

班级_____ 姓名_____ 学号_____ 日期_____

一、填空题

1. 已知集合 $U = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$, $A = \{-1, 0, 2\}$, 则 $\complement_U A =$ _____.

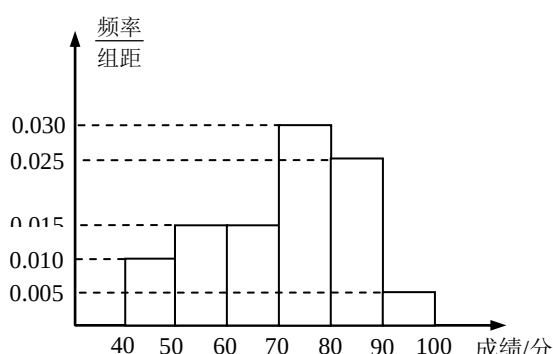
【答案】 $\{1, 3\}$

2. 已知复数 $z_1 = a + i$, $z_2 = 3 - 4i$, 其中 i 为虚数单位. 若 $\frac{z_1}{z_2}$ 为纯虚数, 则实数 a 的值为_____.

【答案】 $\frac{4}{3}$

3. 某班 40 名学生参加普法知识竞赛, 成绩都在区间 $[40, 100]$ 上, 其频率分布直方图如图所示, 则成绩不低于 60 分的人数为_____.

【答案】 30



(第 3 题)

```

s ← 0
t ← 1
For I From 1 To 5 step 2
    s ← s + I
    t ← t × I
End For
r ← s × t
Print r

```

4. 阅读下面的伪代码, 由这个算法输出的结果为_____.

【答案】 135

5. 如图是甲、乙两位同学在 5 次数学测试中得分的茎叶图,

则成绩较稳定的那一位同学的标准差为_____.

甲	乙
98	8
210	79
	013

【答案】 $\sqrt{2}$

6. 将黑白 2 个小球随机放入编号为 1, 2, 3 的三个盒子中, 则黑白两球均不在 1 号盒子的概率为_____.

【答案】 $\frac{4}{9}$

7. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知双曲线 C 与双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ 有公共的渐近线, 且经过点 $P(-2, \sqrt{3})$, 则双曲线 C 的焦距为_____.

【答案】 $4\sqrt{3}$

8. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知角 α, β 的始边均为 x 轴的非负半轴, 终边分别经过点 $A(1, 2)$, $B(5, 1)$, 则 $\tan(\alpha - \beta)$ 的值为_____.

【答案】 $\frac{9}{7}$

9. 设等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n . 若 S_3, S_9, S_6 成等差数列, 且 $a_8 = 3$, 则 a_5 的值为

【答案】-6

11. 若正实数 x, y 满足 $(2xy-1)^2 = (5y+2)(y-2)$, 则 $x + \frac{1}{2y}$ 的最大值是_____.

Handwritten solution for problem 11:

$$x + \frac{1}{2y} = t \Rightarrow 2xy - 1 = 2yt - 2 \Rightarrow (4t^2 - 5)y^2 + 8(1-t)y + 8 = 0$$

Since $y > 0$, the discriminant $\Delta \geq 0$ gives:

$$\Delta = 64(1-t)^2 - 32(4t^2 - 5) \geq 0 \Rightarrow -16t^2 + 32t - 16 \geq 0 \Rightarrow t^2 - 2t + 1 \leq 0 \Rightarrow (t-1)^2 \leq 0 \Rightarrow t = 1$$

Thus, the maximum value is 1.

Another handwritten solution for problem 11:

$$(2xy-1)^2 = 9y^2 - (2y+2)^2$$

$$9y^2 = (2y+2)^2 + (2xy-1)^2$$

$$9 = (2 + \frac{2}{y})^2 + (2x - \frac{1}{y})^2 \geq \frac{(2x - \frac{1}{y} + 2 + \frac{2}{y})^2}{2} \geq \frac{(2x + \frac{1}{y} + 4)^2}{2} \geq 18 \Rightarrow \checkmark$$

Equality holds when $2x + \frac{1}{y} + 4 = 0$, which is not possible for positive x, y . However, the first method shows the maximum is 1.

12. 在平面四边形 $ABCD$ 中, 已知 $\triangle ABC$ 的面积是 $\triangle ACD$ 的面积 3 倍, 若存在正实数 x, y 使得

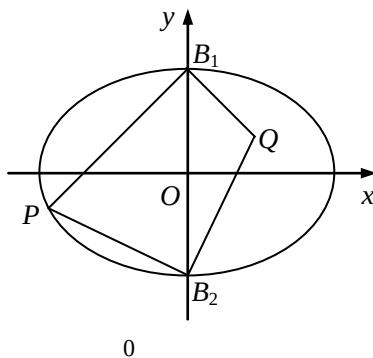
$\overrightarrow{AC} = (\frac{1}{x} - 3)\overrightarrow{AB} + (1 - \frac{1}{y})\overrightarrow{AD}$ 成立, 则 $x + y$ 的最小值是_____.

二、解答题

13. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, B_1, B_2 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的短轴端点, P 是椭圆上异于点 B_1, B_2 的一动点. 当直线 PB_1 的方程为 $y = x + 3$ 时, 线段 PB_1 的长为 $4\sqrt{2}$.

(1) 求椭圆的标准方程;

(2) 设点 Q 满足: $QB_1 \perp PB_1, QB_2 \perp PB_2$. 求证: $\triangle PB_1B_2$ 与 $\triangle QB_1B_2$ 的面积之比为定值.



解: 设 $P(x_0, y_0), Q(x_1, y_1)$.

(1) 在 $y = x + 3$ 中, 令 $x = 0$, 得 $y = 3$, 从而 $b = 3$.

..... 2 分

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{9} = 1 \\ y = x + 3 \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{(x+3)^2}{9} = 1$$

$$\text{所以 } x_0 = -\frac{6a^2}{9+a^2}$$

..... 4 分

$$\text{因为 } PB_1 = \sqrt{x_0^2 + (y_0 - 3)^2} = \sqrt{2}|x_0|, \text{ 所以 } 4\sqrt{2} = \sqrt{2} \cdot \frac{6a^2}{9+a^2}, \text{ 解得 } a^2 = 18.$$

$$\text{所以椭圆的标准方程为 } \frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

..... 6 分

(2) 方法一:

直线 PB_1 的斜率为 $k_{PB_1} = \frac{y_0 - 3}{x_0}$,

由 $QB_1 \perp PB_1$, 所以直线 QB_1 的斜率为 $k_{QB_1} = -\frac{x_0}{y_0 - 3}$.

于是直线 QB_1 的方程为: $y = -\frac{x_0}{y_0 - 3}x + 3$.

同理, QB_2 的方程为: $y = -\frac{x_0}{y_0 + 3}x - 3$ 8 分

联立两直线方程, 消去 y , 得 $x_1 = \frac{y_0^2 - 9}{x_0}$ 10 分

因为 $P(x_0, y_0)$ 在椭圆 $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1$ 上, 所以 $\frac{x_0^2}{18} + \frac{y_0^2}{9} = 1$, 从而 $y_0^2 - 9 = -\frac{x_0^2}{2}$.

所以 $x_1 = -\frac{x_0}{2}$ 12 分

所以 $\frac{S_{\triangle PB_1B_2}}{S_{\triangle QB_1B_2}} = \left| \frac{x_0}{x_1} \right| = 2$ 14 分

方法二:

设直线 PB_1, PB_2 的斜率为 k, k' , 则直线 PB_1 的方程为 $y = kx + 3$.

由 $QB_1 \perp PB_1$, 直线 QB_1 的方程为 $y = -\frac{1}{k}x + 3$.

将 $y = kx + 3$ 代入 $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1$, 得 $(2k^2 + 1)x^2 + 12kx = 0$,

因为 P 是椭圆上异于点 B_1, B_2 的点, 所以 $x_0 \neq 0$, 从而 $x_0 = -\frac{12k}{2k^2 + 1}$ 8 分

因为 $P(x_0, y_0)$ 在椭圆 $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1$ 上, 所以 $\frac{x_0^2}{18} + \frac{y_0^2}{9} = 1$, 从而 $y_0^2 - 9 = -\frac{x_0^2}{2}$.

所以 $k \cdot k' = \frac{y_0 - 3}{x_0} \cdot \frac{y_0 + 3}{x_0} = \frac{y_0^2 - 9}{x_0^2} = -\frac{1}{2}$, 得 $k' = -\frac{1}{2k}$ 10 分

由 $QB_2 \perp PB_2$, 所以直线 QB_2 的方程为 $y = 2kx - 3$.

联立 $\begin{cases} y = -\frac{1}{k}x + 3, \\ y = 2kx - 3 \end{cases}$ 则 $x = \frac{6k}{2k^2 + 1}$, 即 $x_1 = \frac{6k}{2k^2 + 1}$ 12 分

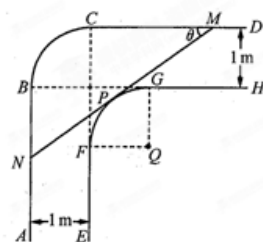
所以 $\frac{S_{\triangle PB_1B_2}}{S_{\triangle QB_1B_2}} = \left| \frac{x_0}{x_1} \right| = \left| \frac{-\frac{12k}{2k^2 + 1}}{\frac{6k}{2k^2 + 1}} \right| = 2$ 14 分

14. 一走廊拐角处的横截面如图所示, 已知内壁 FG 和外壁 BC 都是半径为 1m 的四分之一圆弧, AB, DC 分别与圆弧 BC 相切于 B, C 两点, $EF \parallel AB, GH \parallel CD$, 且两组平行墙壁间的走廊宽度都是 1m.

(1) 若水平放置的木棒 MN 的两个端点 M, N 分别在外壁 CD 和 AB 上,

木棒与内壁圆弧相切于点 P , 设 $\angle CMN = \theta$ (rad), 试用 θ 表示木棒 MN

长度 $f(\theta)$;



且
的

(2) 若一根水平放置的木棒能通过该走廊拐角处, 求木棒长度的最大值。

(1) 如图, 设圆弧 FG 所在的圆的圆心为 Q , 过 Q 点作 CD 的垂线, 垂足为点 T , 且交 MN 或其延长线于 S , 并连结 PQ , 再过点 N 作 TQ 的垂线, 垂足为 W , 在 $Rt\triangle NWS$ 中, 因为 $NW = 2$, $\angle SNW = \theta$, 所以 $NS = \frac{2}{\cos \theta}$,

因为 MN 与圆弧 FG 切于点 P, 所以 $PQ \perp MN$, 在 $Rt\triangle QPS$ 中, 因为 $PQ=1$, $\angle PQS=\theta$, 所以 $QS=\frac{1}{\cos \theta}$, $QT-QS=2-\frac{1}{\cos \theta}$,

①若 s 在线段 TG 上, 则 $TS=QT-QS$, 在 $Rt\triangle STM$ 中, $MS=\frac{TS}{\sin \theta}=\frac{QT-QS}{\sin \theta}$,

因此 $MN=NS+MS=NS+\frac{QT-QS}{\sin \theta}$.

②若 s 在线段 GT 的延长线上, 则 $TS=QS-QT$, 在 $Rt\triangle STM$ 中,

$$MS=\frac{TS}{\sin \theta}=\frac{QS-QT}{\sin \theta}, \text{ 因此 } MN=NS-MS=NS-\frac{QS-QT}{\sin \theta}=NS+\frac{QT-QS}{\sin \theta}$$

$$f(\theta)=MN=NS+\frac{QT-QS}{\sin \theta}=\frac{2}{\cos \theta}+\left(\frac{2}{\sin \theta}-\frac{1}{\sin \theta \cos \theta}\right)=\frac{2(\sin \theta+\cos \theta)-1}{\sin \theta \cos \theta}$$

(2) 设 $\sin \theta+\cos \theta=t(1 < t \leq \sqrt{2})$ 则 $\sin \theta \cos \theta=\frac{t^2-1}{2}$, 因此 $f(\theta)=g(t)=\frac{4t-2}{t^2-1}$, 因为

$$g'(t)=\frac{-4(t^2-t+1)}{(t^2-1)^2}, \text{ 又 } 1 < t \leq \sqrt{2}, \text{ 所以 } g'(t) < 0 \text{ 恒成立.}$$

因此函数 $g(t)=\frac{4t-2}{t^2-1}$ 在 $t \in (1, \sqrt{2}]$ 上是减函数, 所以 $g(t)_{\min}=g(\sqrt{2})=4\sqrt{2}-2$, 即

$$MN_{\min}=4\sqrt{2}-2.$$

15. 设函数 $f(x)=x-a\sin x$ ($a>0$).

(1) 若函数 $y=f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的单调增函数, 求实数 a 的取值范围;

(2) 设 $a=\frac{1}{2}$, $g(x)=f(x)+b\ln x+1$ ($b \in \mathbf{R}, b \neq 0$), $g'(x)$ 是 $g(x)$ 的导函数.

若对任意的 $x>0$, $g'(x)>0$, 求证: 存在 x_0 , 使 $g(x_0)<0$;

解 (1) 由题意, $f'(x)=1-a\cos x \geq 0$ 对 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立, 1 分

因为 $a>0$, 所以 $\frac{1}{a} \geq \cos x$ 对 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立,

因为 $(\cos x)_{\max}=1$, 所以 $\frac{1}{a} \geq 1$, 从而 $0 < a \leq 1$ 3 分

(2) $g(x)=x-\frac{1}{2}\sin x+b\ln x+1$, 所以 $g'(x)=1-\frac{1}{2}\cos x+\frac{b}{x}$.

若 $b<0$, 则存在 $-\frac{b}{2}>0$, 使 $g'\left(-\frac{b}{2}\right)=-1-\frac{1}{2}\cos\left(-\frac{b}{2}\right)<0$, 不合题意,

所以 $b>0$ 5 分

取 $x_0=e^{-\frac{3}{b}}$, 则 $0 < x_0 < 1$.

此时 $g(x_0)=x_0-\frac{1}{2}\sin x_0+b\ln x_0+1 < 1+\frac{1}{2}+b\ln e^{-\frac{3}{b}}+1=-\frac{1}{2}<0$.

所以存在 $x_0>0$, 使 $g(x_0)<0$ 8 分

附加题

1. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知 $A(0, 0)$, $B(3, 0)$, $C(2, 2)$. 设变换 T_1 , T_2 对应的矩阵分别为

$M=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $N=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, 求对 $\triangle ABC$ 依次实施变换 T_1 , T_2 后所得图形的面积.

解：依题意，依次实施变换 T_1 ， T_2 所对应的矩阵 $NM = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. … 5 分

$$\text{则 } \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

所以 $A(0, 0)$ ， $B(3, 0)$ ， $C(2, 2)$ 分别变为点 $A'(0, 0)$ ， $B'(6, 0)$ ， $C'(4, 4)$ 。

从而所得图形的面积为 $\frac{1}{2} \times 6 \times 4 = 12$. …… 10 分

2. 在极坐标系中，求以点 $P\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$ 为圆心且与直线 $l: \rho \sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = 2$ 相切的圆的极坐标方程。

解：以极点为原点，极轴为 x 轴的非负半轴，建立平面直角坐标系 xOy 。

则点 P 的直角坐标为 $(1, \sqrt{3})$. …… 2 分

将直线 $l: \rho \sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = 2$ 的方程变形为： $\rho \sin \theta \cos \frac{\pi}{3} - \rho \cos \theta \sin \frac{\pi}{3} = 2$,

化为普通方程得， $\sqrt{3}x - y + 4 = 0$. …… 5 分

所以 $P(1, \sqrt{3})$ 到直线 $l: \sqrt{3}x - y + 4 = 0$ 的距离为： $\frac{4}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2}} = 2$.

故所求圆的普通方程为 $(x-1)^2 + (y-\sqrt{3})^2 = 4$. …… 8 分

化为极坐标方程得， $\rho = 4 \sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)$. …… 10

在某公司举行的年终庆典活动中，主持人利用随机抽奖软件进行抽奖：由电脑随机生成一张如图所示的 3×3 表格，其中 1 格设奖 300 元，4 格各设奖 200 元，其余 4 格各设奖 100 元，点击某一格即显示相应金额。某人在一张表中随机不重复地点击 3 格，记中奖的总金额为 X 元。

(1) 求概率 $P(X = 600)$ ；

(2) 求 X 的概率分布及数学期望 $E(X)$ 。

解：(1) 从 3×3 表格中随机不重复地点击 3 格，共有 C_9^3 种不同情形。

则事件：“ $X = 600$ ” 包含两类情形：

第一类是 3 格各得奖 200 元；

第二类是 1 格得奖 300 元，一格得奖 200 元，一格得奖 100 元，

其中第一类包含 C_4^3 种情形，第二类包含 $C_1^1 \cdot C_4^1 \cdot C_4^1$ 种情形。

(第 22 题)

所以 $P(X = 600) = \frac{C_4^3 + C_1^1 \cdot C_4^1 \cdot C_4^1}{C_9^3} = \frac{5}{21}$. …… 3 分

(2) X 的所有可能值为 300, 400, 500, 600, 700.

则 $P(X = 300) = \frac{C_4^3}{C_9^3} = \frac{4}{84} = \frac{1}{21}$, $P(X = 400) = \frac{C_1^1 \cdot C_4^2}{C_9^3} = \frac{24}{84} = \frac{2}{7}$,

$P(X = 500) = \frac{C_1^1 \cdot C_4^2 + C_4^1 \cdot C_4^2}{C_9^3} = \frac{30}{84} = \frac{5}{14}$, $P(X = 700) = \frac{C_1^1 \cdot C_4^2}{C_9^3} = \frac{6}{84} = \frac{3}{42}$.

所以 X 的概率分布列为：

X	300	400	500	600	700
P	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{3}{42}$

…… 8 分

所以 $E(X) = 300 \times \frac{1}{21} + 400 \times \frac{2}{7} + 500 \times \frac{5}{14} + 600 \times \frac{5}{21} + 700 \times \frac{3}{42} = 500$ (元).

…… 10 分