

## 仪征中学高二数学暑假作业 (8)

### 一、 填空题:

1. 设集合  $A = \{x | -1 \leq x \leq 2\}$ ,  $B = \{x | 0 \leq x \leq 4\}$ , 则  $A \cap B =$  \_\_\_\_\_.
2. 函数  $y = \ln(x^2 - x - 2)$  的定义域是 \_\_\_\_\_.
3. 已知  $\sin \alpha = \frac{1}{4}$ , 且  $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ , 则  $\tan \alpha =$  \_\_\_\_\_.
4. 定义在  $\mathbf{R}$  上的奇函数  $f(x)$ , 当  $x > 0$  时,  $f(x) = 2^x - x^2$ , 则  $f(-1) + f(0) + f(3) =$  \_\_\_\_\_.
5. 函数  $y = \sqrt{3}\sin x - \cos x - 2 (x > 0)$  的值域是 \_\_\_\_\_.
6. 等差数列  $\{a_n\}$  中, 前  $n$  项和为  $S_n$ , 若  $S_4 = 8a_1$ ,  $a_4 = 4 + a_2$ , 则  $S_{10} =$  \_\_\_\_\_.
7. 设函数  $f(x) = \begin{cases} 2^x - 4, & x > 0, \\ -x - 3, & x < 0, \end{cases}$  若  $f(a) > f(1)$ , 则实数  $a$  的取值范围是 \_\_\_\_\_.
8. 等比数列  $\{a_n\}$  的公比大于 1,  $a_5 - a_1 = 15$ ,  $a_4 - a_2 = 6$ , 则  $a_3 =$  \_\_\_\_\_.
9. 将函数  $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$  的图象向右平移  $\varphi \left(0 < \varphi < \frac{\pi}{2}\right)$  个单位后, 得到函数  $f(x)$  的图象, 若函数  $f(x)$  是偶函数, 则  $\varphi$  的值等于 \_\_\_\_\_.
10. 已知函数  $f(x) = ax + \frac{b}{x}$  ( $a, b \in \mathbf{R}, b > 0$ ) 的图象在点  $P(1, f(1))$  处的切线与直线  $x + 2y - 1 = 0$  垂直, 且函数  $f(x)$  在区间  $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$  上单调递增, 则  $b$  的最大值等于 \_\_\_\_\_.
11. 已知  $f(m) = (3m - 1)a + b - 2m$ , 当  $m \in [0, 1]$  时,  $f(m) \leq 1$  恒成立, 则  $a + b$  的最大值是 \_\_\_\_\_.
12.  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  的对边分别是  $a, b, c$ , 若  $\tan A = 2 \tan B$ ,  $a^2 - b^2 = \frac{1}{3}c$ , 则  $c =$  \_\_\_\_\_.

### 二、 解答题:

13. 已知函数  $f(x) = 2\cos\frac{\omega x}{2} \left(\sqrt{3}\cos\frac{\omega x}{2} - \sin\frac{\omega x}{2}\right)$  ( $\omega > 0$ ) 的最小正周期为  $2\pi$ .

(1) 求函数  $f(x)$  的表达式;

(2) 设  $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , 且  $f(\theta) = \sqrt{3} + \frac{6}{5}$ , 求  $\cos \theta$  的值.

14 已知函数  $f(x)=x^2-2ax+1$ .

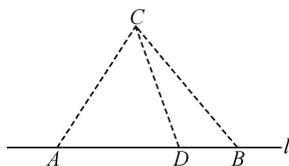
(1) 若函数  $g(x)=\log_a[f(x)+a](a>0, a\neq 1)$  的定义域是  $\mathbf{R}$ , 求实数  $a$  的取值范围;

(2) 当  $x>0$  时, 恒有不等式  $\frac{f(x)}{x}>\ln x$  成立, 求实数  $a$  的取值范围.

15、如图, 在海岸线  $l$  一侧  $C$  处有一个美丽的小岛, 某旅游公司为方便游客, 在  $l$  上设立了  $A, B$  两个报名点, 满足  $A, B, C$  中任意两点间的距离为  $10 \text{ km}$ . 公司拟按以下思路运作: 先将  $A, B$  两处游客分别乘车集中到  $AB$  之间的中转点  $D$  处(点  $D$  异于  $A, B$  两点), 然后乘同一艘游轮前往  $C$  岛. 据统计, 每批游客  $A$  处需发车  $2$  辆,  $B$  处需发车  $4$  辆, 每辆汽车每千米耗费  $2a$  元, 游轮每千米耗费  $12a$  元. (其中  $a$  是正常数) 设  $\angle CDA=\alpha$ , 每批游客从各自报名点到  $C$  岛所需运输成本为  $S$  元.

(1) 写出  $S$  关于  $\alpha$  的函数表达式, 并指出  $\alpha$  的取值范围;

(2) 问: 中转点  $D$  距离  $A$  处多远时,  $S$  最小?



16、如图, 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a>b>0)$  的离心率为  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ , 点  $(2, 1)$  在椭圆  $C$  上.

(1) 求椭圆  $C$  的方程;

(2) 设直线  $l$  与圆  $O: x^2+y^2=2$  相切, 与椭圆  $C$  相交于  $P, Q$  两点.

① 若直线  $l$  过椭圆  $C$  的右焦点  $F$ , 求  $\triangle OPQ$  的面积;

② 求证:  $OP \perp OQ$ .

