

江苏省仪征中学 2021—2022 学年度第一学期午间练 29

学校：_____ 姓名：_____ 班级：_____ 考号：_____

一、单选题（本大题共 2 小题，共 10.0 分）

1. 已知扇形 OAB 的面积为 2，弧长 $\widehat{AB} = 2$ ，则 $AB = ()$

A. $2\sin 1$

B. $2\sin \frac{1}{2}$

C. $4\sin 1$

D. $4\sin \frac{1}{2}$

2. 已知扇形的弧长为 $\frac{3\pi}{2}$ ，圆心角为 $\frac{\pi}{2}$ ，则该扇形的面积为()

A. $\frac{\pi}{4}$

B. $\frac{\pi}{6}$

C. $\frac{\pi}{2}$

D. $\frac{9\pi}{4}$

二、多选题（本大题共 1 小题，共 5.0 分）

3. 关于函数 $f(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}$ ，下列选项中正确的有()

A. $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

B. $f(x)$ 为奇函数

C. $f(x)$ 在定义域上是增函数

D. 函数 $f(x)$ 与 $y = \ln(1-x) - \ln(1+x)$ 是同一个函数

三、单空题（本大题共 2 小题，共 10.0 分）

4. 函数 $y = (\log_{\frac{1}{4}} x)^2 - \log_{\frac{1}{4}} x^2 + 5$ 在 $2 \leq x \leq 4$ 时的值域为_____.

5. 函数 $y = \log_a(x-1) + 8$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 的图象恒过定点 P ， P 在幂函数 $f(x)$ 的图象上，则 $f(3) =$ _____.

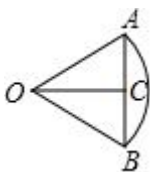
四、解答题（本大题共 1 小题，共 12.0 分）

6. 已知 $x > 0$ ， $y > 0$ ， $4x + y = 3$.

(1)求 xy 的最大值；

(2)求 $\frac{3}{x} + \frac{12}{y}$ 的最小值.

1. 【答案】D 设扇形的半径 r ，圆心角为 θ ，



扇形 OAB 的面积为2，弧长 $l = \widehat{AB} = 2$ ，可得 $\frac{1}{2} \times r \times \theta = 2$ ，解得 $r = 2$ ， $\theta = \frac{l}{r} = \frac{2}{2} = 1$ ，如图所示， $AB = 2AC = 4\sin\frac{1}{2}$ 。故选D。

2. 【答案】D 解：扇形的圆心角 $\theta = \frac{l}{r} = \frac{\frac{3\pi}{2}}{r} = \frac{\pi}{2}$ ，所以 $r = 3$ ，则扇形的面积 $S = \frac{1}{2}lr = \frac{1}{2} \times \frac{3\pi}{2} \times 3 = \frac{9\pi}{4}$ 。故选：D。

3. 【答案】BD 解：函数的定义域为 $\frac{1-x}{1+x} > 0$ ， $(x-1)(x+1) < 0$ ， $-1 < x < 1$ ，所以A错误；因为 $f(-x) + f(x) = \ln\frac{1+x}{1-x} + \ln\frac{1-x}{1+x} = 0$ ，所以 $f(x)$ 为奇函数，所以B正确，因为 $f(x) = \ln\frac{1-x}{1+x} = \ln(-1 + \frac{2}{1+x})$ ，由复合函数的单调性可知， $f(x)$ 在定义域上是减函数，所以C错误，因为 $y = \ln(1-x) - \ln(1+x)$ 的定义域为 $\begin{cases} 1-x > 0 \\ 1+x > 0 \end{cases}$ ， $-1 < x < 1$ ，对应法则与 $f(x)$ 一致，值域与 $f(x)$ 的值域相同，所以函数 $f(x)$ 与 $y = \ln(1-x) - \ln(1+x)$ 是同一个函数，所以D正确，故选BD。

4. 【答案】 $\{y | \frac{25}{4} \leq y \leq 8\}$ 解：令 $t = \log_{\frac{1}{4}}x$ ，因为 $2 \leq x \leq 4$ ，所以 $-1 \leq t \leq -\frac{1}{2}$ ，则 $y = (\log_{\frac{1}{4}}x)^2 - 2\log_{\frac{1}{4}}x + 5 = (t-1)^2 + 4$ ，又因为函数 $y = (t-1)^2 + 4$ 在 $[-1, -\frac{1}{2}]$ 单调递减，当 $t = -\frac{1}{2}$ 时函数有最小值 $\frac{25}{4}$ ，当 $t = -1$ 时函数有最大值8；故函数 $y = (\log_{\frac{1}{4}}x)^2 - 2\log_{\frac{1}{4}}x + 5$ 在 $2 \leq x \leq 4$ 时的值域为 $\{y | \frac{25}{4} \leq y \leq 8\}$ 。故答案为： $\{y | \frac{25}{4} \leq y \leq 8\}$

5. 【答案】27 解：对于函数 $y = \log_a(x-1) + 8$ ，令 $x-1 = 1$ ，解得 $x = 2$ ，此时 $y = 8$ ，因此函数 $y = \log_a(x-1) + 8$ 的图象恒过定点 $P(2,8)$ 。设幂函数 $f(x) = x^\alpha$ ， $\because P(2,8)$ 在幂函数 $f(x)$ 的图象上， $\therefore 8 = 2^\alpha$ ，解得 $\alpha = 3$ 。 $\therefore f(x) = x^3$ 。 $\therefore f(3) = 3^3 = 27$ 。故答案为27。

6. 【答案】解：(1) $\because x > 0, y > 0, \therefore 4x + y \geq 2\sqrt{4xy}, \therefore 3 \geq 2\sqrt{4xy}$ ，当且仅当 $4x = y$ 时取等号，即 $x = \frac{3}{8}, y = \frac{3}{2}$ 时取等号，即 $xy \leq \frac{9}{16}$ ，所以 xy 的最大值为 $\frac{9}{16}$ 。

(2) 由 $4x + y = 3$ 可得 $\frac{4x+y}{3} = 1$ ，又 $x > 0, y > 0$ ，则 $(\frac{3}{x} + \frac{12}{y})(\frac{4x}{3} + \frac{y}{3}) = \frac{16x}{y} + \frac{y}{x} + 8 \geq 2\sqrt{\frac{16x}{y} \cdot \frac{y}{x}} + 8 = 16$ ，当且仅当 $\frac{16x}{y} = \frac{y}{x}$ 时取等号，即 $x = \frac{3}{8}, y = \frac{3}{2}$ 时取等号，所以 $\frac{3}{x} + \frac{12}{y}$ 的最小值为16。