 C 的右焦点 $F(\frac{\sqrt{6}}{2}, 0)$, 则 $FA \perp FB$, $\therefore (x_1 - \frac{\sqrt{6}}{2})(x_2$

$$-\frac{\sqrt{6}}{2})+y_1y_2=0, \text{ 即 } (x_1-\frac{\sqrt{6}}{2})(x_2-\frac{\sqrt{6}}{2})+(kx_1+1)(kx_2+1)=0.$$

$$(1+k^2)x_1x_2+(k-\frac{\sqrt{6}}{2})(x_1+x_2)+\frac{5}{2}=0, \therefore (1+k^2)\frac{2}{k^2-2}+(k-\frac{\sqrt{6}}{2})\frac{2k}{2-k^2}+\frac{5}{2}=0,$$

$$\text{化简得 } 5k^2+2\sqrt{6}k-6=0. \text{ 解得 } k=-\frac{6+\sqrt{6}}{5}, \text{ 或 } k=\frac{6-\sqrt{6}}{5} \notin (-2, -\sqrt{2}) (\text{舍去}).$$

可知 $k=-\frac{6+\sqrt{6}}{5}$ 使得以线段 AB 为直径的圆经过双曲线 C 的右焦点.

3. 已知中心在原点的双曲线 C 的右焦点为 $(2,0)$, 右顶点为 $(\sqrt{3}, 0)$.

→ →

(1) 求双曲线 C 的方程; (2) 若直线 $l: y=kx+\sqrt{2}$ 与双曲线 C 恒有两个不同的交点 A 和 B , 且 $OA \cdot OB > 2$ (其中 O 为原点), 求 k 的取值范围.

[解析] (1) 设双曲线方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 (a>0, b>0)$. 由已知得 $a=\sqrt{3}, c=2$, 于是 $a^2+b^2=2^2, b^2=1$,

故双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{3}-y^2=1$. (2) 将 $y=kx+\sqrt{2}$ 代入 $\frac{x^2}{3}-y^2=1$, 得

$(1-3k^2)x^2-6\sqrt{2}kx-9=0$. 由直线 l 与双曲线交于不同的两点, 得

$$\begin{cases} 1-3k^2 \neq 0 \\ \Delta = (6\sqrt{2}k)^2 + 36(1-3k^2) = 36(1-k^2) > 0 \end{cases}, \text{ 即 } k^2 \neq \frac{1}{3} \text{ 且 } k^2 < 1.$$

$$\text{设 } A(x_A, y_A), B(x_B, y_B), \text{ 则 } x_A+x_B=\frac{6\sqrt{2}k}{1-3k^2}, x_Ax_B=\frac{-9}{1-3k^2}.$$

→ →

由 $OA \cdot OB > 2$, 得 $x_Ax_B+y_Ay_B > 2$. $x_Ax_B+y_Ay_B=x_Ax_B+(kx_A+\sqrt{2})(kx_B+\sqrt{2})$

$$=(k^2+1)x_Ax_B+\sqrt{2}k(x_A+x_B)+2=(k^2+1)\frac{-9}{1-3k^2}+\sqrt{2}k\frac{6\sqrt{2}k}{1-3k^2}+2=\frac{3k^2+7}{3k^2-1}.$$

于是 $\frac{3k^2+7}{3k^2-1} > 2$, 即 $\frac{-3k^2+9}{3k^2-1} > 0$, 解得 $\frac{1}{3} < k^2 < 3$, 又 $\because k^2 < 1$,

$\therefore \frac{1}{3} < k^2 < 1$, 故 k 的取值范围为 $(-1, -\frac{\sqrt{3}}{3}) \cup (\frac{\sqrt{3}}{3}, 1)$.