

江苏省仪征中学 2020—2021 学年度第一学期高二数学

《圆锥曲线》巩固练习（1）

1. 若椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{m+3} = 1$ 的焦距为 2，则实数 m 的值为（ ）
A. 5 B. 2 C. 2 或 9 D. 5 或 7
2. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ，离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ，过 F_2 的直线

交椭圆 C 于 A, B 两点，若 $\triangle AF_1B$ 的周长为 $4\sqrt{3}$ ，则椭圆 C 的标准方程为（ ）

- A. $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$ B. $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$ C. $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{8} = 1$ D. $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1$

3. 阿基米德不仅是著名的物理学家，也是著名的数学家，他利用“逼近法”得到椭圆的面积公式，设椭圆的长半轴长、短半轴长分别为 a, b ，则椭圆的面积公式为 $S = \pi ab$ 。若椭圆 C 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，面积为 8π ，则椭圆 C 的标准方程为（ ）

- A. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ 或 $\frac{y^2}{16} + \frac{x^2}{4} = 1$ B. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ 或 $\frac{y^2}{16} + \frac{x^2}{12} = 1$
C. $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1$ 或 $\frac{y^2}{12} + \frac{x^2}{4} = 1$ D. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ 或 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$

4. （多选）在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 上存在点 P ，使得 $PF_1 = 2PF_2$ ，

其中 F_1, F_2 分别为椭圆的左、右焦点，则该椭圆的离心率可能为（ ）

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{5}$

5. 设椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的两个焦点分别为 F_1, F_2 ， $|F_1F_2| = 2\sqrt{2}$ ， P 是 C 上一点，若

$|PF_1| - |PF_2| = a$ ，且 $PF_2 \perp F_1F_2$ ，则椭圆 C 的方程为_____

6. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ ，过右焦点的直线 $l: y = x - 1$ 与椭圆交与 A, B 两点， O 为坐标原点，

则 $\triangle OAB$ 的面积为_____.

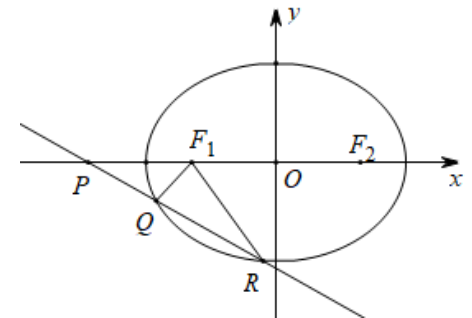
7. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ，该椭圆的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，以原点

为圆心，椭圆的短半轴长为半径的圆与直线 $y = x + \sqrt{2}$ 相切.

- （1）求椭圆 C 的方程；

- （2）如图，若斜率为 $k (k \neq 0)$ 的直线 l 与 x 轴，椭圆 C 顺次交于 P, Q, R (P 点在椭圆左顶点的左侧)

且 $\angle RF_1F_2 = \angle PF_1Q$ ，求证：直线 l 过定点.



江苏省仪征中学 2020—2021 学年度第一学期高二数学

《圆锥曲线》巩固练习（2）

1. 双曲线 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ 的渐近线方程是（ ）

- A. $y = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}x$ B. $y = \pm \frac{2\sqrt{5}}{5}x$ C. $y = \pm \frac{4}{5}x$ D. $y = \pm \frac{5}{4}x$

2. 已知双曲线的方程为 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$, 双曲线右焦点 F 到双曲线渐近线的距离（ ）

- A. 1 B. $\sqrt{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. 2

3. 在平面直角坐标系 xOy 中, 若点 $P(4\sqrt{3}, 0)$ 到双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{9} = 1$ 的一条渐近线的

距离为 6, 则双曲线 C 的离心率为（ ）

- A. 2 B. 4 C. $\sqrt{2}$ D. $\sqrt{3}$

4. (多选) 已知抛物线 $y^2 = 4x$ 的准线过双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左焦点 F , 且与

双曲线交于 A, B 两点, O 为坐标原点, $\triangle AOB$ 的面积为 $\frac{3}{2}$, 则下列结论正确的有（ ）

- A. 双曲线 C 的方程为 $4x^2 - \frac{4y^2}{3} = 1$ B. 双曲线 C 的两条渐近线的夹角为 60°

- C. 点 F 到双曲线 C 的渐近线的距离为 $\sqrt{3}$ D. 双曲线 C 的离心率为 2

5. 经过点 $A(2, -2)$ 且与双曲线 $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$ 有公共渐近线的双曲线方程为_____

6. 设双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 离心率为 $\sqrt{5}$.

P 是 C 上一点, 且 $F_1P \perp F_2P$. 若 $\triangle PF_1F_2$ 的面积为 8, 则 $a =$ _____.

7. 已知双曲线 C 过点 $(4, \sqrt{3})$, 且渐近线方程为 $y = \pm \frac{1}{2}x$, 直线 l 与曲线 C 交于点 M、N 两点.

(1) 求双曲线 C 的方程;

(2) 若直线 l 过点 $(1, 0)$, 问在 x 轴上是否存在定点 Q, 使得 $\overrightarrow{QM} \cdot \overrightarrow{QN}$ 为常数? 若存在, 求出点坐标及

此常数的值; 若不存在, 说明理由.

江苏省仪征中学 2020—2021 学年度第一学期高二数学

《圆锥曲线》巩固练习（3）

1. 设抛物线的顶点在原点，准线方程为 $x = -2$ ，则抛物线的方程是（ ）

- A. $y^2 = -8x$ B. $y^2 = 8x$ C. $y^2 = -4x$ D. $y^2 = 4x$

2. 已知 F 是抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点， M, N 是该抛物线上两点， $|MF| + |NF| = 6$ ，

则 MN 的中点到准线的距离为（ ）

- A. $\frac{3}{2}$ B. 2 C. 3 D. 4

3. 已知抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$)，过抛物线的焦点作 x 轴的垂线，与抛物线交于 A, B 两点，点 M 的坐标为

$(-2, 0)$ ，且 $\triangle ABM$ 为直角三角形，则以直线 AB 为准线的抛物线的标准方程为（ ）

- A. $y^2 = 8x$ B. $y^2 = -8x$ C. $y^2 = -4x$ D. $y^2 = 4x$

4. (多选) 已知抛物线 $C: y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的焦点 F 到准线的距离为 2，过点 F 的直线与

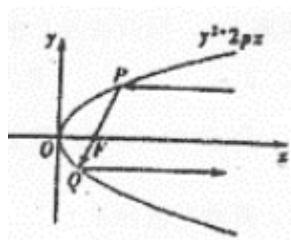
抛物线交于 P, Q 两点， M 为线段 PQ 的中点， O 为坐标原点，则（ ）

- A. C 的准线方程为 $y = 1$ B. 线段 PQ 长度的最小值为 4

- C. M 的坐标可能为 $(3, 2)$ D. $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = -3$

5. 过抛物线 $y^2 = 8x$ 的焦点 F 的直线 l 与抛物线交于 A, B 两点，线段 AB 的中点 M 在

直线 $y = 2$ 上， O 为坐标原点，则 $\triangle AOB$ 的面积为_____



6. 抛物线有如下光学性质由其焦点射出的光线经抛物线反射后，沿平行于抛物线对称轴的方向射出，今有

抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$)，如图，一平行 x 轴的光线射向抛物线上的点 P ，经过抛物线的焦点 F 反射后射向

抛物线上的点 Q ，再反射后又沿平行 x 轴方向射出，若两平行光线间的最小距离为 6，则此抛物线的方程

为_____.

7. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知圆 $F: (x-2)^2 + y^2 = 1$ ，动圆 M 与直线 $l: x = -1$ 相切且与圆 F 外切.

(1) 记圆心 M 的轨迹为曲线 C ，求曲线 C 的方程；

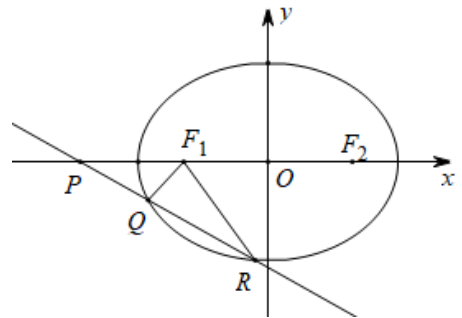
(2) 已知 $A(-2, 0)$ ，曲线 C 上一点 P 满足 $PA = \sqrt{2}PF$ ，求 $\angle PAF$ 的大小.

《圆锥曲线》巩固练习（1）

1. 若椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{m+3} = 1$ 的焦距为 2，则实数 m 的值为（ ）D
A. 5 B. 2 C. 2 或 9 D. 5 或 7
2. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ，离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ，过 F_2 的直线交椭圆 C 于 A, B 两点，若 $\triangle AF_1B$ 的周长为 $4\sqrt{3}$ ，则椭圆 C 的标准方程为（ A ）
A. $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$ B. $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$
C. $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{8} = 1$ D. $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1$
3. 阿基米德不仅是著名的物理学家，也是著名的数学家，他利用“逼近法”得到椭圆的面积公式，设椭圆的长半轴长、短半轴长分别为 a, b ，则椭圆的面积公式为 $S = \pi ab$. 若椭圆 C 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，面积为 8π ，则椭圆 C 的标准方程为（ ）A
A. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ 或 $\frac{y^2}{16} + \frac{x^2}{4} = 1$ B. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ 或 $\frac{y^2}{16} + \frac{x^2}{12} = 1$
C. $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1$ 或 $\frac{y^2}{12} + \frac{x^2}{4} = 1$ D. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ 或 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$
4. （多选）在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 上存在点 P ，使得 $PF_1 = 2PF_2$ ，其中 F_1, F_2 分别为椭圆的左、右焦点，则该椭圆的离心率可能为（ ）AB
A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{5}$
5. 设椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的两个焦点分别为 F_1, F_2 ， $|F_1F_2| = 2\sqrt{2}$ ， P 是 C 上一点，若 $|PF_1| - |PF_2| = a$ ，且 $PF_2 \perp F_1F_2$ ，则椭圆 C 的方程为_____。 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$
6. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ ，过右焦点的直线 $l: y = x - 1$ 与椭圆交与 A, B 两点， O 为坐标原点，

则 $\triangle OAB$ 的面积为_____。 $\frac{2}{3}$

7. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ，该椭圆的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，以原点为圆心，椭圆的短半轴长为半径的圆与直线 $y = x + \sqrt{2}$ 相切。



- (1) 求椭圆 C 的方程；
(2) 如图，若斜率为 $k (k \neq 0)$ 的直线 l 与 x 轴，椭圆 C 顺次交于 P, Q, R (P 点在椭圆左顶点的左侧) 且 $\angle RF_1F_2 = \angle PF_1Q$ ，求证：直线 l 过定点。

- (1) 解：椭圆的左、右焦点分别为 $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$ ，椭圆的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，
即有 $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，即 $a = \sqrt{2}c$ ， $b = \sqrt{a^2 - c^2} = c$ ，
以原点为圆心，椭圆的短半轴长为半径的圆方程为 $x^2 + y^2 = b^2$ ，
直线 $y = x + \sqrt{2}$ 与圆相切，则有 $\frac{|\sqrt{2}|}{\sqrt{2}} = 1 = b$ ，即有 $a = \sqrt{2}$ ，则椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ ；
(2) 证明：设 $Q(x_1, y_1)$ ， $R(x_2, y_2)$ ， $F_1(-1, 0)$
由 $\angle RF_1F_2 = \angle PF_1Q$ ，可得直线 QF_1 和 RF_1 关于 x 轴对称，
即有 $k_{QF_1} + k_{RF_1} = 0$ ，即 $\frac{y_1}{x_1 + 1} + \frac{y_2}{x_2 + 1} = 0$ ，即有 $x_1y_2 + y_2 + x_2y_1 + y_1 = 0$ ，①
设直线 $PQ: y = kx + t$ ，代入椭圆方程，可得 $(1 + 2k^2)x^2 + 4ktx + 2t^2 - 2 = 0$ ，
判别式 $\Delta = 16k^2t^2 - 4(1 + 2k^2)(2t^2 - 2) > 0$ ，

即为 $t^2 - 2k^2 < 1$ ②, $x_1 + x_2 = \frac{-4kt}{1+2k^2}$, $x_1 x_2 = \frac{2t^2 - 2}{1+2k^2}$ ③,

$y_1 = kx_1 + t$, $y_2 = kx_2 + t$,

代入①可得, $(k+t)(x_1 + x_2) + 2t + 2kx_1 x_2 = 0$,

将③代入, 化简可得 $t = 2k$,

则直线 l 的方程为 $y = kx + 2k$, 即 $y = k(x+2)$.

即有直线 l 恒过定点 $(-2, 0)$.

江苏省仪征中学 2020—2021 学年度第一学期高二数学

《圆锥曲线》巩固练习（2）

1. 双曲线 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ 的渐近线方程是 () A

A. $y = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}x$ B. $y = \pm \frac{2\sqrt{5}}{5}x$ C. $y = \pm \frac{4}{5}x$ D. $y = \pm \frac{5}{4}x$

2. 已知双曲线的方程为 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$, 双曲线右焦点 F 到双曲线渐近线的距离 () C

A.1 B. $\sqrt{2}$ C. $\sqrt{3}$ D.2

3. 在平面直角坐标系 xOy 中, 若点 $P(4\sqrt{3}, 0)$ 到双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{9} = 1$ 的一条渐近线的

距离为 6, 则双曲线 C 的离心率为 () A

A.2 B.4 C. $\sqrt{2}$ D. $\sqrt{3}$

4. (多选) 已知抛物线 $y^2 = 4x$ 的准线过双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左焦点 F , 且与双曲线

交于 A, B 两点, O 为坐标原点, $\triangle AOB$ 的面积为 $\frac{3}{2}$, 则下列结论正确的有 (ABD)

A. 双曲线 C 的方程为 $4x^2 - \frac{4y^2}{3} = 1$

B. 双曲线 C 的两条渐近线的夹角为 60°

C. 点 F 到双曲线 C 的渐近线的距离为 $\sqrt{3}$

D. 双曲线 C 的离心率为 2

5. 经过点 $A(2, -2)$ 且与双曲线 $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$ 有公共渐近线的双曲线方程为 $\frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{4} = 1$

6. 设双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 离心率为 $\sqrt{5}$.

P 是 C 上一点, 且 $F_1P \perp F_2P$. 若 $\triangle PF_1F_2$ 的面积为 8, 则 $a = \sqrt{2}$.

7. 已知双曲线 C 过点 $(4, \sqrt{3})$, 且渐近线方程为 $y = \pm \frac{1}{2}x$, 直线 l 与曲线 C 交于点 M, N 两点.

(1) 求双曲线 C 的方程;

(2) 若直线 l 过点 $(1, 0)$, 问在 x 轴上是否存在定点 Q , 使得 $\overrightarrow{QM} \cdot \overrightarrow{QN}$ 为常数? 若存在, 求出点坐标及此常

数的值; 若不存在, 说明理由.

【解】: (1) $\because$ 双曲线 C 过点 $(4, \sqrt{3})$, 且渐近线方程为 $y = \pm \frac{1}{2}x$,

$\therefore \begin{cases} \frac{16}{a^2} - \frac{3}{b^2} = 1 \\ \frac{b}{a} = \frac{1}{2} \end{cases}$, 解得 $b^2 = 1, a^2 = 4$,

$\therefore$ 双曲线的方程为 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$;4 分

(2) 设直线 l 的方程为 $x = my + 1$, 设定点 $Q(t, 0)$

联立方程组 $\begin{cases} \frac{x^2}{4} - y^2 = 1 \\ x = my + 1 \end{cases}$, 消 x 可得 $(m^2 - 4)y^2 + 2my - 3 = 0$,

$\therefore m^2 - 4 \neq 0$, 且 $\Delta = 4m^2 + 12(m^2 - 4) > 0$, 解得 $m^2 > 3$ 且 $m^2 \neq 4$,

设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$,

$\therefore y_1 + y_2 = -\frac{2m}{m^2 - 4}, y_1 y_2 = -\frac{3}{m^2 - 4}$,6 分

$\therefore x_1 + x_2 = m(y_1 + y_2) + 2 = -\frac{2m^2}{m^2 - 4} + 2 = \frac{-8}{m^2 - 4}$,

$x_1 x_2 = (my_1 + 1)(my_2 + 1) = m^2 y_1 y_2 + m(y_1 + y_2) + 1 = -\frac{3m^2}{m^2 - 4} - \frac{2m^2}{m^2 - 4} + 1 = -\frac{4m^2 + 4}{m^2 - 4}$

$= -4 - \frac{20}{m^2 - 4}$ 8 分

$\therefore \overrightarrow{QM} \cdot \overrightarrow{QN} = (x_1 - t, y_1)(x_2 - t, y_2) = (x_1 - t)(x_2 - t) + y_1 y_2$

$= x_1 x_2 - t(x_1 + x_2) + t^2 + y_1 y_2 = -4 - \frac{20}{m^2 - 4} + t \cdot \frac{8}{m^2 - 4} - \frac{3}{m^2 - 4} + t^2 = -4 + t^2 + \frac{8t - 23}{m^2 - 4}$ 为

常数, 与 m 无关.

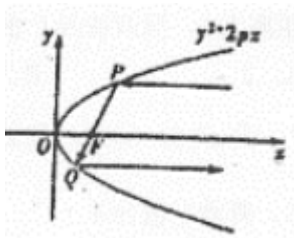
$\therefore 8t - 23 = 0$,

解得 $t = \frac{23}{8}$, 此时 $\overrightarrow{QM} \cdot \overrightarrow{QN} = \frac{273}{64}$12 分

江苏省仪征中学 2020—2021 学年度第一学期高二数学

《圆锥曲线》巩固练习（3）

1. 设抛物线的顶点在原点，准线方程为 $x = -2$ ，则抛物线的方程是（ ） B
 A. $y^2 = -8x$ B. $y^2 = 8x$ C. $y^2 = -4x$ D. $y^2 = 4x$
2. 已知 F 是抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点， M, N 是该抛物线上两点， $|MF| + |NF| = 6$ ，
 则 MN 的中点到准线的距离为（ ） C
 A. $\frac{3}{2}$ B. 2 C. 3 D. 4
3. 已知抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ ，过抛物线的焦点作 x 轴的垂线，与抛物线交于 A, B 两点，点 M 的坐标为 $(-2, 0)$ ，且 $\triangle ABM$ 为直角三角形，则以直线 AB 为准线的抛物线的标准方程为（B）
 A. $y^2 = 8x$ B. $y^2 = -8x$ C. $y^2 = -4x$ D. $y^2 = 4x$
4. （多选）已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点 F 到准线的距离为 2，过点 F 的直线与
 抛物线交于 P, Q 两点， M 为线段 PQ 的中点， O 为坐标原点，则（ ） BCD
 A. C 的准线方程为 $y = 1$ B. 线段 PQ 长度的最小值为 4
 C. M 的坐标可能为 $(3, 2)$ D. $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = -3$
5. 过抛物线 $y^2 = 8x$ 的焦点 F 的直线 l 与抛物线交于 A, B 两点，线段 AB 的中点 M 在
 直线 $y = 2$ 上， O 为坐标原点，则 $\triangle AOB$ 的面积为 $4\sqrt{5}$
6. 抛物线有如下光学性质：由其焦点射出的光线经抛物线反射后，沿平行于抛物线对称轴的方向射出，今有
 抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ ，如图，一平行 x 轴的光线射向抛物线上的点 P ，经过抛物线的焦点 F 反射后射向
 抛物线上的点 Q ，再反射后又沿平行 x 轴方向射出，若两平行光线间的最小距离为 6，则此抛物线的方程
 为 . $y^2 = 6x$



7. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知圆 $F: (x-2)^2 + y^2 = 1$ ，动圆 M 与直线 $l: x = -1$ 相切
 且与圆 F 外切.
 (1) 记圆心 M 的轨迹为曲线 C ，求曲线 C 的方程；
 (2) 已知 $A(-2, 0)$ ，曲线 C 上一点 P 满足 $PA = \sqrt{2}PF$ ，求 $\angle PAF$ 的大小.
- 解：** (1) 设 $M(x, y)$ ，圆 M 的半径为 r .
 由题意知， $MF = r + 1$ ， M 到直线 l 的距离为 r .
方法一： 点 M 到点 $F(2, 0)$ 的距离等于 M 到定直线 $x = -2$ 的距离，
 根据抛物线的定义知，曲线 C 是以 $F(2, 0)$ 为焦点， $x = -2$ 为准线的抛物线.
 故曲线 C 的方程为 $y^2 = 8x$6 分
方法二： 因为 $MF = \sqrt{(x-2)^2 + y^2} = r + 1$ ， $|x + 1| = r$ ， $x > -1$ ，
 所以 $\sqrt{(x-2)^2 + y^2} = x + 2$ ，化简得 $y^2 = 8x$ ，
 故曲线 C 的方程为 $y^2 = 8x$6 分
- (2) **方法一：** 设 $P(x_0, y_0)$ ，由 $PA = \sqrt{2}PF$ ，
 得 $(x_0 + 2)^2 + y_0^2 = 2[(x_0 - 2)^2 + y_0^2]$ ，8 分
 又 $y_0^2 = 8x_0$ ，解得 $x_0 = 2$ ，故 $P(2, \pm 4)$ ，10 分
 所以 $k_{PA} = \pm 1$ ，从而 $\angle PAF = \frac{\pi}{4}$12 分
方法二： 过点 P 向直线 $x = -2$ 作垂线，垂足为 Q .
 由抛物线定义知， $PQ = PF$ ，所以 $PA = \sqrt{2}PQ$ ，8 分
 在 $\triangle APQ$ 中，因为 $\angle PQA = \frac{\pi}{2}$ ，
 所以 $\sin \angle QAP = \frac{PQ}{PA} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，10 分
 从而 $\angle QAP = \frac{\pi}{4}$ ，故 $\angle PAF = \frac{\pi}{4}$12 分