微课四　利用导数研究函数的零点

题型分类突破

题型一　判断、证明或讨论函数零点的个数

【例 1】(2019 全国Ⅰ卷)已知函数 $f(x)=2\sin x-x\cos x-x$，$f'(x)$为 $f(x)$的导数.

(1)证明：$f'(x)$在区间$(0,\pi)$存在唯一零点；

(2)若 $x\in[0,\pi]$时，$f(x)\geqslant ax$，求 a 的取值范围.

(1)证明　设 $g(x)=f'(x)$，则 $g(x)=\cos x+x\sin x-1$，

$g'(x)=-\sin x+\sin x+x\cos x=x\cos x$.

当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时，$g'(x)>0$；

当 $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$时，$g'(x)<0$，

所以 $g(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上单调递增，在$\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$上单调递减.

又 $g(0)=0$，$g\left(\frac{\pi}{2}\right)>0$，$g(\pi)=-2$，

故 $g(x)$在$(0,\pi)$存在唯一零点.

所以 $f'(x)$在区间$(0,\pi)$存在唯一零点.

(2)解　由题设知 $f(\pi)\geqslant a\pi$，$f(\pi)=0$，可得 $a\leqslant 0$.

由(1)知，$f'(x)$在$(0,\pi)$只有一个零点，设为 x_0，

当 $x\in(0,x_0)$时，$f'(x)>0$；当 $x\in(x_0,\pi)$时，$f'(x)<0$，

所以 $f(x)$在$(0,x_0)$上单调递增，在(x_0,π)上单调递减.

又 $f(0)=0$，$f(\pi)=0$，所以当 $x\in[0,\pi]$时，$f(x)\geqslant 0$.

又当 $a\leqslant 0$，$x\in[0,\pi]$时，$ax\leqslant 0$，故 $f(x)\geqslant ax$.

因此，a 的取值范围是$(-\infty,0]$.

【例 2】(2021 贵阳调研)已知函数 $f(x)=e^x-ax-1$，其中 e 为自然对数的底数.

(1)求 $f(x)$的单调区间；

(2)讨论函数 $f(x)$在区间$[0,1]$上零点的个数.

解　(1)因为 $f(x)=e^x-ax-1$，得 $f'(x)=e^x-a$，

当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)>0$ 恒成立，

所以 $f(x)$单调增区间为$(-\infty, +\infty)$，无单调减区间.

当 $a>0$ 时，令 $f'(x)<0$，得 $x<\ln a$，

令 $f'(x)>0$，得 $x>\ln a$，

所以 $f(x)$的单调递减区间为$(-\infty, \ln a)$，单调递增区间为$(\ln a, +\infty)$.

(2)由(1)知，$f'(x)=e^x-a$.

①当 $a\leqslant 1$ 时，$f(x)$在区间$[0, 1]$上单调递增且 $f(0)=0$，所以 $f(x)$在区间$[0, 1]$上有一个零点.

②当 $a\geqslant e$ 时，$f(x)$在区间$[0, 1]$上单调递减且 $f(0)=0$，所以 $f(x)$在区间$[0, 1]$上有一个零点.

③当 $1<a<e$ 时，$f(x)$在区间$[0, \ln a]$上单调递减，在$(\ln a, 1]$上单调递增，而 $f(1)=e-a-1$.

当 $e-a-1\geqslant 0$，即 $1<a\leqslant e-1$ 时，$f(x)$在区间$[0, 1]$上有两个零点.

当 $e-a-1<0$，即 $e-1<a<e$ 时，$f(x)$在区间$[0, 1]$上有一个零点.

综上可知，当 $a\leqslant 1$ 或 $a>e-1$ 时，$f(x)$在$[0, 1]$上有一个零点，当 $1<a\leqslant e-1$ 时，$f(x)$在区间$[0, 1]$上有两个零点.

感悟升华　利用导数求函数的零点常用方法

(1)构造函数 $g(x)$，利用导数研究 $g(x)$的性质，结合 $g(x)$的图象，判断函数零点的个数.

(2)利用零点存在定理，先判断函数在某区间有零点，再结合图象与性质确定函数有多少个零点.

【训练 1】已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-a(x^2+x+1)$.

(1)若 $a=3$，求 $f(x)$的单调区间；

(2)证明：$f(x)$只有一个零点.

(1)**解**　当 $a=3$ 时，$f(x)=\frac{1}{3}x^3-3x^2-3x-3$，$f'(x)=x^2-6x-3$.

令 $f'(x)=0$，解得 $x=3-2\sqrt{3}$或 $x=3+2\sqrt{3}$.

当 $x\in(-\infty, 3-2\sqrt{3})\cup(3+2\sqrt{3}, +\infty)$时，$f'(x)>0$；

当 $x\in(3-2\sqrt{3}, 3+2\sqrt{3})$时，$f'(x)<0$.

故 $f(x)$在$(-\infty, 3-2\sqrt{3})$，$(3+2\sqrt{3}, +\infty)$单调递增，在$(3-2\sqrt{3}, 3+2\sqrt{3})$单调

递减.

(2)**证明** 由于 $x^2+x+1>0$，所以 $f(x)=0$ 等价于 $\frac{x^3}{x^2+x+1}-3a=0$.

设 $g(x)=\frac{x^3}{x^2+x+1}-3a$，则 $g'(x)=\frac{x^2(x^2+2x+3)}{(x^2+x+1)^2}\geqslant 0$，仅当 $x=0$ 时 $g'(x)=0$，

所以 $g(x)$在$(-\infty,+\infty)$单调递增.

故 $g(x)$至多有一个零点，从而 $f(x)$至多有一个零点.

又 $f(3a-1)=-6a^2+2a-\frac{1}{3}=-6\left(a-\frac{1}{6}\right)^2-\frac{1}{6}<0$，

$f(3a+1)=\frac{1}{3}>0$，故 $f(x)$有一个零点.

综上，$f(x)$只有一个零点.

题型二　根据零点情况求参数范围

【例 3】已知函数 $f(x)=2\ln x-x^2+ax(a\in\mathbf{R})$，若函数 $g(x)=f(x)-ax+m$ 在$\left[\frac{1}{e},e\right]$上有两个零点，求实数 m 的取值范围.

解 $g(x)=2\ln x-x^2+m$，

则 $g'(x)=\frac{2}{x}-2x=\frac{-2(x+1)(x-1)}{x}$.

因为 $x\in\left[\frac{1}{e},e\right]$，所以当 $g'(x)=0$ 时，$x=1$.

当$\frac{1}{e}\leqslant x<1$ 时，$g'(x)>0$；当 $1<x\leqslant e$ 时，$g'(x)<0$.

故 $g(x)$在 $x=1$ 处取得极大值 $g(1)=m-1$.

又 $g\left(\frac{1}{e}\right)=m-2-\frac{1}{e^2}$，$g(e)=m+2-e^2$，

$g(e)-g\left(\frac{1}{e}\right)=4-e^2+\frac{1}{e^2}<0$，则 $g(e)<g\left(\frac{1}{e}\right)$，

所以 $g(x)$在$\left[\frac{1}{e},e\right]$上的最小值是 $g(e)$.

$g(x)$在$\left[\frac{1}{e},e\right]$上有两个零点的条件是

$\begin{cases} g(1)=m-1>0, \\ g\left(\frac{1}{e}\right)=m-2-\frac{1}{e^2}\leqslant 0, \end{cases}$ 解得 $1<m\leqslant 2+\frac{1}{e^2}$，

所以实数 m 的取值范围是$\left(1，2+\frac{1}{e^2}\right]$.

感悟升华 1.函数零点个数可转化为两个函数图象的交点个数，根据图象的几何直观求解.

2.与函数零点有关的参数范围问题，往往利用导数研究函数的单调区间和极值点，并结合特殊点判断函数的大致图象，进而求出参数的取值范围.也可分离出参数，转化为两函数图象的交点情况.

【训练 2】(2020 全国Ⅲ卷)已知函数 $f(x)=x^3-kx+k^2$.

(1)讨论 $f(x)$的单调性；

(2)若 $f(x)$有三个零点，求 k 的取值范围.

解 (1)$f'(x)=3x^2-k$.

当 $k=0$ 时，$f(x)=x^3$，故 $f(x)$在$(-\infty，+\infty)$单调递增.

当 $k<0$ 时，$f'(x)=3x^2-k>0$，故 $f(x)$在$(-\infty，+\infty)$单调递增.

当 $k>0$ 时，令 $f'(x)=0$，得 $x=\pm\frac{\sqrt{3k}}{3}$.

当 $x\in\left(-\infty，-\frac{\sqrt{3k}}{3}\right)$时，$f'(x)>0$；

当 $x\in\left(-\frac{\sqrt{3k}}{3}，\frac{\sqrt{3k}}{3}\right)$时，$f'(x)<0$；

当 $x\in\left(\frac{\sqrt{3k}}{3}，+\infty\right)$时，$f'(x)>0$.

故函数 $f(x)$在$\left(-\infty，-\frac{\sqrt{3k}}{3}\right)$，$\left(\frac{\sqrt{3k}}{3}，+\infty\right)$单调递增，

在$\left(-\frac{\sqrt{3k}}{3}，\frac{\sqrt{3k}}{3}\right)$单调递减.

(2)由(1)知，当 $k\leqslant 0$ 时，$f(x)$在$(-\infty，+\infty)$单调递增，$f(x)$不可能有三个零点.

当 $k>0$ 时，$x=-\frac{\sqrt{3k}}{3}$为 $f(x)$的极大值点，

$x=\frac{\sqrt{3k}}{3}$为 $f(x)$的极小值点.

此时，$-k-1<-\frac{\sqrt{3k}}{3}<\frac{\sqrt{3k}}{3}<k+1$ 且 $f(-k-1)<0$，$f(k+1)>0$，$f\left(-\frac{\sqrt{3k}}{3}\right)>0$.

根据 $f(x)$的单调性，当且仅当 $f\left(\frac{\sqrt{3k}}{3}\right)<0$，$f(x)$有三个零点，则 $k^2-\frac{2k\sqrt{3k}}{9}<0$，解之

得 $k<\frac{4}{27}$.

因此 k 的取值范围为$\left(0,\ \frac{4}{27}\right)$.

题型三　与函数零点相关的综合问题

【例 4】设函数 $f(x)=e^{2x}-a\ln x$.

(1)讨论 $f(x)$的导函数 $f'(x)$零点的个数；

(2)证明：当 $a>0$ 时，$f(x)\geqslant 2a+a\ln \frac{2}{a}$.

(1)**解**　$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，$f'(x)=2e^{2x}-\frac{a}{x}(x>0)$.

当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)>0$，$f'(x)$没有零点；

当 $a>0$ 时，因为 $y=e^{2x}$ 单调递增，$y=-\frac{a}{x}$单调递增，

所以 $f'(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增.

又 $f'(a)>0$，当 b 满足 $0<b<\frac{a}{4}$，且 $b<\frac{1}{4}$时，$f'(b)<0$，

(讨论 $a\geqslant 1$ 或 $a<1$ 来检验，

①当 $a\geqslant 1$ 时，则 $0<b<\frac{1}{4}$,

$f'(b)=2e^{2b}-\frac{a}{b}<2e^{\frac{1}{2}}-4a<2e^{\frac{1}{2}}-4<0$;

②当 $a<1$ 时，则 $0<b<\frac{a}{4}$，$f'(b)=2e^{2b}-\frac{a}{b}<2e^{\frac{a}{2}}-4<2e^{\frac{1}{2}}-4<0$，综上，$f'(b)<0$.)

故当 $a>0$ 时，$f'(x)$存在唯一零点.

(2)**证明**　由(1)，可设 $f'(x)$在$(0,+\infty)$上的唯一零点为 x_0,

当 $x\in(0,x_0)$时，$f'(x)<0$；当 $x\in(x_0,+\infty)$时，$f'(x)>0$.

故 $f(x)$在$(0,x_0)$上单调递减，在$(x_0,+\infty)$上单调递增，

所以当 $x=x_0$ 时，$f(x)$取得最小值，最小值为 $f(x_0)$.

由于 $2e^{2x_0}-\frac{a}{x_0}=0$,

所以 $f(x_0)=\frac{a}{2x_0}+2ax_0+a\ln \frac{2}{a}\geqslant 2a+a\ln \frac{2}{a}$.

故当 $a>0$ 时，$f(x)\geqslant 2a+a\ln \frac{2}{a}$.

感悟升华　1.在(1)中，当 $a>0$ 时，$f'(x)$在$(0，+\infty)$上单调递增，从而 $f'(x)$在$(0，+\infty)$上至多有一个零点，问题的关键是找到 b，使 $f'(b)<0$.

2.由(1)知，函数 $f'(x)$存在唯一零点 x_0，则 $f(x_0)$为函数的最小值，从而把问题转化为证明 $f(x_0)\geqslant 2a+a\ln \dfrac{2}{a}$.

【训练 3】已知函数 $f(x)=(x-1)\ln x-x-1$.

证明：(1)$f(x)$存在唯一的极值点；

(2)$f(x)=0$ 有且仅有两个实根，且两个实根互为倒数.

证明　(1)$f(x)$的定义域为$(0，+\infty)$.

$f'(x)=\dfrac{x-1}{x}+\ln x-1=\ln x-\dfrac{1}{x}$.

因为 $y=\ln x$ 在$(0，+\infty)$上单调递增，$y=\dfrac{1}{x}$在$(0，+\infty)$上单调递减，

所以 $f'(x)$在$(0，+\infty)$上单调递增.

又 $f'(1)=-1<0$，$f'(2)=\ln 2-\dfrac{1}{2}=\dfrac{\ln 4-1}{2}>0$，

故存在唯一 $x_0\in(1，2)$，使得 $f'(x_0)=0$.

又当 $x<x_0$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减，

当 $x>x_0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，

因此，$f(x)$存在唯一的极值点.

(2)由(1)知 $f(x_0)<f(e)=-2$，又 $f(e^2)=e^2-3>0$，

所以 $f(x)=0$ 在$(x_0，+\infty)$内存在唯一根 $x=\alpha$.

由 $\alpha>x_0>1$ 得$\dfrac{1}{\alpha}<1<x_0$.

又 $f\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)=\left(\dfrac{1}{\alpha}-1\right)\ln\dfrac{1}{\alpha}-\dfrac{1}{\alpha}-1=\dfrac{f(\alpha)}{\alpha}=0$，

故$\dfrac{1}{\alpha}$是 $f(x)=0$ 在$(0，x_0)$的唯一根.

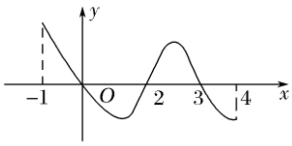
综上，$f(x)=0$ 有且仅有两个实根，且两个实根互为倒数.

题型跟踪训练

1.已知函数 $f(x)$的定义域为$[-1，4]$，部分对应值如下表：

x	-1	0	2	3	4
$f(x)$	1	2	0	2	0

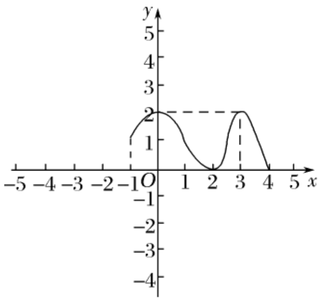
$f(x)$的导函数 $y=f'(x)$的图象如图所示.当 $1<a<2$ 时，函数 $y=f(x)-a$ 的零点的个数为(　　)



A.1　　　B.2　　　C.3　　　D.4

答案　D

解析　根据导函数图象，知 2 是函数的极小值点，函数 $y=f(x)$的大致图象如图所示.



由于 $f(0)=f(3)=2$，$1<a<2$，所以 $y=f(x)-a$ 的零点个数为 4.

2.(2020 衡水调研)已知函数 $f(x)=(x^2-2x)e^x$，若方程 $f(x)=a$ 有 3 个不同的实数解 x_1，x_2，$x_3(x_1<x_2<x_3)$，则$\dfrac{a}{x_2-2}$的取值范围是(　　)

A.$\left[-\dfrac{1}{e}，0\right)$　　　B.$\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{e^{\sqrt{2}}}，0\right)$

C.$\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{e^{\sqrt{2}}}，\sqrt{2}e^{\sqrt{2}}\right)$　　　D.$(0，\sqrt{2}e^{\sqrt{2}})$

答案　A

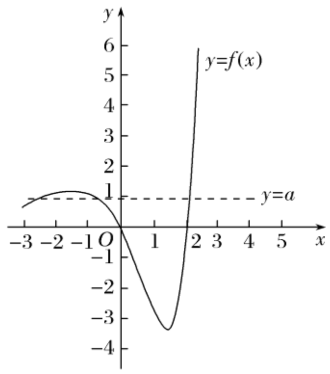
解析　因为 $f(x)=(x^2-2x)e^x$，所以 $f'(x)=(x^2-2)e^x$.

令 $f'(x)=0$，解得 $x=\pm\sqrt{2}$.

当 $x>\sqrt{2}$或 $x<-\sqrt{2}$时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$单调递增，

当$-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$单调递减，

故得 $f(x)$的大致图象如图所示.



结合图象可得$-\sqrt{2}<x_2<0$.

又$\frac{a}{x_2-2}=\frac{f(x_2)}{x_2-2}=x_2e^{x_2}$,故设 $g(x)=xe^x$, $-\sqrt{2}<x<0$,

则 $g'(x)=(x+1)e^x$.

所以 $g(x)$在$(-\sqrt{2}，-1)$上单调递减，在$(-1，0)$上单调递增，

由 $g(-1)=-\frac{1}{e}$，$g(-\sqrt{2})=-\sqrt{2}e^{-\sqrt{2}}$，$g(0)=0$，

可得$\frac{a}{x_2-2}$的取值范围为$\left[-\frac{1}{e}，0\right)$.

3.(**多选题**)(2021 临沂调研)已知函数 $f(x)$对于任意 $x\in\mathbf{R}$，均满足 $f(x)=f(2-x)$，当 $x\leqslant1$ 时，$f(x)=\begin{cases}\ln x，0<x\leqslant1，\\ e^x，x\leqslant0，\end{cases}$(其中 e 为自然对数的底数)，若函数 $g(x)=m|x|-2-f(x)$，则下列有关函数 $g(x)$的零点个数问题中错误的为(　　)

A.若 $g(x)$恰有两个零点，则 $m<0$

B.若 $g(x)$恰有三个零点，则$\frac{3}{2}<m<e$

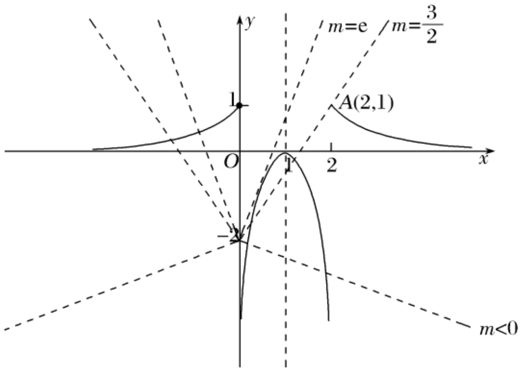
C.若 $g(x)$恰有四个零点，则 $0<m<1$

D.不存在 m，使得 $g(x)$恰有四个零点

答案　ACD

解析　由 $f(x)=f(2-x)$知 $f(x)$关于直线 $x=1$ 对称，作出 $f(x)$的图象如图所示.令 $g(x)=0$，即 $m|x|-2=f(x)$，设函数 $h(x)=m|x|-2$，则函数 $g(x)$的零点个数即函数 $y=f(x)$的图象与函数 $y=h(x)$的图象的交点个数.因为 $h(-x)=h(x)$，所以函数 $y=h(x)$是偶函数，所以 $y=h(x)$的图象关于 y 轴对称，且恒过定点$(0，-2)$.当函数 $y=h(x)$的图象过点 $A(2，1)$时，$m=\frac{3}{2}$.过点$(0，-2)$作函数 $y=\ln x(0<x<1)$图象的切线，设切点为$(x_0，\ln x_0)$，因为 $y=\ln x$，所以 $y'=\frac{1}{x}$，所以函数 $y=\ln x$ 的图象在点$(x_0，\ln x_0)$处的切线方程为 $y-\ln x_0=\frac{1}{x_0}(x-x_0)$，又切线过点$(0，-2)$，所以 $x_0=\frac{1}{e}$，所以切线的斜率为 e，即当 $m=e$ 时，$y=h(x)$的图象与函数 $y=\ln x(0<x<1)$的图象相切.若 $g(x)$恰有两个零点，由图可得 $m\leqslant0$，或 $m=e$，所以选项 A 错误；若 $g(x)$

恰有三个零点，由图可得$\frac{3}{2}<m<e$，所以选项 B 正确；若 $g(x)$恰有四个零点，由图可得 $0<m\leqslant\frac{3}{2}$，所以选项 C，D 错误.故选 B.



4.设函数 $f(x)=\ln x+\frac{m}{x}$，m 为正常数.试讨论函数 $g(x)=f'(x)-\frac{x}{3}$零点的个数.

解　由题设 $g(x)=f'(x)-\frac{x}{3}=\frac{1}{x}-\frac{m}{x^2}-\frac{x}{3}(x>0)$，

令 $g(x)=0$，得 $m=-\frac{1}{3}x^3+x(x>0)$.

转化为函数 $y=m$ 与 $y=-\frac{1}{3}x^3+x$ 的图象的交点情况.

设 $\varphi(x)=-\frac{1}{3}x^3+x(x>0)$，

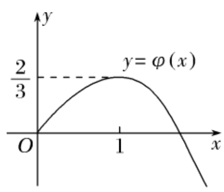
则 $\varphi'(x)=-x^2+1=-(x-1)(x+1)$，

当 $x\in(0，1)$时，$\varphi'(x)>0$，$\varphi(x)$在$(0，1)$上单调递增；

当 $x\in(1，+\infty)$时，$\varphi'(x)<0$，$\varphi(x)$在$(1，+\infty)$上单调递减，

∴$x=1$ 是 $\varphi(x)$唯一的极值点，且是极大值点，因此 $x=1$ 也是 $\varphi(x)$的最大值点，

∴$\varphi(x)$的最大值为 $\varphi(1)=\frac{2}{3}$.



结合 $y=\varphi(x)$的图象(如图)，可知

①当 $m>\frac{2}{3}$时，函数 $g(x)$无零点；

②当 $m=\frac{2}{3}$时，函数 $g(x)$有且只有一个零点；

③当 $0<m<\frac{2}{3}$时，函数 $g(x)$有两个零点；

综上所述，当 $m>\frac{2}{3}$时，函数 $g(x)$无零点；

当实数 $m=\dfrac{2}{3}$时，函数 $g(x)$有且只有一个零点；

当 $0<m<\dfrac{2}{3}$时，函数 $g(x)$有两个零点.

5.已知函数 $f(x)=e^x+(a-e)x-ax^2$.

(1)当 $a=0$ 时，求函数 $f(x)$的极值；

(2)若函数 $f(x)$在区间(0，1)内存在零点，求实数 a 的取值范围.

解　(1)当 $a=0$ 时，$f(x)=e^x-ex$，

则 $f'(x)=e^x-e$，$f'(1)=0$，

当 $x<1$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；

当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，

所以 $f(x)$在 $x=1$ 处取得极小值，且极小值为 $f(1)=0$，无极大值.

(2)由题意得 $f'(x)=e^x-2ax+a-e$，

设 $g(x)=e^x-2ax+a-e$，则 $g'(x)=e^x-2a$.

若 $a=0$，则 $f(x)$的最大值 $f(1)=0$，故由(1)得 $f(x)$在区间(0，1)内没有零点.

若 $a<0$，则 $g'(x)=e^x-2a>0$，故函数 $g(x)$在区间(0，1)内单调递增.

又 $g(0)=1+a-e<0$，$g(1)=-a>0$，所以存在 $x_0\in(0，1)$，使 $g(x_0)=0$.

故当 $x\in(0，x_0)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；

当 $x\in(x_0，1)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增.

因为 $f(0)=1$，$f(1)=0$，所以当 $a<0$ 时，$f(x)$在区间(0，1)内存在零点.

若 $a>0$，由(1)得当 $x\in(0，1)$时，$e^x>ex$.

则 $f(x)=e^x+(a-e)x-ax^2>ex+(a-e)x-ax^2=a(x-x^2)>0$，

此时函数 $f(x)$在区间(0，1)内没有零点.

综上，实数 a 的取值范围为$(-\infty，0)$.

6.(2020 全国Ⅲ卷)设函数 $f(x)=x^3+bx+c$，曲线 $y=f(x)$在点$\left(\dfrac{1}{2}，f\left(\dfrac{1}{2}\right)\right)$处的切线与 y 轴垂直.

(1)求 b；

(2)若 $f(x)$有一个绝对值不大于 1 的零点，证明：$f(x)$所有零点的绝对值都不大于 1.

(1)**解**　$f'(x)=3x^2+b$.

依题意得 $f'\left(\frac{1}{2}\right)=0$，即$\frac{3}{4}+b=0$，故 $b=-\frac{3}{4}$.

(2)**证明** 由(1)知 $f(x)=x^3-\frac{3}{4}x+c$，$f'(x)=3x^2-\frac{3}{4}$.令 $f'(x)=0$，解得 $x=-\frac{1}{2}$或 $x=\frac{1}{2}$.

$f'(x)$与 $f(x)$的情况为：

x	$\left(-\infty,\ -\frac{1}{2}\right)$	$-\frac{1}{2}$	$\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2},\ +\infty\right)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$		$c+\frac{1}{4}$		$c-\frac{1}{4}$	

因为 $f(1)=f\left(-\frac{1}{2}\right)=c+\frac{1}{4}$,

所以当 $c<-\frac{1}{4}$时，$f(x)$只有大于 1 的零点.

因为 $f(-1)=f\left(\frac{1}{2}\right)=c-\frac{1}{4}$,

所以当 $c>\frac{1}{4}$时，$f(x)$只有小于-1 的零点.

由题设可知$-\frac{1}{4}\leqslant c\leqslant\frac{1}{4}$.

当 $c=-\frac{1}{4}$时，$f(x)$只有两个零点$-\frac{1}{2}$和 1.

当 $c=\frac{1}{4}$时，$f(x)$只有两个零点-1 和$\frac{1}{2}$.

当$-\frac{1}{4}<c<\frac{1}{4}$时，$f(x)$有三个零点 x_1，x_2，x_3，且 $x_1\in\left(-1,\ -\frac{1}{2}\right)$，$x_2\in\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$，$x_3\in\left(\frac{1}{2},\ 1\right)$.

综上，若 $f(x)$有一个绝对值不大于 1 的零点，则 $f(x)$所有零点的绝对值都不大于 1.

7.(2019 全国Ⅰ卷)已知函数 $f(x)=\sin x-\ln(1+x)$，$f'(x)$为 $f(x)$的导数.证明：

(1)$f'(x)$在区间$\left(-1,\ \frac{\pi}{2}\right)$存在唯一极大值点；

(2)$f(x)$有且仅有 2 个零点.

证明 (1)设 $g(x)=f'(x)$,

则 $g(x)=\cos x-\dfrac{1}{1+x}$，$g'(x)=-\sin x+\dfrac{1}{(1+x)^2}$.

当 $x\in\left(-1，\dfrac{\pi}{2}\right)$时，$g'(x)$单调递减，而 $g'(0)>0$，$g'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)<0$，可得 $g'(x)$在$\left(-1，\dfrac{\pi}{2}\right)$有唯一零点，设为 α.

则当 $x\in(-1，\alpha)$时，$g'(x)>0$；当 $x\in\left(\alpha，\dfrac{\pi}{2}\right)$时，$g'(x)<0$.

所以 $g(x)$在$(-1，\alpha)$单调递增，在$\left(\alpha，\dfrac{\pi}{2}\right)$单调递减，故 $g(x)$在$\left(-1，\dfrac{\pi}{2}\right)$存在唯一极大值点，即 $f'(x)$在$\left(-1，\dfrac{\pi}{2}\right)$存在唯一极大值点.

(2)$f(x)$的定义域为$(-1，+\infty)$.

①当 $x\in(-1，0]$时，由(1)知，$f'(x)$在$(-1，0)$单调递增，而 $f'(0)=0$，所以当 $x\in(-1，0)$时，$f'(x)<0$，故 $f(x)$在$(-1，0)$单调递减.

又 $f(0)=0$，从而 $x=0$ 是 $f(x)$在$(-1，0]$的唯一零点.

②当 $x\in\left(0，\dfrac{\pi}{2}\right]$时，由(1)知，$f'(x)$在$(0，\alpha)$单调递增，在$\left(\alpha，\dfrac{\pi}{2}\right)$单调递减，而 $f'(0)=0$，$f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)<0$，所以存在 $\beta\in\left(\alpha，\dfrac{\pi}{2}\right)$，使得 $f'(\beta)=0$，且当 $x\in(0，\beta)$时，$f'(x)>0$；当 $x\in\left(\beta，\dfrac{\pi}{2}\right)$时，$f'(x)<0$.故 $f(x)$在$(0，\beta)$单调递增，在$\left(\beta，\dfrac{\pi}{2}\right)$单调递减.

又 $f(0)=0$，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1-\ln\left(1+\dfrac{\pi}{2}\right)>0$，所以当 $x\in\left(0，\dfrac{\pi}{2}\right]$时，$f(x)>0$.从而，$f(x)$在$\left(0，\dfrac{\pi}{2}\right]$上没有零点.

③当 $x\in\left(\dfrac{\pi}{2}，\pi\right]$时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$在$\left(\dfrac{\pi}{2}，\pi\right)$单调递减.又 $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)>0$，$f(\pi)<0$，所以 $f(x)$在$\left(\dfrac{\pi}{2}，\pi\right]$有唯一零点.

④当 $x\in(\pi，+\infty)$时，$\ln(x+1)>1$.

所以 $f(x)<0$，从而 $f(x)$在$(\pi，+\infty)$没有零点.

综上，$f(x)$有且仅有 2 个零点.