数学"生成知识"教学怎么"教"

——以高一年级函数定义域教学为例

罗海霞

(江苏省连云港中等专业学校 222000)

建构主义学习理论强调,学习的真正发生就是学习者在已有认知经验基础上生发出来的新的认知过程.就是说要想发生学习,必须借助学习者的原有认知结构,生成出新的认知,才能使学习行为真正发生.这就是"生成知识".然而,在实际中学数学教学中,囿于教学时间的限制,而"生成知识"教学用时较长,许多教师往往回避使用,采用灌输式教学,奉送定义,直抛结论,忽略定义、结论产生过程中所蕴含的丰富的数学思想和方法.殊不知,这样就隔断了学生知识生长的过程,而只留下一个一个知识的片段.悟性高的学生或许能将这些片段进行逻辑勾连,优化自己的知识结构;而更多的学生也许进行了错误的勾连,形成了错误的认知经验,为后续的学习带来隐患.灌输式教学看似节约了教学时间,实则漏掉了思维成长最关键的环节,得不偿失.正所谓"磨刀不误砍柴工",学生一旦生成知识,许多方法或技巧就水到渠成,这也正是弗赖登塔尔所强调的"数学学习唯一正确的方法是知识再创造"[1],为学生全面深刻地理解数学奠定扎实的基础,形成自主解决问题的基石,从而培养学生创造力.这也正是数学的核心素养.

1 数学生成知识的认识

美国教学心理学家维特罗克吸收认知建构理论,将"生成"界定为"学生设置新模式和解释,或者使用新模式或解释,把新信息组织进一个牢固的整体,这个整体会弄清楚这个信息,并且使之与他们的经验和认知相一致"[2].生成过程就是对知识和经验积极建构.而促使"生成知识"形成的教学,就是"生成知识"的教学.生成教学要求教师树立动态、变化的教学学程观,而不是刚性、封闭的教学设计观."生成知识"教学就是要帮助学生不断地同化、顺应、衍生出新的认知,拓宽认知结构,从而创生学习能力.因此,生成知识教学重"学"也重"教",重"主体参与"也重"结果分析".因为学习者在知识生成过程中面临的"问题、困惑、疑难",反映在教学层面上正是教学的目的、内容、重点、难点.同时,"生成"包含从无到有的"过程性",既包括"生"的起点,也包括"成"的结果,对结果的分析,可以优化生成的过程.

生成教学是为了帮助学生深入理解数学知识、技能、思想、方法.数学知识分为显性知识和隐性知识.显性知识是指用书面文字、数学符号、图标直接表示的知识.隐性知识是指尚未被言语和其它形式表述出来的知识,包括数学思想、数学方法等.隐性知识往往存在于显性知识彼此间的关系、结构和知识产生的过程中.对于数学知识的理解,在教育心理学层面,分为三个层次:工具性理解、关系性理解和形式化理解;在教学论层面,分为三个境界:知识的理解、知识的迁移和知识的创新.无论是理解显性知识,还是隐性知识都有赖于学习者自身思维的参与、主动地建构、不断生成新的认知才能实现,教师只能精心指导,耐心地"守望"学生新知的形成.因为生成知识具有"整合生成、自然生长、从无到有的创造、渐进性、未竟性"的特点.即学习者运用认知结构中的因素,经过认知经验和问题的反复作用,遵循学科本身的逻辑结构和发展规律,被学习者有意识的思维操作和信息加工,不是一次完成,而是很"自我"地、自然地、渐进创造出来的知识,只有顺应学生的自有认知经验,积极指导,耐心等待才能达到对知识的不断提升的理解境界,即关系性理解,直至形式化理

解,在实际解决问题的过程中能正向迁移知识,创造性地解决问题.

本文以高一第一册函数概念中的函数定义域教学为例,谈谈数学生成知识教学的路径.

2 数学概念教学的理解

"数学概念是数学思维的核心与逻辑起点,概念是数学教学的基础"[3].概念教学离不开问题的导引,因为"问题是催生知识生成的认知动力".而问题解决是指个人面对问题时,引发认知需要,在认知需要的驱动和导向下,借助非认知因素的作用,使思维沿着认知需要的方向运行,由此不断推动个体知识的生成."[4]纵观数学发展史,问题解决往往催生新的数学概念.如"负数开方"问题的解决催生"虚数"概念的诞生,对"无穷小量"是 0 还不是 0 问题的解决,催生了"极限"概念的诞生.概念形成过程常常就是问题解决的过程.

理查德·来什,玛莎·兰多,埃里克·汉密尔顿关于"概念模式"的理论研究认为,概念包括四个部分."第一,内在关系网络,以及各种运算;第二,使各概念的内在网络间形成联系或联结的概念体系;第三,表征系统(如文字符号、图形等);第四,模式加工系统,即使前三种成分起作用并随时修正或改造这三种成分使其适合实际情境的一种动态机制.其中,第二、第四是概念的主要成分,第一和第三则需要建立在对第一、第三的充分理解的基础之上."[5]

为此,概念教学要努力围绕这个模式的四个方面开展教学,具体在函数定义域教学中,这不只需要教师针对数学的基本概念、原理和重要的思想方法,从衍生性主题的设计、数学内容本质的把握、数学关系的转化以及问题结构的明确等方面去创设问题情境,捕捉生成资源,还需要在此基础上对学生问题探究过程进行引导,促进学生在学习中的思维真正参与,因此,问题是心脏,思考是主线,更需要教师形成不断反思问题情境中的生成资源,及时捕捉引导契机.

函数概念的诞生经历了曲折、螺旋式抽象的过程.在高一数学教材中,函数定义域的概念是和函数定义同时引出,属于函数定义的一部分,往往在教学中也被一带而过.教师往往只侧重于求使函数解析式有意义的自变量范围,忽略对函数的定义域的结构性剖析.导致学生理解函数定义域时出现偏差、书写不规范、对于抽象函数定义域的理解出现困难.究其原因,就是对函数定义域概念教学的忽视所致.华罗庚说过,数学学习中,不害怕困难,也不要轻视容易.

3 生成知识教学的路径

3.1 通过问题解决,生成概念的内在网络和表征系统

概念教学中如何呈现概念形成的过程,暴露概念蕴含的创造性思维,需要设计相应的问题,通过对问题的解决,让学生自然生成"概念的内在结构和概念的表征系统"即概念的各组成要素及关系和概念的数学符号或图形等表征系统.因此,概念形成的教学中,问题的设计要突出概念的内容侧面,也要呈现其表征系统.如在函数定义域教学中,不仅要厘清其自变量、因变量、对应法则之间的内在关系,还需厘清用集合表示定义域、值域的符号表征.

问题 1 "如果在函数 $y=f(x)$ 中,已知 $x-1\leqslant 2$,试问函数定义域是什么?"凸显函数定义域指的是"自变量的变化范围"的本质,引导学生"自得"函数定义域是自变量 x 的取值范围,及其在问题中的表述方式.

问题 2 "函数定义域为 $x\leqslant 3$,这样写合不合适?"引导学生揣摩定义域的表征系统.问题 2 凸显利用具体的数学模型(集合)去代表特定的数学对象(定义域)这一概念教学中的重要过程,从中习得概念的形成离不开数学模型的表征(如文字、符号、图形等).问题 1 和问题 2 的设计暴露定义域概念中的内在关系和数学表征,使学生完备对函数定义域概念的认知.

问题 3 写出函数 $f(x)=\begin{cases}x(x\geqslant 1)\\ 1\left(0\leqslant x\leqslant \frac{1}{2}\right)\end{cases}$ 的定义域.

问题 4 求函数 $f(x)=\sqrt{x-1}+\frac{2}{x-2}-(x-3)^0$ 的定义域.则通过对不同形式定义域的求解让学生进一步修正、改进定义域的适用情境,将定义域概念中的对应法则、自变量的内在关系,"自化"为满足对应法则的自变量的取值范围.

至此,学生初步了解函数定义域的内在结构、表征系统,也在认知层面上理解求解定义域就是

使得函数式子有意义的运算方法.初步完成了“概念模式”理论的第一层内容和第三层内容,即内在关系网络:对应法则、定义域,以及关于定义域的运算、表征系统(用集合或区间的形式表征定义域).

3.2 显化隐性知识,构建概念的网络关系

隐性知识是指尚未被言语和其它形式表述出来的知识.显化隐性知识就是从学生的视角出发,按照学生的认知习惯,发现数学关系如对应关系、函数关系、同构关系、相等关系、不等关系、包含关系,或数学对象所具有的思维活动赖以依存的条件,并将含有未知目标 x 的数学关系 (S,x) 反映到一组较具体的数学关系(或具体的未知关系)和学生的相关现实背景中,以激发学生的数学思考,教师的任务是帮助学生发现数学关系、运用、生成新知”[6],即教师要将学生准备学习的内容借助已能掌握的知识“借壳生蛋”,即捕捉生成知识的资源,通过 生成知识资源作为生长点和分析问题的人手点,进行点拨、引导,直至发现数学关系,生成解决问题的思路和方法.

问题5 “已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-1,1]$,求 $f(2x)$ 的定义域”.利用对应法则和定义域的对应关系,引导学生思考对于“$f(x)$ 的定义域为 $[-1,1]$”可以理解为“对应法则 f 只有作用在 $[-1,1]$ 上才“名正言顺”.这样构建出“对应法则的作用范围等价于定义域的数学模型”,再采用类似于求解具体函数解析式定义域的“认知图式”,迁移问题4的认知经验,学生自悟,欲求 $f(2x)$ 的定义域,只要将 $2x$ 放进 $[-1,1]$ 这个“笼子”里就能使得 f 有(名正言顺)了,即 $-1\leqslant 2x\leqslant 1$,从而得出 $f(2x)$ 的定义域为 $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$.此处,教师通过将问题4的经验作为生成知识的资源,明确求函数定义域是求出使得函数有意义时自变量的范围,将抽象的函数定义域问题借助具体函数定义域进行显化,再结合对题意中“$f(x)$ 的定义域为 $[-1,1]$”就是“f 这个对应法则只有作用在 $[-1,1]$ 上才有意义”的理解,点拨、引导学生顺利生成解决问题的思路.

3.3 利用特殊到一般,凸显概念的内在联结

教学中通常采取一定的方法,如一般到特殊、抽象到具体、变换法(等价变换、不等价变换)、模型法等,来发现“数学对象间可以确切的关系”.人们对于直观、明确问题的理解易于对抽象、隐晦问题的理解.对抽象问题的理解一般都建立在对具体问题的理解的基础之上.教学中,通过具体问题的设计,帮助学习者自然生成对抽象问题的认知.

问题6 已知函数 $f(2x)$ 的定义域为 $[-1,1]$,求 $f(x)$ 的定义域.

学生对于已知条件“$f(2x)$ 的定义域为 $[-1,1]$”的理解包含两个难点,导致学生无从下手.第一学生对于“$f(2x)$ 的定义域为 $[-1,1]$”中的 $[-1,1]$ 究竟是“x 的范围”还是“$2x$ 的范围”有疑问;第二学生不太理解“$2x$ 与 f 间的约束关系”.第一个难点,在充分理解函数定义域概念的前提下容易解决.第二个难点,教师指导学生从第一个难点的突破人手.而对于特殊值呈现出的规律的认知是进行抽象认知的基础和出发点.

师:当 $x=-1,-\frac{4}{5},-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{4}{5},1$ 时,对应的函数值是什么?

学生易于理解,“f 能够作用的范围”是 $[-2,2]$,“自得” $-2\leqslant 2x\leqslant 2$.

师:反思如何从条件出发得到该结果?

生:从题目条件出发,“$f(2x)$ 的定义域为 $[-1,1]$”即 $-1\leqslant x\leqslant 1$,而 f 能够作用的范围是 $2x$ 的范围.故而易于得出 $-2\leqslant 2x\leqslant 2$,这正是使得 f 有意义的范围,即 $f(x)$ 的定义域.

由特殊到一般,是理解抽象问题的常用策略.问题6对于学生来说是比较抽象的问题,从历年的教学中发现,学生理解比较困难.究其原因,学生对定义域和“对应法则 f 的作用范围”之间的关系容易混淆.教师通过对当 $x=-1,-\frac{4}{5},-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{4}{5},1$ 时,求对应的函数值的方法,帮助学生较为直观地理解“$f(2x)$ 的定义域为 $[-1,1]$”即 $-1\leqslant x\leqslant 1$,而 f 能够作用的范围是 $2x$ 的范围,使得 $f(2x)$ 中的“f”这一抽象符号的作用范围跃然纸上.如果在这里直接采用换元法,令 $t=2x$,强调 $2x$ 是整体变元,虽然一样得到正确的解答,却会掩盖自变量的范围和 f 作用范围之间的关系,不利于学生自主生成这类问题的解题方法,这

样处理为生成换元法奠定了基础.

3.4　应势利导,生成概念的动态机制

"在大多数数学家眼中,数学是对结构的研究,数学内容由许多结构组成,学习数学就是生成结构并运用结构"[8]的动态过程,其中形成规律的方法或解决问题的范式就是动态机制.这正吻合了史宁中教授对数学核心素养的理解,即"用数学的眼光观察数学世界,用数学的思维分析现实世界,用数学的语言表达数学世界"[7],最终达到用数学的模型解释世界.

问题 7　比较下列函数定义域和对应法则的异同.

(1)试求函数 $f(2x)=\sqrt{2x-1}$的定义域;

(2)求 $f(x)=\sqrt{x-1}$定义域.

学生容易得到二者的定义域不同.(1)的定义域是$\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$;(2)的定义域是$[1,+\infty)$.而对应法则 f 一样.

师:"x 的范围"即定义域是否一定就是"使得 f 有意义的作用范围"?

生:"使得 f 有意义的作用范围"就是"$f(x)=\sqrt{x-1}$的定义域".

至此,学生已经洞若观火.教师并未就此结束,给出了下面的问题:

问题 8　(在例 4 的条件基础上变式)已知函数 $f(2x)$的定义域为$[-1,1]$,求 $f(x+1)$的定义域,学生容易理解,$x+1$ 必须落在 f 的作用范围内,即$-2\leqslant x+1\leqslant 2$,得出$-1\leqslant x\leqslant 1$ 即 $f(x+1)$的定义域为$[-1,1]$.

问题 9　已知函数 $f\left(\frac{1}{x}\right)$的定义域为$[1,2]$,求 $f(x)$的定义域.

生:就是要找出 f 的作用范围,此题中就是$\frac{1}{x}$的取值范围,为 $f(x)$的定义域.

师:此问题可以转化为已知 $x\in[1,2]$,求$\frac{1}{x}$的取值范围.为了书写方便,可令 $t=\frac{1}{x}$,即求 t 的取值范围.

至此学生构建了换元法用以解决"整体化"问题,最终体会整体化思想,为后续的换元法求值域、最值等问题奠定了正迁移的基础.

"数学概念的生成资源开发一般是在探究解题方法的过程中进行,是例题教学的重要环节"[9].引导学生反思定义域和"使得 f 有意义的作用范围"之间的关系,并以此为依据解决问题,拓展了学生对函数定义域的二次理解.这个过程不是教师直接灌输给学生,而是不断地顺势利导,使得新的认知水到渠成.教师顺势给出问题 8,通过化归思想的不断应用,学生可以顺利接受换元法求解函数定义域问题的范式.这一范式在后续的复合函数单调性、最值等问题中还会经常使用.换元法往往让学生感到神秘.通过本题的不断转化,使学生领会到换元法纯粹是为了方便研究较为复杂式子,将其作为整体采用的一种方法.这为学生在以后的学习中灵活应用此法,提供了数学的思维策略.

4　结束语

教育是关乎学生未来发展的大计,数学教育不能太过功利.发展学生的认知结构,促进学生数学思维能力的发展,是数学教育应一贯秉持的观点.依据学生的已有认知经验,不断生成新的认知,使学生体验不断丰富的数学认知,感受思维成长的成就感和幸福感,从而不再畏惧数学,也许这就是数学教育成功的表现.

参考文献

[1] 弗赖登塔尔.作为教育任务的数学[M].陈昌平,唐瑞芬,译.上海:上海教育出版社,1992:63—80

[2] 马向真.论维特罗克的生成学习模式[J].华东师范大学学报(教育科学版),1995(2):73—81

[3] 阮小明,王琴.高中数学十大难点概念的调查研究[J].数学教育学报,2012,21(5):29—33

[4] 李祎.数学教学生成研究——一种基于认知的观点[D].南京师范大学博士论文,2005:9,10

[5] [7]理查德.来什,玛莎.兰多,埃里克.汉密尔顿.数学概念和程序的获得[M].孙昌识,苗丹民,译.济南:山东教育出版社,1991:300,309

[6] 吴有昌,高凌飚.SOLO 分类法在教学评价中的应用[J].华南师范大学学报(社会科学版),2008(3):95—99

[8] 张国祥.数学化与数学现实思想[J].数学教育学报,2005,14(2):35—36

[9] 梁栋,朱鸿玲.数学概念二次开发的实践与思考[J].数学教育学报,2015,第 24(2):83—86