绝密★启用前

2020 年普通高等学校招生全国统一考试适应性考试（江苏卷）

数学Ⅱ附加题部分

注意事项

1. 本试卷共 2 页，均为非选择题（第 21 题～第 23 题，共 4 题）。本卷满分为 40 分，考试时间为 30 分钟。考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。
2. 作答试题，必须用 0.5 毫米黑色墨水的签字笔在答题卡上的指定位置作答，在其它位置作答一律无效。

21.【选做题】本题包括 A、B、C 三小题，请选定其中两题，并在相应的答题区域内作答．若多做，则按作答的前两题评分．解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

A．选修 4—2：矩阵与变换（本小题满分 10 分）

已知矩阵 $\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}1 & a\\ -1 & b\end{bmatrix}$，点 $(1,-1)$ 在 $\boldsymbol{M}$ 对应的变换作用下得到点 $(-1,-5)$，求矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的特征值．

【解】由题意，$\begin{bmatrix}1 & a\\ -1 & b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\ -5\end{bmatrix}$，即 $\begin{cases}1-a=-1,\\ -1-b=-5,\end{cases}$ 解得 $a=2$，$b=4$，

所以矩阵 $\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 4\end{bmatrix}$． …… 5 分

矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的特征多项式为 $f(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2\\ 1 & \lambda-4\end{vmatrix}=\lambda^2-5\lambda+6$．

令 $f(\lambda)=0$，得 $\lambda_1=2$，$\lambda_2=3$，

所以 $\boldsymbol{M}$ 的特征值为 2 和 3． …… 10 分

B．选修 4—4：坐标系与参数方程（本小题满分 10 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=m+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t,\\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$ （t 为参数），椭圆 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=2\cos\varphi,\\ y=\sin\varphi\end{cases}$ （φ 为参数）．若直线 l 被椭圆 C 所截得的弦长为 $\dfrac{4\sqrt{2}}{5}$，求实数 m 的值．

【解】将椭圆 C 的参数方程为$\begin{cases}x=2\cos\varphi,\\y=\sin\varphi\end{cases}$（$\varphi$ 为参数）化为普通方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$． 3 分

将直线 l 的参数方程代入椭圆方程得$(m+\frac{\sqrt{2}}{2}t)^2+4\cdot(\frac{\sqrt{2}}{2}t)^2-4=0$，

即$\frac{5}{2}t^2+\sqrt{2}mt+m^2-4=0$.

由$\Delta=2m^2-4\cdot\frac{5}{2}(m^2-4)>0$，$-\sqrt{5}<m<\sqrt{5}$，

且$t_1+t_2=-\frac{2\sqrt{2}m}{5}$，$t_1t_2=\frac{2(m^2-4)}{5}$，

所以$(t_1-t_2)^2=(t_1+t_2)^2-4t_1t_2=\frac{8m^2}{25}-\frac{8(m^2-4)}{5}=\frac{8(20-4m^2)}{25}$. …… 8 分

因为直线 l 截椭圆所得弦长为$\frac{4\sqrt{2}}{5}$，

所以$\frac{8(20-4m^2)}{25}=\frac{32}{25}$，$m=\pm2$，符合$\Delta>0$.

所以$m=\pm2$. …… 10 分

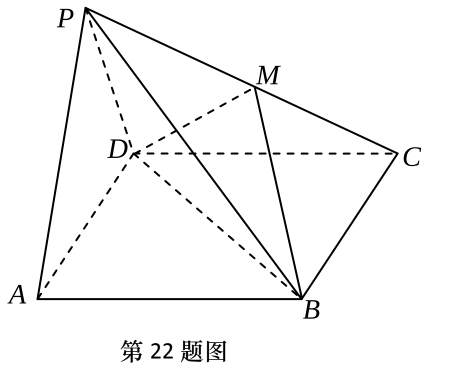
【必做题】第 22 题，第 23 题，每题 10 分，共计 20 分．请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

22．（本小题满分 10 分）

如图，在四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$是矩形，面$PAD\perp$底面$ABCD$，且ΔPAD是边长为2的等边三角形，$PC=\sqrt{13}$，M 在 PC 上，且 PA // 面 BDM.

（1）求直线 PC 与平面 BDM 所成角的正弦值；

（2）求平面 BDM 与平面 PAD 所成锐二面角的大小.



第 22 题图

解：因为面$PAD\perp$面$ABCD$，ΔPAD为正三角形，作 AD 边上的高 PO，

则由面$PAD\cap$面$ABCD$=AD，由面面垂直的性质定理，得$PO\perp$面$ABCD$，

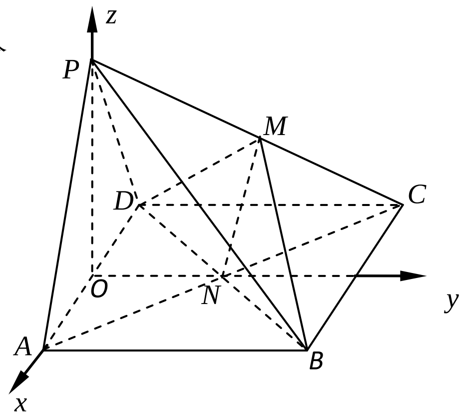
又$ABCD$是矩形，同理$CD\perp$面PAD，知$CD\perp PD$, $PC=\sqrt{13}$, $PD=2$，故CD=3． …2 分

以 AD 中点 O 为坐标原点，OA 所在直线为 x 轴，OP 所在直线为 z 轴，AD 的垂直平分线 y 轴，

建立如图所示的坐标系，则 $P(0,0,\sqrt{3}),A(1,0,0),B(1,3,0),C(-1,3,0),D(-1,0,0)$，

连结 AC 交 BD 于点 N，由 $PA//$ 面MBD，面$APC\cap$面$MBD=MN$，

所以$MN//PA$，又 N 是 AC 的中点，



所以 M 是 PC 的中点，则$M(-\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$， ………4 分

设面 BDM 的法向量为$\vec{n}=(x,y,z)$，

$\overrightarrow{BD}=(-2,-3,0),\overrightarrow{MD}=(\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$，

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{BD}=0,\vec{n}\cdot\overrightarrow{MD}=0$，得$\begin{cases}-2x-3y=0\\ \frac{x}{2}+\frac{3y}{2}+\frac{\sqrt{3}y}{2}=0\end{cases}$，

令 $x=1$，解得 $y=-\frac{2}{3},z=\frac{1}{\sqrt{3}}$，所以取$\vec{n}=(1,-\frac{2}{3},\frac{\sqrt{3}}{3})$.

（1）设 PC 与面 BDM 所成的角为θ，则$\sin\theta=\left|\frac{\overrightarrow{PC}\cdot\vec{n}}{|\overrightarrow{PC}|\cdot|\vec{n}|}\right|=\frac{3\sqrt{13}}{13}$，

所以直线 PC 与平面 BDM 所成角的正弦值为$\frac{3\sqrt{13}}{13}$. ……………………6 分

（2）面 PAD 的法向量为向量$\overrightarrow{CD}=(0,-3,0)$，设面 BDM 与面 PAD 所成的锐二面角为$\varphi$，

则$\cos\varphi=\left|\frac{\overrightarrow{CD}\cdot\vec{n}}{|\overrightarrow{CD}|\cdot|\vec{n}|}\right|=\frac{1}{2}$，故平面 BDM 与平面 PAD 所成锐二面角的大小为$\frac{\pi}{3}$. …10 分

23.（本小题满分 10 分）

设$(1+2x)^k=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_kx^k$（$k\geqslant 2$，$k\in\mathbf{N}^*$）.

（1）若展开式中第 5 项与第 7 项的系数之比为 3∶8，求 k 的值；

（2）设$k=\frac{n^2+n-2}{2}$（$n\in\mathbf{N}^*$），且各项系数a_0，a_1，a_2，…，a_k互不相同．现把这$k+1$个不同系数随机排成一个三角形数阵：第 1 列 1 个数，第 2 列 2 个数，…，第 n 列 n 个数．设t_i是第i列中的最小数，其中$1\leqslant i\leqslant n$，且i，$n\in\mathbf{N}^*$．记$t_1>t_2>t_3>\cdots>t_n$的概率为P_n．求证：$P_n>\frac{1}{2(n-1)!}$.

【解】（1）因为在展开式中第 5 项与第 7 项的系数之比为 3∶8，即$\frac{C_k^4\cdot 2^4}{C_k^6\cdot 2^6}=\frac{3}{8}$，…… 1 分

所以$\frac{C_k^4}{C_k^6}=\frac{3}{2}$，即$\frac{30}{(k-4)(k-5)}=\frac{3}{2}$，所以$k^2-9k+20=20$，

解得$k=0$或$k=9$.

因为$k\geqslant 2$，$k\in\mathbf{N}^*$，所以$k=9$． …… 3 分

（2）由题意，最小数在第n列的概率为$\dfrac{n}{\dfrac{n^2+n}{2}}=\dfrac{2}{n+1}$，

去掉第n列已经排好的n个数，

则余下的$\dfrac{n(n+1)}{2}-n=\dfrac{n(n-1)}{2}$个数中最小值在第$n-1$列的概率为$\dfrac{n-1}{\frac{n(n-1)}{2}}=\dfrac{2}{n}$，……，

余下的数中最小数在第 2 列的概率为$\dfrac{2}{3}$，

所以$P_n=\dfrac{2}{n+1}\times\dfrac{2}{n}\times\cdots\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{2^{n-1}}{(n+1)\times n\times\cdots\times 3}=\dfrac{2^n}{(n+1)!}$． …… 7 分

由于$k=\dfrac{n^2+n-2}{2}\geqslant 2$，所以$n\geqslant 2$．

（方法一）由于$2^n=(1+1)^n=C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n$

$\geqslant C_n^0+C_n^1+C_n^2>C_n^1+C_n^2=C_{n+1}^2=\dfrac{n(n+1)}{2}(n\geqslant 2)$，

所以$\dfrac{2^n}{(n+1)!}>\dfrac{C_{n+1}^2}{(n+1)!}=\dfrac{1}{2(n-1)!}$，即$P_n>\dfrac{1}{2(n-1)!}$． …… 10 分

（方法二）设$a_n=2^n-\dfrac{n(n+1)}{2}(n\geqslant 2，n\in\mathbf{N}^*)$，

所以$a_{n+1}-a_n=2^n-n-1(n\geqslant 2，n\in\mathbf{N}^*)$．

记$b_n=2^n-n-1(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*)$，所以$b_{n+1}-b_n=2^n-1>0$，

所以$\{b_n\}$是递增数列，所以$b_n\geqslant b_2=1>0$；$\{a_n\}$是递增数列，所以$a_n\geqslant a_2=1$，

所以$2^n>\dfrac{n(n+1)}{2}$，所以$\dfrac{2^n}{(n+1)!}>\dfrac{n(n+1)}{2(n+1)!}=\dfrac{1}{2(n-1)!}$，即$P_n>\dfrac{1}{2(n-1)!}$． … 10 分