例谈几何图形中的排列组合问题

◎徐 锐（襄阳四中）

排列组合是高中数学的重要内容之一，它对培养逻辑思维能力、分析解决实际问题的能力有着重要的意义. 排列组合与几何图形的整合问题是高考常见的题型，因为解决这类问题不仅要具备排列组合的有关知识，而且还要具备较强的空间想象能力与逻辑思维能力. 这是一类综合性强、灵活性高、难度颇大的挑战性问题. 本文通过对典型例题的剖析，归纳总结出解决此类问题的常用方法，以期对同学们的学习有所帮助.

分步、分类求解

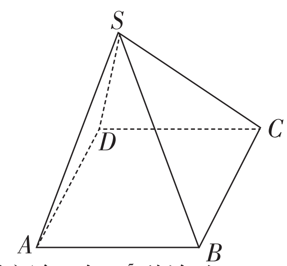
例1 用5种不同的颜色给图中的四个区域涂色，每个区域涂一种颜色，若要求相邻(有公共边)的区域不同色，则共有多少种不同的涂色方法.

1	3
2	4

解析 完成该事件可分步进行. 第一步，涂区域1，有5种颜色可选. 第二步，涂区域2，有4种颜色可选. 第三步，涂区域3，可先分类：若区域3的颜色与区域2相同，则区域4有4种颜色可选；若区域3的颜色与区域2不同，则区域3有3种颜色可选，此时区域4有3种颜色可选. 故不同的涂色方法共有$5×4×(1×4+3×3)=260$种.

点拨 对于常规问题，正面入手比较方便时，可直接采用两个计数原理求解，但要注意条理清晰、不重不漏的原则. 本题的关键是对区域3的涂色进行分类，因为区域2与区域3同色和区域2与区域3异色对区域4的涂色选择是有影响的，应把握本质，注重技巧，有序分步，全面考虑，防止出现“重复”与“疏漏”的错误.

例2 将一个四棱锥的每个顶点染上一种颜色，并使同一条棱的两端异色，如果只有5种颜色可供使用，那么不同的染色方法种数是______种(以数字作答).



解析 分三类：①若涂5种颜色，有A_5^5种涂法.

②若涂4种颜色，只能是底面四边形相对顶点同色. 如图，若A，C同色，只要考虑涂S，A，B，D四顶点，有A_5^4种涂法. 同理，B，D同色仍有A_5^4种涂法，故共有$2A_5^4$种涂法.

③若涂3种颜色，则A，C同色且B，D同色，只要考虑涂S，A，B三个顶点，有A_5^3种涂法.

由加法原理知，共有$A_5^5+2A_5^4+A_5^3=420$种涂法.

点拨 本题以涂完整个模型需要用的颜色数作为讨论的标准，涂5色怎么涂、涂4色怎么涂、涂3色怎么涂，标准清晰，不重不漏. 熟练掌握分类、分步的标准是解决排列组合问题的重中之重.

正难则反求解

例3 将3种植物全部种植在5块试验田里(如图)，要求每块种植一种且相邻的试验田不能种植同一植物，不同的种植方法共______种(以数字作答).

1	2	3	4	5

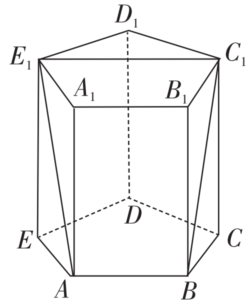
解析 将3种作物种植在5块试验田里，每块种一种作物，且相邻的试验田不能种同一种作物，就是第一块可以种3种不同的植物，第二块与第一块不同，就只能种2种不同的植物，余下的几块都只能种2种不同的植物. 但这样会造成5块田只种2种植物的情况，所以不同的种植方法共有$3\times2\times2\times2\times2-2\mathrm{C}_3^2=42$.

点拨 当所涉及的问题数量较大或从正面分类(列举)比较困难时，可以先计算出满足一个大标准的所有可能情况，再排除不符合题意的情况，即利用“正难则反”的方法求解.

例4 以一个正五棱柱的顶点为顶点的四面体共有( )

A. 200个 B. 190个

C. 185个 D. 180个



解析 正五棱柱共有10个顶点，若每四个顶点构成一个四面体，共可构成$\mathrm{C}_{10}^4=210$个四面体，其中四点在同一平面内的情形有三类：

①每一底面内的5点中任选4点的方法有$2\mathrm{C}_5^4$种；

②5条侧棱中，任选两条侧棱共面，共有C_5^2种；

③一个底面的一边与另一个底面相应的一条对角线平行(例如$AB\parallel E_1C_1$)，这样的四点共面的情形共有$2\mathrm{C}_5^1$种.

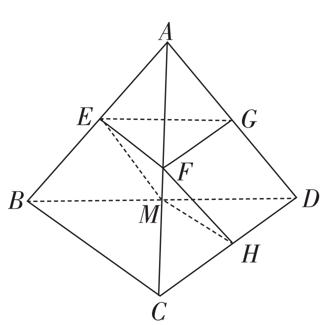
故四面体的个数为$\mathrm{C}_{10}^4-2\mathrm{C}_5^4-\mathrm{C}_5^2-2\mathrm{C}_5^1=180$个.

答案 D

点拨 本题的难点在四点共面情况的剔除上. 剔除时，使用了立体几何中有关共面的知识. 在具体的解题过程中，综合使用了正难则反与分类讨论两大法宝，清晰、自然. 正所谓“解题有法，但法无定法，贵在得法”. 只有平时在学习中善于思考、善于挖掘、善于总结，才能将“方法”在解题中运用自如.

联系模型求解

例5 不共面的四个定点到平面α的距离都相等，这样的平面α共有______个.



解析 由题设条件，空间不共面的四点可构成四面体. 考虑四面体$A-BCD$的四个顶点在所求平面两侧的分布情况，易知当所求平面位于三棱锥的顶点与底面之间(如平面EFG)时有4个. 当所求平面位于三棱锥相对棱之间(如平面$EMHF$)时有3个. 故所求平面共有7个.

点拨 本题把不共面的四个点看作一个四面体来分析，让思考的问题背景更加贴近常见的模型，降低了思维难度. 平时的学习过程中留心各种小结论，在解题的时候注意联系化归，常常会有意想不到的效果.

例6 以长方体的八个顶点中的任意3个为顶点的所有三角形中，锐角三角形共有______个.

解析 联想课本习题：“将正方体截去一角，求证：截面是锐角三角形”，易知从长方体的一个顶点出发的三条棱的另3个端点可构成锐角三角形. 长方体有8个顶点，从而可构成8个锐角三角形.

点拨 长方体与正方体有相似的几何性质. 根据平行的相关知识，截长方体和截正方体形成的截面的形状是可以类比的，因此本题借助正方体的性质来解决长方体的问题是一个不错的观察角度.

综合利用相关知识求解

例7 已知直线$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$($a$，$b$是非零常数)与圆$x^2+y^2=100$有公共点，且公共点的横坐标和纵坐标均为整数，那么这样的直线共有( )

A. 60条 B. 66条

C. 72条 D. 78条

解析 圆$x^2+y^2=100$上的整数点有$(10,0)$，$(-10,0)$，$(0,10)$，$(0,-10)$，$(6,8)$，$(8,6)$，$(6,-8)$，$(8,-6)$，$(-6,8)$，$(-8,6)$，$(-6,-8)$，$(-8,-6)$，共12个. 每两点构成一条直线共$\mathrm{C}_{12}^2=66$条，过整点的圆的切线有$\mathrm{C}_{12}^1=12$条；去掉其中的14条平行于坐标轴的直线，再去掉6条过原点的直线；最后加上既平行于坐标轴又过原点的两条直线，则满足题意的直线共有66+12−14−6+2=60条.

答案 A

点拨 本题综合运用了平面几何知识、圆的切线、直线的截距式概念，以及集合的交、并、补的思想等内容. 由于知识点较多，问题较复杂，因此，在考虑问题时既要概念清晰，又要逻辑严密，更要全面考虑，做到不重不漏. 在知识的交汇处做文章是高考命题的特点，需要同学们在平时的学习中深刻体会.