优化高三数学复习课教学的实践与思考

江苏省锡山高级中学　(214174)　马晴燕

基于核心素养的教学策略,需要我们更多地关注如何从知识点的落实转向到素养的养成,如何从关注“教什么”转向到关注学生“学会什么”.素质教育倡导回归数学本质,提高学生学习能力,而理解数学是教师教好数学的前提,更是学生学好数学的基础.笔者连续多年的高三教学发现:学生怕教师“炫”各种技巧,希望能倾听他们的想法,考虑他们的立场,多跟他们交流.为此,笔者努力遵循学生的心声,进行了一些尝试,有了以下几点体会.

1、遵循学情合理选择和呈现教学内容,引动学生参与学习

好电影要有好的导演和编剧,高效的课堂离不开教师的合理规划.首先,高三的教学更适合教师尝试单元化设计、分解课时,根据所教章节在对应知识体系中的地位和作用合理选择、安排教学内容,力求前后自然承接、突显教学重点.其次,教师能根据学生知识现状,将教学内容设计成学生易于接受并参与学习的呈现形式,让学生自然地参与学习,有效分解教学难点.

案例 1　复习课中与二次方程、二次不等式有关的恒成立、有解问题学生掌握不熟练,不少学生对这些知识掌握呈碎片化,而孤立的、缺乏知识系统性的知识点训练也导致训练效果不佳,学生综合运用知识的能力不强.因此教师尝试将一段时间内接触的有关问题整合后再呈现给学生.

引例　已知 $M=\{x|x^2-3x-4\leqslant 0\}$, $N=\{x|x^2-6x+9-m^2\leqslant 0\}$,若 $M\subseteq N$,则 m 的取值范围是________.

此题入口较宽,解不等式易忽略对 m 的讨论,构造二次函数图像更简洁.

变式　不等式 $x^2-6x+9-m^2\leqslant 0$ 对 $x\in[-1,4]$恒成立,求 m 的取值范围.

可解不等式或考虑(分参)转化为函数最值来解,提示学生发现其与引例相同.在此基础上设计以下例题.

例 1　已知 $M=\{x|2x^2+mx-1<0\}$,根据下列条件求实数 m 的取值范围.(1)$(0,3)\subseteq M$;(2)$M\cap(0,3)\neq\varnothing$;(3)$(0,3)\supseteq M$.

例 2　根据下列条件求实数 m 的取值范围.(1) $\exists x\in\{x|-1<x<1\}$,使等式 $x^2-x-m=0$;(2)$mx^2-x-1=0$ 在 $x\in(-1,1)$内有解.

课后结合课堂给出类似题组训练.分别求满足下列条件的 a 的取值范围.(1) $[0,3]$内每个 x 都满足不等式 $x^2+2(1-a)x+3-a\leqslant 0$;(2) $[0,3]$内存在 x 满足不等式 $x^2+2(1-a)x+3-a\leqslant 0$.这样把学生容易混淆的几种类似问题适当改编,按照学生的实际水平从易到难层层递进,引导着学生逐渐参与学习和探究,学生更易找到知识之间的关联和区别,在解惑同时巩固了函数与方程、数形结合、转化与化归思想,自然地提升了数学逻辑思维能力和抽象概括能力.

2、遵循学生思维发展规律,融入学生中去倾听和交流

优秀的导演懂得分析演员的特质,能引导演员共同打磨角色.称职的教师应该认识学生的学习特点,遵循学生的发展规律,努力唤起学生学习的能动性,尽量避免无效“代劳”,为此,教师应努力做到以下两点.

2.1　诊断教学中学生可能有的表现,做好预设便于倾听和交流

教师深入解读 2017 版课程标准,基于所涉及数学知识的核心概念和数学本质,分析学生的认知基础和思维发展规律,结合教学经验预测学生可能有的障碍和表现,预设教学障碍及应对策略,让教师在课堂上更合理的倾听、更自然的介入引导和交流.实践证明,必要时教师可通过抽样询问学生、跟同事交流等方式,为课堂的有效倾听和交流奠定基础.实际教学时,教师基于预设,结合实际教学状况灵活调整教学,合理引导学生展开思考,促进师生自然交流.

案例 2　若将函数 $f(x)=x^3$ 表示为 $f(x)=a_0+a_1(3+x)+a_2(3+x)^2+a_3(3+x)^3$,其中 a_0,a_1,a_2,a_3 为实数,则 $a_1=$________.

此题涉及的核心数学知识主要有函数、导数和恒等式,常用思想方法是转化与化归.据经验,极少学生会求导后赋值 -3,分析实际预测学生可能的想法依次是特殊化或展开利用恒等式,教师课前研究这两个方法的优劣和联系,预备引导学生反思恒等式的常见处理方式,提问学生会求 a_0,a_3 吗? a_0,a_3 为什么易求? a_1 能类似求吗? 自然地引导学生有效思考,教师边倾听边提示,促进师生和谐交流.从

而有了以下的教学实录.

生甲:展开利用等式恒成立,联立方程组求解. 师:解出来了吗? 生甲:没,运算量不小. 师:为什么? 生甲:右边麻烦,左边简单. 师:能调整吗? 生乙:令 $t=x+3$,再展开. 生丙:只求 $(t-3)^3$ 展开项中 t 的系数. 师:对,有其他发现吗? 生丁:a_3 显然,分别取 $x=-3,-2,-1$. 师:很棒,特殊化是处理等式恒成立常用方法. 严密吗? 生丁:检验一般化,填空题仅一解可不检验. 用换元后的式子特殊化更简单. 师:所取特殊值有要求吗? 生丁:只要三次方后数字不大就可以. 师:聪明,上面解方程可只求 a_1. 还有其它解法? (学生沉默) 师:a_0、a_3 容易求,为什么? 生戊:a_3 是最高次系数为 1,a_0 是常数,取 $x=-3$ 则其它项为零. 师:a_1 能类似吗? (学生安静了一会) 师:上面的优化都是为了避开三次、二次的运算量,求出 a_1. 生己:a_1 要成为常数项或最高次项系数. 生戊:降次,方法还没想到. 生庚:求导后令 $x=-3$,换元再求更好. 师:其他同学觉得呢? (学生们尝试了下恍然大悟) 师:真棒,对多项式函数,求导是很好的降次手段. 求 a_2? 生庚:求两次导,令 $x=-3$. 师:有一般化结论吗? 生庚:$f(x)=a_0+a_1(3+x)+a_2(3+x)^2+...+a_n(3+x)^n$,$a_0,a_1,a_2,...,a_n$ 为实数,求 $a_k(k\in\mathbf{N}^*,1\leqslant k\leqslant n)$,共求 k 次导,令 $x=-3$. 在交流中,学生体验了从一般到特殊,特殊到一般的转化,以及类比归纳思想的灵活应用,提升了学习能动性,发展了逻辑推理、数学抽象、数学运算等学科核心素养.

2.2　尊重学生的实际思维水平,诚心、耐心、专心、细心地倾听和交流

教师教学、解题经验丰富,备课时对问题已有所思考,而学生刚接触问题,需要一定的思考时间和尝试的空间. 教师应积极为学生创设良好的思考环境,根据多数学生的探究情况,结合诊断进行二次备课,请学生对普遍解法表述分析过程(为什么这么想)、展示解题过程(具体怎么做),请其他同学不断补充(优劣在哪里),一边耐心倾听一边多追问(合理吗? 都这么想的?)努力倾听广大同学的真实心声. 若是讲评课,教师可借助批阅设备统计、分析学生的解答,课堂上请有代表性的同学或者小组进行具体思维过程的展示.

案例 3　已知函数 $f(x)=2x+\frac{1}{x^2}$. (1)求函数 $f(x)$ 的单调区间;(2)试探究直线 $y=kx-1$ 与曲线 $y=f(x)$ 的交点个数,并说明理由.

笔者借助批阅设备拍下各种典型解法,课堂多媒体展示,请相关同学简单解说思路后全班研讨. 第(1)问学生在函数求导后只看分子,忽视了分母是奇数次,课堂直接点评;第(2)问学生解法一:分离参数,令 $u(x)=\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x}+2$,求导得 $u(x)$ 在 $(-\infty,0)$,$(0,+\infty)$ 单调递减. 与学生交流发现 $u(x)$ 对称中心为 $(0,2)$,当 $x\in(-\infty,0)$ 时,函数值小于 2;当 $x\in(0,\infty)$ 时,函数值大于 2,故有渐近线 $x=0,y=2$. 有学生建议令 $t=\frac{1}{x},t\neq0$ 转化为三次函数. 学生解法二:求直线和 $f(x)$ 图像交点. 根据单调性、与 x 轴的交点以及与直线相切的临界状态等却得无解. 有学生参考 $y=x+\frac{1}{x}$ 的图像有渐近线 $y=x$,得 $f(x)$ 图像有渐近线 $y=2x$,问题迎刃而解. 又有学生提出将方程转化成 $(k-2)x-1=\frac{1}{x^2}$,即求直线和曲线的交点.

可见,教师依据深入调查所获的学生实际思维水平,为学生提供合理的思考时间和空间是学生发展思维的保证. 诚心专注地倾听利于提升学生表达欲望,切实为学生提供充裕的表达机会;让交流更融洽,站在学生的立场去分析和思考,参与学生的学习过程. 师生和谐共进以获得更多有价值的教学成果,提升课堂发展.

3、配合学生反思总结,促进养成批判性思维的习惯

师生共同探讨的结果,教师应及时配合学生进行批判性思维,从错误和不完美中积累经验,形成学生自己的思维定势. 通过案例 3,就有了以下案例 4 的表现.

案例 4　若关于 x 的不等式 $(2x-1)^2<ax^2$ 的解集中整数恰好有 3 个,则实数 a 的取值范围是________.

学生思路一:$-4x+1<(a-4)x^2$,等价于 $g(x)=-4x+1$ 图像在 $h(x)=(a-4)x^2$ 图像下方部分,$a-4>0$ 显然不成立,$a-4<0$ 猜 1,2,3 在解集中. 反思缺 $a-4=0$ 的情况,由 $a>0$,$x=\frac{1}{2}$ 在解集中,而 $x=0$ 不在解集中,结合图像才得 1,2,3 在解集中. 有学生提出 $a-4<0$ 时,用二次不等式解集宽度在 $(2,4)$,以缩小 a 的范围,却发现繁且不能判定从 1 开始. 又有学生提出 $\Delta>0$,却得 $a>0$. 反思有些必要条件不足以缩小范围.

学生思路二:由 $(2x-1)^2<ax^2$ 得 $a>0$,作出两个二次函数图像知 $x=\frac{1}{2}$ 是它们的交点,结合图像从 1 开始连续三个整数满足条件即可.

学生思路三:$x=0$ 不满足,原不等式等价于 $a>$

$\frac{(2x-1)^2}{x^2}=4-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}$,令 $t=\frac{1}{x}$,则 $a>t^2-4t+4$,在教师启示下得 $t=\frac{1}{3},\frac{1}{2},1$ 为对应不等式的三解.

有学生建议求导得 $y=\frac{1}{x^2}-\frac{4}{x}+4$ 在 $(-\infty,0)$ 上递增,$\left(0,\frac{1}{2}\right)$上递减,$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$上递增,且 $y>0$,作图却得无解,反思发现当 $x<0$ 时,$y>2$. 故有学生提出等价于 $\left|\frac{2x-1}{x}\right|<\sqrt{a}$ 或 $|2x-1|<\sqrt{a}|x|$. 教师追问几种思路的优劣,结合案例 3 等类似问题有哪些启示? 学生集体反思:分类多或茫然时可挖掘隐含条件或者寻求有用的必要条件;等价转化成熟悉的初等函数(数形结合),一般化成一直线和一曲线(包括分离参数);换元是常用手段,要注意等价性;求导要看定义域,且只能得单调趋势,准确作图需要其他辅助信息.

通过对知识点、解题策略等的不断回顾,让学生养成及时反思总结的习惯,有利于培养学生思维的批判性和严谨性,提升学生的数学素养和数学学习能力.

4、引导学生系统梳理所学,回归数学问题本质

经过了预设、倾听、交流、反思之后,教师应抓住契机引导学生进行更系统的梳理,深入理解数学本质,逐渐实现回归问题本质与遵循学生学情的统一. 这一过程渗透在上述两点中,寻找教学内容和学生认知基础的衔接点,旨在系统认识知识的本质和找到学生的最近发展区域;融入学生中去共同学习旨在落实遵循学生实际和把握数学本质,协助学生养成良好的学习习惯.

案例 5　问题 1:设 D 为 $\triangle ABC$ 所在平面内一点,$\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{CD}$,若$\overrightarrow{AD}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$,则 $\lambda=$________,$\mu=$________.

学生思路一:由平面向量基本定理,将$\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$充当基底(常规思维,作图也直观,但学生不选择).

学生思路二:以 A 为原点建立坐标系,分别设 $B(a,b)$,$C(c,d)$,代入求出 D 坐标(学生理由是字母多,建立坐标系后直接运算).

问题 2:在 $\triangle ABC$ 中,M 是 BC 的中点,$AM=3$,$BC=10$,则$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$________.

学生思路一:基底转化,$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}$,$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MC}$,由$\overrightarrow{MB}=-\overrightarrow{MC}$,可得$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AM}^2-\overrightarrow{MC}^2$.

学生思路二:向量加法和减法的原理,$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}$①;$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}$②,求①式和②的平方差即可.

学生思路三:以 M 为坐标原点,BC 所在直线为 x 轴建立平面直角坐标系,则 $B(-5,0)$,$C(5,0)$,$M(0,0)$,$A(x,y)$,且 $x^2+y^2=9$,代入坐标即可.

学生思路四:特殊化 A 点位置,比如 $AM\perp BC$.

问题 1 也可特殊化,两个问题非常相似. 教师请学生寻找它们的异同,尝试归纳出解决向量问题的常用方法,并感悟它们的关系. 学生讨论交流得出:两个问题均可用基底转化(教师启示即平面向量基本定理)、建立坐标系、特殊化的方法处理. 结果确定或求最值可尝试特殊化,是前面方法的特例. 有垂直、特殊角、长度、中点等信息尽量建立坐标系. 教师问:大家在解决向量问题时往往方法不同? 可想过这些方法之间相通? 学生赞同. 教师提示:平面向量基本定理的物理背景是力的分解,可看作是向量加法平行四边形法则的变形运用,上面两个问题大家试作图看看. 学生尝试发现跟基底转化一致. 教师再提示:怎么引入向量坐标运算的,为什么垂直、特殊角、中点等会让大家偏于建系? 学生逐渐明白建立坐标系本质上是基底的特殊化,上面几种方法是一般到特殊的关系或者是形与数的不同呈现方式,明确了数形结合解决向量问题的优势和灵活性. 教师请学生举例验证,有几个学生提出:在 $\triangle ABC$ 中,D 是 BC 的中点,E,F 是 AD 上的两个三等分点,$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA}=4$,$\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{CF}=-1$,则$\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{CE}$的值是________. 学生能很快的从多角度解决此题.

在教学中,教师应对学生的反思进行查漏补缺,引导他们系统梳理并努力回归数学本质,形成完整的知识脉络,体悟运用的数学思想方法. 实践证明,相比教师直接总结,坚持引导学生尝试自我反思、系统梳理,更有利于学生养成独立思辨、自主概括的良好学习习惯. 为此,教师要舍得花时间,并花合理的时间引导学生去系统梳理、总结提升,进一步发挥数学教学的育人价值.

多年高三教学实践证明,课堂教学应切实尊重学生实际,多倾听、细交流、深反思、勤梳理,努力追求数学本质和学生实际的有效融合,促进学生数学学习的有效发展. 在此过程中教师应多角度的寻求认知的深化,引导学生更透彻把握数学的本质. 总之,新的课程改革在高三应有良好的实践环境,教师应对比新老教材,将优化数学教学的实践和深入解读课标有效融合,努力追求"切实尊重学生、真正理解数学、有效落实课标"的目标,扎扎实实的推进新课程改革,落实"四基、四能"的培养目标,有效发挥数学学科的育人价值.