直线与圆

1. 直线 l：$y=kx+1$ 与圆 $x^2+y^2-2ax+a^2-2a-4=0$ 恒有交点，则实数 a 的取值范围是________.

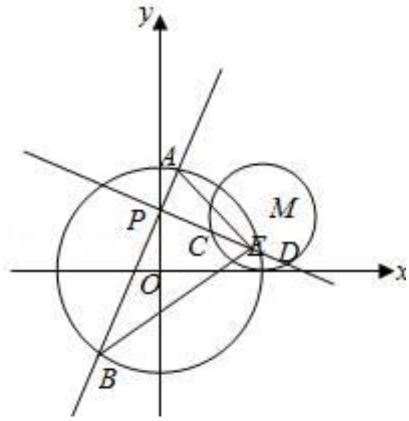
2. 已知圆 O：$x^2+y^2=r^2(r>0)$及圆上的点 $A(0，-r)$，过点 A 的直线 l 交圆于另一点 B，交 x 轴于点 C，若 $OC=BC$，则直线 l 的斜率为________.

3. 直线 $tx+y+3=0$ 与圆 $x^2+y^2=4$ 相交于 A、B 两点，若$|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|>|\overrightarrow{AB}|$，则实数 t 的范围________.

4. 在平面直角坐标系 xOy 中，过点 P（0，1）且互相垂直的两条直线分别与圆 O：$x^2+y^2=4$ 交于点 A，B，与圆 M：$(x-2)^2+(y-1)^2=1$ 交于点 C，D.

（1）若 $AB=\frac{3\sqrt{7}}{2}$，求 CD 的长；

（2）若 CD 中点为 E，求△ABE 面积的取值范围.



直线与圆

1. 直线 l：$y=kx+1$ 与圆 $x^2+y^2-2ax+a^2-2a-4=0$ 恒有交点，则实数 a 的取值范围是________.

【答案】$-1\le a\le 3$

【解析】圆方程为$(x-a)^2+y^2=2a+4$，则 $a>-2$，又直线 l 过定点$(0,1)$，故只需点$(0,1)$在圆内或圆上，即 $-1\le a\le 3$，综上，实数 a 的取值范围是$-1\le a\le 3$.

2. 已知圆 O：$x^2+y^2=r^2(r>0)$及圆上的点 $A(0，-r)$，过点 A 的直线 l 交圆于另一点 B，交 x 轴于点 C，若 $OC=BC$，则直线 l 的斜率为________.

【答案】$\pm\sqrt{3}$.

【解析】设直线 l 的斜率为 k，则直线 l：$y=kx-r$，与 $x^2+y^2=r^2$ 联立解得 $B(\frac{2kr}{k^2+1}，\frac{(k^2-1)r}{k^2+1})$，而 $C(\frac{r}{k}，0)$，由 $OC=BC$ 得$(\frac{r}{k})^2=(\frac{2kr}{k^2+1}-\frac{r}{k})^2+[\frac{(k^2-1)r}{k^2+1}]^2$ 即 $k=\pm\sqrt{3}$.

3. 直线 $tx+y+3=0$ 与圆 $x^2+y^2=4$ 相交于 A、B 两点，若$|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|>|\overrightarrow{AB}|$，则实数 t 的范围________.

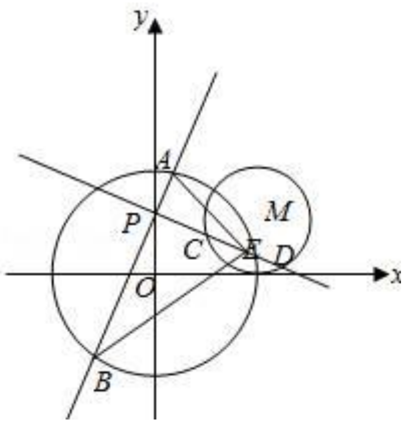
【答案】$-\frac{\sqrt{14}}{2}<t<-\frac{\sqrt{5}}{2}$或$\frac{\sqrt{5}}{2}<t<\frac{\sqrt{14}}{2}$.

【解析】因为直线 $tx+y+3=0$ 与圆 $x^2+y^2=4$ 交于相异两点 A,B,所以 O 点到直线 $tx+y+3=0$ 的距离 $d<2$，又|+|>||，由平行四边形可知，夹角为钝角的邻边所对的对角线比夹角为锐角的邻边所对的对角线短，所以，的夹角为锐角．圆心到直线的距离 d 大于$\sqrt{2}$，即$\sqrt{2}<\frac{3}{\sqrt{t^2+1}}<2$，解得$-\frac{\sqrt{14}}{2}<t<-\frac{\sqrt{5}}{2}$或$\frac{\sqrt{5}}{2}<t<\frac{\sqrt{14}}{2}$.

4. 在平面直角坐标系 xOy 中，过点 P（0，1）且互相垂直的两条直线分别与圆 O：$x^2+y^2=4$ 交于点 A，B，与圆 M：（$x-2$）^{2}+（$y-1$）$^2=1$ 交于点 C，D.

（1）若 AB=$\frac{3\sqrt{7}}{2}$，求 CD 的长；

（2）若 CD 中点为 E，求△ABE 面积的取值范围.



【分析】（1）设直线 AB 的方程为：$y=kx+1$（$k\neq0$），根据 $AB=\frac{3}{2}\sqrt{7}$，利用弦长公式可得：$(\frac{3\sqrt{7}}{4})^2+(\frac{1}{\sqrt{1+k^2}})^2=2^2$，解得 k，可得直线 CD 的方程，再利用弦长公式即可得出．

（2）①直线 AB 为 y 轴时，直线 AB 的方程为：$x=0$，直线 CD 的方程为：$y=1$．可得 $S_{\triangle ABE}=\frac{1}{2}\times|AB|\bullet x_E=4$．

②直线 AB 的斜率存在时，设直线 AB 的方程为：$y=kx+1$，若 $k=0$，则方程为 $y=1$，经过圆心（2，1），此时△ABE 不存在，舍去．$k\neq0$ 时，可得直线 CD 的方程为：$y=-\frac{1}{k}x+1$．利用弦长公式可得：$|AB|=2\sqrt{\frac{3+4k^2}{1+k^2}}$．联立 $\begin{cases}y=\frac{1}{k}x+1\\(x-2)^2+(y-1)^2=1\end{cases}$，化为：（$k^2+1$）$x^2-4k^2x+3k^2=0$，利用根与系数的关系、中点坐标公式可得 $E(\frac{2k^2}{1+k^2},\frac{(k-1)^2}{1+k^2})$．利用点到直线的距离公式可得点 E 到直线 AB 的距离 d．可得 $S_{\triangle ABE}=\frac{1}{2}|AB|\bullet d=2\sqrt{4-\frac{5k^2+4}{k^4+2k^2+1}}$，通过换元利用二次函数的单调性即可得出．

【解答】解：（1）设直线 AB 的方程为：$y=kx+1$（$k\neq0$），

∵ $AB=\frac{3}{2}\sqrt{7}$，∴ $(\frac{3\sqrt{7}}{4})^2+(\frac{1}{\sqrt{1+k^2}})^2=2^2$，

化为：$k^2=15$，

解得 $k=\pm\sqrt{15}$．

∴直线 CD 的方程为：$y=\pm\frac{1}{\sqrt{15}}x+1$．

∴$|CD|=2\sqrt{1^2-(\frac{\pm\frac{2}{\sqrt{15}}-1+1}{\sqrt{1+\frac{1}{15}}})^2}=\sqrt{3}$．

（2）①直线 AB 为 y 轴时，直线 AB 的方程为：$x=0$，直线 CD 的方程为：$y=1$．

$S_{\triangle ABE}=\frac{1}{2}\times|AB|\bullet x_E=\frac{1}{2}\times4\times2=4$．

②直线 AB 的斜率存在时，设直线 AB 的方程为：$y=kx+1$，

若 $k=0$，则方程为 $y=1$，经过圆心（2，1），此时△ABE 不存在，舍去．

$k\neq0$ 时，可得直线 CD 的方程为：$y=-\frac{1}{k}x+1$．

$|AB|=2\sqrt{2^2-(\frac{1}{\sqrt{1+k^2}})^2}=2\sqrt{\frac{3+4k^2}{1+k^2}}$.

联立$\begin{cases}y=\frac{1}{k}x+1\\(x-2)^2+(y-1)^2=1\end{cases}$，化为：$(k^2+1)x^2-4k^2x+3k^2=0$，

$\triangle=16k^4-12(k^2+1)k^2>0$，化为：$k^2>3$.

$\therefore x_1+x_2=\frac{4k^2}{1+k^2}$，可得 $E(\frac{2k^2}{1+k^2}，\frac{(k-1)^2}{1+k^2})$.

$\therefore$点 E 到直线 AB 的距离 $d=\frac{|\frac{2k^3}{1+k^2}-\frac{(k-1)^2}{1+k^2}+1|}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{2|k|}{\sqrt{1+k^2}}$.

$\therefore S_{\triangle ABE}=\frac{1}{2}|AB|\bullet d=\frac{1}{2}\times2\sqrt{\frac{3+4k^2}{1+k^2}}\times\frac{2|k|}{\sqrt{1+k^2}}=2\sqrt{\frac{k^2(3+4k^2)}{(1+k^2)^2}}=2\sqrt{4-\frac{5k^2+4}{k^4+2k^2+1}}$，

令 $k^2+1=t>4$，可得 $f(t)=\sqrt{4-\frac{5t-1}{t^2}}=\sqrt{(\frac{1}{t}-\frac{5}{2})^2-\frac{9}{4}}\in(\frac{3\sqrt{5}}{4}，2)$.

$\therefore S_{\triangle ABE}\in(\frac{3\sqrt{5}}{2}，2)$.

综上可得：$S_{\triangle ABE}\in(\frac{3\sqrt{5}}{2}，4]$.