C 解析：由题意知点 $A$ 的坐标为(6,5)，点 $B$ 的
坐标为(−2,3). 由中点坐标公式，得线段 $AB$ 的
中点 $C$ 的坐标为(2,4)，故点 $C$ 对应的复数为 2+
i.

3 解析：设复数 $z$ 在复平面内对应点为 $Z$. 因为
$z-1|=|z+1|$，所以点 $Z$ 到(1,0)和(−1,0)的
距离相等，即点 $Z$ 在以(1,0)和(−1,0)为端点的
线段的中垂线上，即虚轴上.

解析：复数 $z$ 在复平面内对应的点为 $Z(3m-$
$m-1)$. 由 $\frac{2}{3}<m<1$，得 $3m-2>0$，$m-1<0$.
以点 $Z$ 位于第四象限. 故选 D.

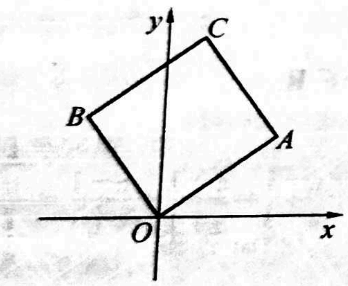
解析：由题意可知$(|z|-3)(|z|+1)=0$，即
$=3$ 或 $|z|=-1$. 因为 $|z|\geqslant 0$，所以 $|z|=3$. 所
复数 $z$ 对应的轨迹是 1 个圆.

C 解析：因为 $|z_1|=\sqrt{a^2+4}$，$|z_2|=$
$-2)^2+1^2=\sqrt{5}$. 又因 $|z_1|<|z_2|$，所以
$^2+4<\sqrt{5}$，解得 $-1<a<1$.

解析：由 $a+(b-1)i=1+i$，得 $a=1$，$b=2$，从
$\frac{+bi}{i}=\frac{1+2i}{i}=2-i$，对应点(2,−1)在第四

解析：仅③正确. 取 $z_1=1$，$z_2=i$ 可排除①. 取
$+i$，$z_2^2=1-i$，则 $z_1^2+z_2^2=2>0$，但 $z_1^2$ 与
是虚数，无法比较大小，可排除②.

解析：如图，在复平面内设复数 $z_1$，$z_2$，$z_1+$
应的点分别为 $A$，$B$，$C$，则由 $|z_1|=|z_2|=$
$+z_2|=\sqrt{2}$，得四边形 $OACB$ 是正方形，且
$z_2|=AB=\sqrt{2}$.




（第 10 题）

$_1=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$，则 $z_2=\overline{z_1}=a-bi$.
$+z_2=2a$，$z_1\cdot z_2=a^2+b^2$.
$+z_2)^2-3z_1z_2i=4-6i$，得
$a^2+b^2)i=4-6i$，
$^2=4$，
$+b^2=2$，
$b^2=1$.
$z_1$ 位于第二象限，所以 $a<0$，$b>0$.
$-1$，$b=1$.

12. 解：设 $z=x+yi(x,y\in\mathbf{R})$.
由 $|z-1|=|z-i|$，得在复平面内 $z$ 对应的点在以 1 和 i 为端点的线段垂直平分线上，所以 $x=y$，从而 $z=x(1+i)$.
又由 $z+\frac{2}{z}\in\mathbf{R}$，得 $\overline{\left(z+\frac{2}{z}\right)}=z+\frac{2}{z}$，
即 $\overline{z}+\frac{2}{\overline{z}}=z+\frac{2}{z}$，
所以 $(z-\overline{z})\left(1-\frac{2}{z\overline{z}}\right)=0$.
因为 $z\notin\mathbf{R}$，所以 $\overline{z}\neq z$，从而 $z\overline{z}=2$，即 $|z|=\sqrt{2}$.
将 $z=x(1+i)$ 代入 $|z|=\sqrt{2}$，得 $x^2=1$，
从而 $x=\pm1$，因此 $z=1+i$ 或 $z=-1-i$.

## 阶段检测（二）

1. B

2. A 解析：因为 $z_1=z_2$，所以 $\begin{cases}m^2+m+1=3,\\m^2+m-4=-2,\end{cases}$ 解得 $m=1$ 或 $m=-2$，所以 $m=1$ 是 $z_1=z_2$ 的充分不必要条件.

3. D 解析：由 $m+i=1+ni(m,n\in\mathbf{R})$，所以 $m=1$ 且 $n=1$. 则 $\frac{m+ni}{m-ni}=\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{2}=i$.

4. A 解析：$\frac{a-i}{1+i}=\frac{(a-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{(a-1)-(a+1)i}{2}$ 是纯虚数，则 $a-1=0$，$a+1\neq0$，解得 $a=1$.

5. B 解析：因为 $(x-i)i=y+2i$，$xi-i^2=y+2i$，所以 $y=1$，$x=2$，所以 $x+yi=2+i$.

6. A 解析：由条件知 $2+ai$，$b+i$ 是共轭复数，则 $a=-1$，$b=2$，即实系数一元二次方程 $x^2+px+q=0$ 的两个根是 $2\pm i$，所以 $p=-[(2+i)+(2-i)]=-4$，$q=(2+i)(2-i)=5$.

7. C 解析：$\left|\frac{z^2-2z+2}{z-1+i}\right|=\left|\frac{(z-1)^2-1}{(z-1)+i}\right|=\left|\frac{(z-1)^2+i^2}{(z-1)+i}\right|=|z-(1+i)|$，故只需求 $x^2+y^2=1$ 上的点到(1,1)的最大距离，其值为 $1+\sqrt{2}$.

8. D 解析：由复数相等知 $\begin{cases}x=3+5\cos\theta,\\y=-4+5\sin\theta,\end{cases}$ 则 $x^2+y^2=50-50\sin(\theta-\varphi)\leqslant100$（其中 $\varphi$ 为辅助角）. 所以 $x^2+y^2$ 的最大值为 100.

9. D 解析：因为 $\left|\overline{z}+\frac{1}{z}\right|=\frac{|z\overline{z}+1|}{|z|}=\frac{5}{2}$，即 $|z|^2+1=\frac{5}{2}|z|$，所以 $|z|=\frac{1}{2}$.

10. B 解析：$f(n)$ 有三个值 0，2i，−2i.

11. ABCD 解析：因为 $z=m^2-4m+(m^2-m-6)i$ 所

对应的点在第二象限，所以$\begin{cases}m^2-4m<0,\\m^2-m-6>0,\end{cases}$解得$3<m<4$. 故选 ABCD.

**12.** ABC **解析**：(1)当根为实数时，将$x=1$代入原方程得$a^2+2a+2=0$，此方程无实数解；将$x=-1$代入原方程得$a^2-4a+2=0$，解得$a=2\pm\sqrt{2}$，都符合要求.

(2)当根为虚数时，$\Delta=a(a+8)<0$，所以$-8<a<0$. 此时有$x_1\cdot x_2=|x_1|^2=|x_2|^2=1=\frac{a^2-a}{2}$，所以可得$a^2-a-2=0$，解得$a=-1$，或$a=2$(舍去). 故共有三个. 故选 ABC.

**13.** ABC **解析**：举例说明：若$z_1=4+i$，$z_2=2-2i$，则$z_1^2=15+8i$，$z_2^2=-8i$，$z_1^2+z_2^2>0$，但$z_1^2$与$-z_2^2$都是虚数，不能比较大小，故 A 错误；因为$|z_1-z_2|^2$不一定等于$(z_1-z_2)^2$，故$|z_1-z_2|$与$\sqrt{(z_1+z_2)^2-4z_1z_2}$不一定相等，B 错误；若$z_1=2+i$，$z_2=1-2i$，则$z_1^2=3+4i$，$z_2^2=-3-4i$，$z_1^2+z_2^2=0$，但$z_1=z_2=0$不成立，故 C 错误；设$z_1=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$，则$\overline{z_1}=a-bi$，故$z_1-\overline{z_1}=2bi$，当$b=0$时是零，当$b\neq0$时，是纯虚数. 故 D 正确. 故选 ABC.

**14.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **解析**：由$z^3=(t+i)^3=t^3+3t^2i+3ti^2+i^3=(t^3-3t)+(3t^2-1)i\in\mathbf{R}$，得$t^2=\frac{1}{3}$. 又$t>0$，所以$t=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

**15.** $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ **解析**：由点$(\cos\theta,\sin\theta)$在第二象限，得$\begin{cases}\cos\theta<0,\\\sin\theta>0.\end{cases}$又$\theta\in[0,2\pi]$，所以$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$.

**16.** $-1$ **解析**：由题意，得$z$是纯虚数，所以$\begin{cases}a^2-1=0,\\a^2-3a+2\neq0,\end{cases}$解得$a=-1$.

**17.** $-1$ **解析**：设$z=\frac{z_1}{z_2}$，则由条件可得$z^2+z+1=0$，从而$z^3=z^2z=(-1-z)\cdot z=-z-z^2=1$. 所以$\left(\frac{z_1}{z_1+z_2}\right)^2+\left(\frac{z_2}{z_1+z_2}\right)^2=\left(\frac{z}{1+z}\right)^2+\left(\frac{1}{1+z}\right)^2=\frac{z^2+1}{(1+z)^2}=\frac{-z}{(-z^2)^2}=-\frac{1}{z^3}=-1$.

**18.** **解**：(1)$\frac{i}{1+i}\div(1+\sqrt{3}i)^2=\frac{i(1-i)}{(1+i)(1-i)}\div[(1+\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i)]$

$=\frac{i-i^2}{2}\div(1+3i^2+2\sqrt{3}i)=\frac{1+i}{2}\div(-2+2\sqrt{3}i)$

$=\frac{(1+i)(-4-4\sqrt{3}i)}{(-4+4\sqrt{3}i)(-4-4\sqrt{3}i)}$

$=\frac{-4-4\sqrt{3}i-4i-4\sqrt{3}i^2}{64}$

$=\frac{4(-1+\sqrt{3})-4(1+\sqrt{3})i}{64}$

$=\frac{-1+\sqrt{3}}{16}-\frac{1+\sqrt{3}}{16}i$.

(2)解法一：$\left(\frac{1+i}{1-\sqrt{3}i}\right)^3=\left[\frac{(1+i)(1+\sqrt{3}i)}{(1-\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i)}\right]^3$

$=\left(\frac{1+\sqrt{3}i+i+\sqrt{3}i^2}{4}\right)^3=\frac{[(1-\sqrt{3})+(1+\sqrt{3})i]^3}{4^3}=$

$\frac{(1-\sqrt{3})^3+3(1-\sqrt{3})^2(1+\sqrt{3})i+3(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})^2i^2+(1+\sqrt{3})^3i^3}{64}$

$\frac{16-16i}{64}=\frac{1-i}{4}$.

解法二：$\left(\frac{1+i}{1-\sqrt{3}i}\right)^3=\frac{(1+i)^3}{(1-\sqrt{3}i)^3}=\frac{1+3i+3i^2+i^3}{1-3\sqrt{3}i-9+3\sqrt{3}i}$

$=\frac{-2+2i}{-8}=\frac{1-i}{4}$.

**19.** **解**：设$z=x+yi(x,y\in\mathbf{R})$，则$\bar{z}=x-yi$.

于是由$z+\bar{z}=4$，$z\cdot\bar{z}=8$，得$\begin{cases}2x=4,\\x^2+y^2=8,\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=2,\\y=\pm2,\end{cases}$所以$z=2+2i$或$z=2-2i$，$\frac{\bar{z}}{z}=\frac{2-2i}{2+2i}=-i$或$\frac{\bar{z}}{z}=\frac{2+2i}{2-2i}=i$.

**20.** (1)**解**：因为$z$是虚数，所以可设$z=x+yi$，$x$，$y\in\mathbf{R}$，且$y\neq0$，

所以$m=z+\frac{1}{z}=x+yi+\frac{1}{x+yi}=x+yi+\frac{x-yi}{x^2+y^2}=x+\frac{x}{x^2+y^2}+\left(y-\frac{y}{x^2+y^2}\right)i$.

因为$m$是实数，且$y\neq0$，所以$y-\frac{y}{x^2+y^2}=0$，

所以$x^2+y^2=1$，所以$|z|=1$，此时$m=2x$.

因为$-1<m<2$，

所以$-1<2x<2$，从而有$-\frac{1}{2}<x<1$.

所以$|z|=1$，$z$的实部的取值范围是$\left(-\frac{1}{2},1\right)$.

(2)**证明**：结合(1)可知$u=\frac{1-z}{1+z}=\frac{1-(x+yi)}{1+(x+yi)}=\frac{(1-x-yi)(1+x-yi)}{(1+x)^2+y^2}=-\frac{y}{(1+x)}i$.

又因为$x\in\left(-\frac{1}{2},1\right)$，$y\neq0$，

所以$-\frac{y}{1+x}\neq0$，所以$u$为纯虚数.

(3)**解**：$m-u^2=2x-\left(-\frac{y}{1+x}i\right)^2=2x+$

$\left(\frac{y}{1+x}\right)^2=2x+\frac{1-x^2}{(1+x)^2}=2x-1+\frac{2}{1+x}=$

$2(x+1)+\frac{2}{1+x}-3.$

因为$-\frac{1}{2}<x<1$,所以$1+x>0$.

所以$2(x+1)+\frac{2}{1+x}-3\geqslant 2\sqrt{2(x+1)\cdot\frac{2}{1+x}}$

$-3=1.$

当且仅当$2(x+1)=\frac{2}{1+x}$,即$x=0$($x=-2$舍去)时,等号成立.

故$m-u^2$的最小值为1,此时$z=\pm i$.

**21. 解**:(1)$w^3=\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3=\frac{1}{8}(-1+\sqrt{3}i)^3=$

$\frac{1}{8}[(-1)^3+3(-1)^2\sqrt{3}i+3(-1)(\sqrt{3}i)^2+$

$(\sqrt{3}i)^3]=\frac{1}{8}(-1+3\sqrt{3}i+9-3\sqrt{3}i)=1.$

(2)由(1)得$w^3=1$,所以$(1-w)(1+w+w^2)=0$. 因为$w\neq 1$,所以$1+w+w^2=0$,从而$(1-w+w^2)(1+w+w^2)=0$.

**22. 解**:由$|z|=\sqrt{a^2+b^2}=2$,得$a^2+b^2=4$.

因为复数$0,z,\bar{z}$对应的点构成正三角形,所以有$|z-\bar{z}|=|z|$,将$z=a+bi$代入,得$|b|=1$.

又由于$z$所对应的点在第一象限,所以$a>0,b>0$. 因此$a=\sqrt{3},b=1$.

**23. 解**:(1)由$x+\frac{1}{x}=0$,得$x^2=-1$,所以$z=\pm i$.

所以$M_z=\{-1,1,-i,i\}$.

(2)取$z=w=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$,则$z^1=w=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$,

$z^2=w^2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$,$z^3=w^3=1$,所以$z^{3m}=z^3=1$,$z^{3m+1}=z^1=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$,$z^{3m+2}=z^2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i(m\in\mathbf{N})$.

故$z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$满足题意.(取$z=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$也满足题意)

## 选修 2—2 测试(A)

**1.** D **解析**:由$\begin{cases}2+a=0,\\b+1=0,\end{cases}$得$\begin{cases}a=-2,\\b=-1.\end{cases}$所以$a+bi=$

**3.** D **解析**:由$(z-3)(2-i)=5$得,$z-3=\frac{5}{2-i}=$

$2+i$,所以$z=5+i$,所以$\bar{z}=5-i$.

**4.** A **解析**:因为$\overrightarrow{O_0P_0}=\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OO_0}$对应的复数是$-1$,所以点$P_0$对应的复数,即$\overrightarrow{OP_0}$对应的复数是$-1+(1-i)=-i$.

**5.** B **解析**:因为复数$z=a^2-1+(a+1)i(a\in\mathbf{R})$是纯虚数,所以$\begin{cases}a^2-1=0,\\a+1\neq 0,\end{cases}$解得$a=1$. 这时$z=2i$,

于是复数$\frac{1}{2z-3a}=\frac{1}{4i-3}=-\frac{3}{25}-\frac{4}{25}i$,故其虚部等于$-\frac{4}{25}$.

**6.** B **解析**:因为$f'(x)=3x^2-2ax-b$,所以

$\begin{cases}3-2a-b=0,\\1-a-b+a^2=10,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=3,\\b=-3\end{cases}$或$\begin{cases}a=-4,\\b=11.\end{cases}$经检验$a=3,b=-3$不合题意,应舍去.

**7.** D **解析**:函数$f(x)=x(\ln x-ax)$有两个极值点$x_1,x_2(x_1<x_2)$,则$f'(x)=\ln x-2ax+1$有两个零点,即方程$\ln x=2ax-1$有两个根,由数形结合易知$0<a<\frac{1}{2}$且$0<x_1<1<x_2$. 因为在$(x_1,$

$x_2)$上$f(x)$递增,所以$f(x_1)<f(1)<f(x_2)$,即$f(x_1)<-a<f(x_2)$,所以$f(x_1)<0,f(x_2)>$

$-\frac{1}{2}$. 故选D.

**8.** D **解析**:因为$y'=1-\frac{2x}{1+x^2}=\frac{(x-1)^2}{1+x^2}\geqslant 0$,且在有限个点上等号成立,所以函数$f(x)$在定义域$\mathbf{R}$上为增函数,故其不存在极值.

**9.** C **解析**:由题意得$f'(x)=\frac{x-3}{3x}$,令$f'(x)>$

$x>3$;令$f'(x)<0$得$0<x<3$;令$f'(x)=$

$x=3$,故知函数$f(x)$在区间$(0,3)$上为减函

区间$(3,+\infty)$上为增函数,在点$x=3$处

值$1-\ln 3<0$;又$f(1)=\frac{1}{3}>0,f(e)=\frac{e}{3}$

$0,f\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{3e}+1>0$,故$f(x)$在区间$($

无零点,在区间$(1,e)$上有零点.

**10.** C **解析**:$f'(x)=(x^a-ax)'=ax^{a-}$

$a(x^{a-1}-1)$. 令$a(x^{a-1}-1)=0$,因为

所以$x=1$. 当$0<x<1$时,$f'(x)>0$

时,$f'(x)<0$. 所以$x=1$是$[0,+\infty)$

值点.

**11** ABCD **解析**:$f'(x)=x^2-(2b+1)$